

УДК 621.372.542

В. Ю. Пшекоп

Государственное учреждение «Институт проблем искусственного интеллекта», г. Донецк
83048, г. Донецк, ул. Артема, 118 б

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОКОННЫХ ФУНКЦИЙ

V. J. Przekop

Public institution «Institute of Problems of Artificial intelligence», Donetsk
83048, Donetsk, Artema st., 118b

METHOD FOR COEFFICIENTS COMPUTATION OF IMPULSE RESPONSE OF WINDOW FUNCTIONS

В. Ю. Пшекоп

Державна установа «Інститут проблем штучного інтелекту», м. Донецьк
83048, м. Донецьк, вул. Артема, 118 б

МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІМПУЛЬСНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВІКОННИХ ФУНКЦІЙ

В статье предлагается новый метод расчета коэффициентов импульсной характеристики оконных функций, при котором нет необходимости в использовании больших объемов памяти. Сущность метода состоит в вычислении коэффициентов импульсной характеристики при помощи рекуррентных уравнений непосредственно в процессе оконного сглаживания.

Ключевые слова: оконные функции, рекуррентные уравнения, цифровая обработка сигналов, импульсная характеристика, оконное сглаживание.

The paper suggests a method for coefficients computation of impulse response of window functions which does not require using large capacity of memory. The method presupposes the coefficients computation of impulse response on the basis of recurrence equations in the process of window smoothing.

Keywords: window function, recurrence equation, digital signal processing, impulse response, window smoothing.

У статті пропонується новий метод обчислення коефіцієнтів імпульсної характеристики віконних функцій, при якому немає необхідності у використанні великих об'ємів пам'яті. Сутність методу полягає в обчисленні коефіцієнтів імпульсної характеристики при допомозі рекуррентних рівнянь безпосередньо у процесі віконного згладжування.

Ключові слова: віконні функції, рекуррентні рівняння, цифрова обробка сигналів, імпульсна характеристика, віконне згладжування.

Введение

Оконное сглаживание применяется во многих задачах цифровой обработки сигналов.

На практике используется множество различных оконных функций [1], математические выражения большинства из них содержат тригонометрические функции, которые довольно сложно вычислять в режиме реального времени. В связи с этим, отчеты импульсной характеристики окон, как правило, хранятся в памяти. При необходимости в использовании в рамках одного проекта оконных функций различного вида и различной ширины, недостатки данного способа становятся ощутимыми в виду потребления большого объема памяти для хранения коэффициентов окна. Этим определяется актуальность разработанного метода.

Цель работы – математическое обоснование нового метода вычисления коэффициентов импульсных характеристик оконных функций.

Основная идея статьи заключается в вычислении коэффициентов импульсных характеристик оконных функций при помощи рекуррентных уравнений.

Разложение оконных функций в тригонометрический ряд

Многие оконные функции (синус-окно, окно Ханна, окно Хемминга, окно Блэкмана и пр.) представлены в виде суммы гармонических функций [1]. Другие окна (окно Гаусса, треугольное окно, окно Барлета-Ханна и др.) можно с достаточной для практического применения точностью аппроксимировать суммой из 5-6 гармонических функций, укороченным рядом Фурье.

Исходя из особенностей математического описания оконных функций, в работе выбран следующий набор дискретных базисных функций для аппроксимации сглаживающих окон:

$$\begin{aligned} W0_n &= 1 \\ W1_n &= \cos(\omega_0 \cdot T \cdot n) \\ W2_n &= \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot T \cdot n) \\ W3_n &= \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot T \cdot n) \\ W4_n &= \cos(4 \cdot \omega_0 \cdot T \cdot n) \\ Ws_n &= \sin\left(\frac{\omega_0 \cdot T \cdot n}{2}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где: $n=0 \dots N-1$; N – количества точек импульсной характеристики окна; $\omega_0 \cdot T = \frac{2 \cdot \pi}{N-1}$.

Данным набором функций можно достаточно точно аппроксимировать большинство применяемых на практике окон. Окна, описываемые суммой постоянной составляющей и рядом гармонических функций: синус-окно, окно Ханна, окно Хемминга, окно Блэкмана и др. [1] описываются набором базисных функций (1) абсолютно точно.

Большинство окон можно аппроксимировать дискретной функцией

$$W_n = a_0 \cdot W0_n + a_1 \cdot W1_n + a_2 \cdot W2_n + a_3 \cdot W3_n + a_4 \cdot W4_n + a_s \cdot Ws_n, \quad (2)$$

где: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_s$ – коэффициенты разложения оконной функции в базисе дискретных функций, соответственно $W0, W1, W2, W3, W4, Ws$.

Функция $W0_n = 1$ – постоянная составляющая. Остальные гармонические функции можно заменить эквивалентными им числовыми рядами $V1 \approx W1$, $V2 \approx W2$, $V3 \approx W3$, $V4 \approx W4$, $Vs \approx Ws$, полученными из разностных уравнений (3) с определенными начальными условиями.

$$\begin{aligned}
 V0_n &= 1 \\
 V1_0 &= 1, \quad V1_1 = 1 - \left(\frac{\omega_0 \cdot T}{2}\right)^2, \quad V1_n = \left(2 - (\omega_0 \cdot T)^2\right) \cdot V1_{n-1} - V1_{n-2}, \\
 V2_0 &= 1, \quad V2_1 = 1 - (\omega_0 \cdot T)^2, \quad V2_n = \left(2 - (2 \cdot \omega_0 \cdot T)^2\right) \cdot V2_{n-1} - V2_{n-2}, \\
 V3_0 &= 1, \quad V3_1 = 1 - \left(\frac{3 \cdot \omega_0 \cdot T}{2}\right)^2, \quad V3_n = \left(2 - (3 \cdot \omega_0 \cdot T)^2\right) \cdot V3_{n-1} - V3_{n-2}, \\
 V4_0 &= 1, \quad V4_1 = 1 - (2 \cdot \omega_0 \cdot T)^2, \quad V4_n = \left(2 - (\omega_0 \cdot T)^2\right) \cdot V4_{n-1} - V4_{n-2}, \\
 Vs_0 &= 0, \quad Vs_1 = \omega_0 \cdot T, \quad Vs_n = \left(2 - \left(\frac{\omega_0 \cdot T}{2}\right)^2\right) \cdot Vs_{n-1} - Vs_{n-2};
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $n=2 \dots N-1$, $\omega_0 \cdot T = \frac{2 \cdot \pi}{N-1}$.

Вывод рекуррентного уравнения

Для вывода (3) достаточно вспомнить, что функция

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{4}$$

есть решение дифференциального уравнения

$$\omega_0^2 \cdot x(t) + p^2 \cdot x(t) = 0 \tag{5}$$

где $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Параметры A и φ однозначно определяются начальными условиями. Перейдем от уравнения (1) к уравнению в частных разностях. Для этого производим замену

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{z-1}{T} \\
 p^2 &= \frac{z^2 - 2z + 1}{T^2},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где z – некоторая комплексная переменная
Получаем

$$\omega_0^2 \cdot z \cdot X + \frac{z^2 - 2z + 1}{T^2} \cdot X = 0 \tag{7}$$

Произведем от (7) обратное z – преобразование, получаем рекуррентное уравнение

$$x_n = (2 - \omega_0^2 T^2)x_{n-1} - x_{n-2}, \quad (8)$$

где $n = 2 \dots N-1$; N – количество точек в импульсной характеристики оконной функции.

Задавая начальные условия, например: $\omega_0 T = \frac{2 \cdot \pi}{N-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \omega_0 T$, мы получим функцию: $x(n \cdot T) \approx \sin(\omega_0 \cdot n \cdot T)$. При других начальных условиях $\omega_0 T = \frac{2 \cdot \pi}{N-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 - \left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)^2$, мы получим функцию: $x(n \cdot T) \approx \cos(\omega_0 \cdot n \cdot T)$. Полученные таким образом гармонические функции представлены на рис. 1 и рис. 2.

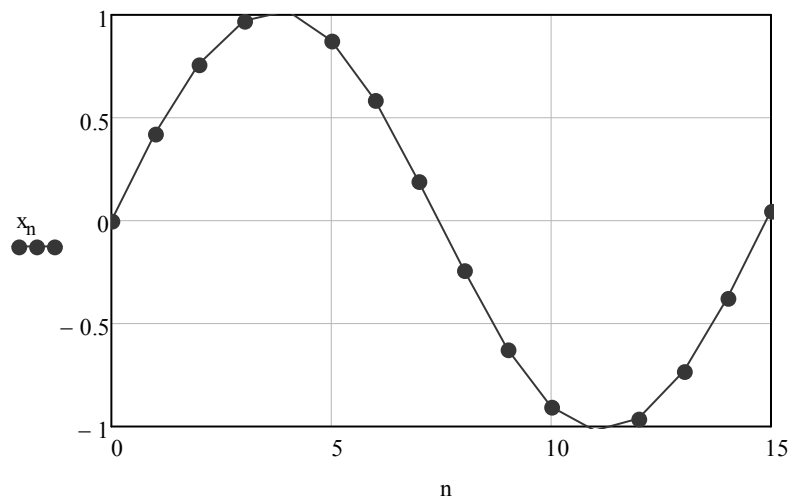


Рисунок 1 – График функции $x(n \cdot T) \approx \sin(\omega_0 \cdot n \cdot T)$, полученный при помощи разностного уравнения (8)

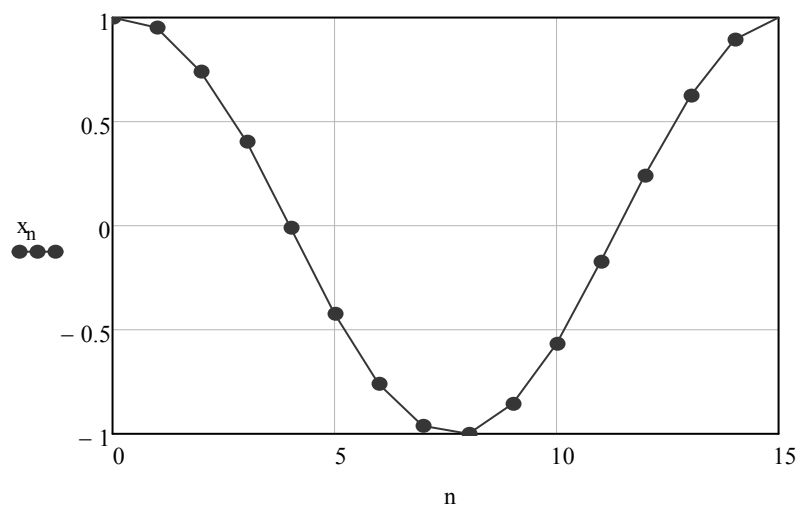


Рисунок 2 – График функции $x(n \cdot T) \approx \cos(\omega_0 \cdot n \cdot T)$, полученный при помощи разностного уравнения (8)

Очевидно при $N \gg 1$, для функции $x(n \cdot T) = \cos(\omega_0 \cdot n \cdot T)$ начальные условия можно упростить: $x_0 = 1$, $x_1 = 1$.

Продemonстрируем расчет оконной функции на примере окна Гаусса с параметром $\sigma = 0.5$, длиной $N = 1024$ точек.

$$w(n) = \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n - \frac{N-1}{2}}{\sigma \cdot \frac{N-1}{2}} \right)^2 \right). \quad (9)$$

Поскольку функция $W_{S_n} = \sin\left(\frac{\omega_0 \cdot T \cdot n}{2}\right)$ не ортогональна к остальным функциям базиса (1), то сначала находим коэффициент разложения a_s при функции $W_{S_n} = \sin\left(\frac{\omega_0 \cdot T \cdot n}{2}\right)$. Это можно сделать, приравняв первые производные в начале интервала аппроксимации функций W_{S_n} и (9)

$$a_s = (w(1) - w(0)) \cdot \frac{N-1}{\pi} = 0.34564. \quad (10)$$

Несмотря на то, что N как параметр явно входит в уравнение (10), результат a_s будет отличаться только в 4 – 5 цифре после запятой, что для практических применений не критично. Далее находим коэффициенты при постоянной составляющей и при первых 4-х гармониках остатка функции $\Delta(n) = w(n) - a_s \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 \cdot T \cdot n}{2}\right)$;

$$a_0 = \frac{1}{N} \cdot \int_0^{N-1} \Delta(n) dn = 0.37773$$

$$a_1 = \frac{2}{N} \cdot \int_0^{N-1} \Delta(n) \cdot \cos(\omega_0 \cdot T \cdot n) dn = -0.26066$$

$$a_2 = \frac{2}{N} \cdot \int_0^{N-1} \Delta(n) \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot T \cdot n) dn = 0.01626$$

$$a_3 = \frac{2}{N} \cdot \int_0^{N-1} \Delta(n) \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot T \cdot n) dn = 0.00059$$

$$a_4 = \frac{2}{N} \cdot \int_0^{N-1} \Delta(n) \cdot \cos(4 \cdot \omega_0 \cdot T \cdot n) dn = 0.00017$$

После нахождения коэффициентов вычисляем вспомогательные функции аппроксимации при помощи рекуррентных уравнений с соответствующими начальными условиями.

$$\omega_0 T = \frac{2 \cdot \pi}{N-1}$$

$$V0_n = 1$$

$$\begin{aligned}
V1_0 &= 1, & V1_1 &= 1, & V1_n &= \left(2 - \left(\frac{2 \cdot \pi}{N-1}\right)^2\right) \cdot V1_{n-1} - V1_{n-2}, \\
V2_0 &= 1, & V2_1 &= 1, & V2_n &= \left(2 - \left(\frac{4 \cdot \pi}{N-1}\right)^2\right) \cdot V2_{n-1} - V2_{n-2}, \\
V3_0 &= 1, & V3_1 &= 1, & V3_n &= \left(2 - \left(\frac{6 \cdot \pi}{N-1}\right)^2\right) \cdot V3_{n-1} - V3_{n-2}, \\
V4_0 &= 1, & V4_1 &= 1, & V4_n &= \left(2 - \left(\frac{8 \cdot \pi}{N-1}\right)^2\right) \cdot V4_{n-1} - V4_{n-2}, \\
Vs_0 &= 0, & Vs_1 &= \frac{\pi}{N-1}, & Vs_n &= \left(2 - \left(\frac{\pi}{N-1}\right)^2\right) \cdot Vs_{n-1} - Vs_{n-2}
\end{aligned}$$

Результирующее уравнение будет:

$$W_n = a_0 \cdot V0_n + a_1 \cdot V1_n + a_2 \cdot V2_n + a_3 \cdot V3_n + a_4 \cdot V4_n + a_s \cdot Vs_n \quad (11)$$

Графики окна Гаусса с параметром $\sigma = 0.5$ и аппроксимирующей функции представлены на рис. 3. Функция ошибки, то есть разница между аппроксимируемой и аппроксимирующей функцией представлена на рис. 4.

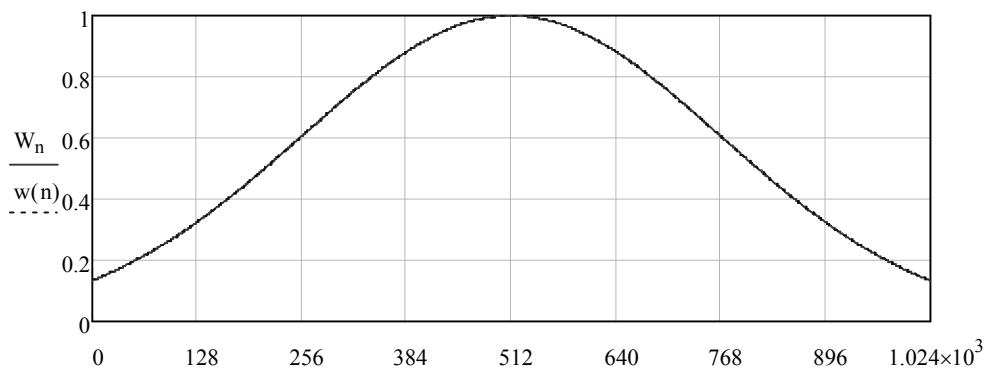


Рисунок 3 – Графики окна Гаусса с параметром $\sigma = 0.5$ и аппроксимирующей функции

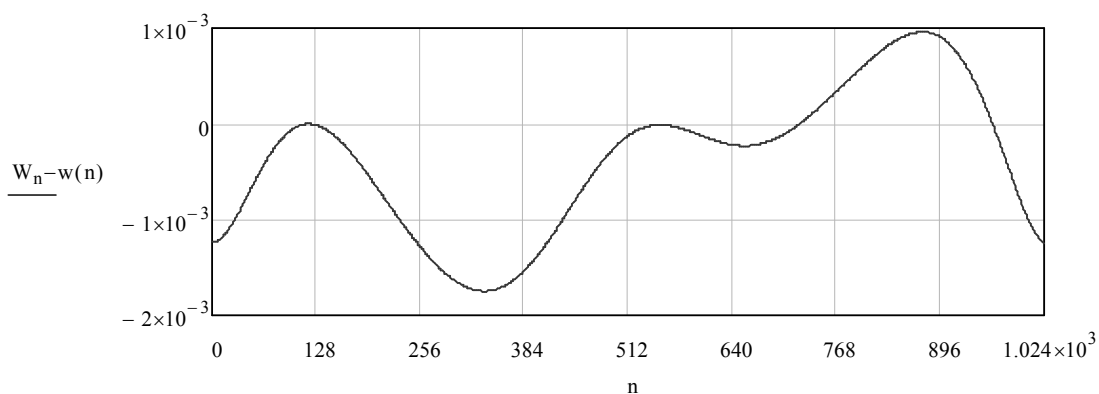


Рисунок 4 – Функция ошибки окна Гаусса с параметром, $\sigma = 0.5$ полученного с применением рекуррентного уравнения (11)

Как видно из рис. 4 ошибка аппроксимации в абсолютном значении не превышает $|\Delta(n)| < 1.7 \cdot 10^{-3}$.

Для других окон коэффициенты разложения приведены в табл. 1 [1]

Таблица 1 – Выражения для некоторых оконных функций и коэффициенты разложения в базисе функций (1)

Наименование окна	Выражение в дискретном виде: $w(n), n = 0 \dots N-1$	Коэффициенты					
		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_s
Прямоугольное окно (rectangle window)	$w(n) = 1$	1	0	0	0	0	0
Синус-окно	$w(n) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{N-1}\right)$	0	0	0	0	0	1
Окно Ланцоша (Lanczos window), или sinc - окно	$w(n) = \text{sinc}\left(\frac{\pi \cdot n}{N-1}\right), \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi \cdot x)}{\pi \cdot x}$	0.18323	-0.18052	-0.00225	-0.00018	-0.00005	0.63786
Окно Барлетта (Bartlett window), или треугольное окно	$w(n) = 1 - \left \frac{n}{A} - 1\right , A = \frac{N-1}{2}$	0.09462	-0.13496	0.05399	-0.01093	0.00643	0.63662
Окно Ханна (Hann window)	$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right)$	0.5	-0.5	0	0	0	0
Окно Барлетта — Ханна (Bartlett–Hann window)	$w(n) = 0.62 - 0.48 \cdot \left \frac{n}{N-1} - 0.5\right - 0.38 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right)$	0.40085	-0.41103	0.01315	-0.00258	0.00157	0.15512
Окно Хемминга (Hamming window)	$w(n) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right)$	0.54	-0.46	0	0	0	0
Окно Блэкмана (Blackman window)	$w(n) = 0.42 - 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right)$	0.42	-0.5	0.08	0	0	0
Окно Блэкмана — Харриса (Blackman–Harris window)	$w(n) = 0.35875 - 0.48829 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right) + \dots$ $\dots + 0.14128 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right) - 0.01168 \cdot \cos\left(\frac{6 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right)$	0.35875	-0.48829	0.14128	-0.01168	0	0
Окно Наталла (Nuttall window)	$w(n) = 0.3635819 - 0.4891775 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right) + \dots$ $\dots + 0.1365995 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right) - 0.0106411 \cdot \cos\left(\frac{6 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right)$	0.3635819	-0.4891775	0.1365995	-0.0106411	0	0
Окно с плоской вершиной (Flat top window)	$w(n) = 1.0 - 1.93 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right) + 1.29 \cdot \cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right) - \dots$ $\dots - 0.388 \cdot \cos\left(\frac{6 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right) + 0.032 \cdot \cos\left(\frac{8 \cdot \pi \cdot n}{N-1}\right)$	1	-1.93	1.29	-0.388	0.032	0
Окно Гаусса (Gaussian window) $\sigma = 0.3$	$w(n) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n-A}{\sigma \cdot A}\right)^2\right), A = \frac{N-1}{2}$	0.35774	-0.47074	0.12895	-0.0066	0.00043	0.02762
Окно Гаусса (Gaussian window) $\sigma = 0.5$		0.37773	-0.26066	0.01626	0.00059	0.00017	0.34564
Окно Гаусса (Gaussian window) $\sigma = 1.2$		0.69588	0.00935	0.00057	0.0000016	0.00057	0.31231

Заключение

Таким образом, в результате выполненной работы дано математическое обоснование нового метода расчета оконных функций на базе рекуррентных уравнений. Предложенный метод незначительно увеличивает количество арифметических операций при цифровой обработке сигналов, однако позволяет резко сократить объем используемой памяти цифровых устройств, применяемых для обработки сигналов. Благодаря использованию данного метода отпадает необходимость хранить в памяти отчеты импульсной характеристики весового окна, достаточно иметь коэффициенты разложения в ряд тригонометрических функций.

Список литературы

1. Использование оконных функций в задачах цифрового спектрального анализа. Примеры и рекомендации [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.dsplib.ru/content.html>
2. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
3. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер ; пер. с англ. – М.: Техносфера, 2006. – 856 с.

References

1. The use of window functions in problems of digital spectral analysis. Examples and recommendations <http://www.dsplib.ru/content.html>
2. L. R. Rabiner, B. Gold. Theory and application of digital signal processing. Prentice-Hall, Inc. Englewood cliffs, New Jersey.
3. Alan V. Oppenheim, Ronald W. Shafer. Digital signal processing. Prentice-Hall, Inc. Englewood cliffs, New Jersey.

RESUME

V. J. Przekop

Method for Coefficients Computation of Impulse Response of Window Functions

Background: window smoothing is applied in many problems of digital signal processing. In this connection the hardware implementation of the method of window smoothing leads to the problems of effective computations and report storage of the impulse response of window functions.

Materials and methods: The paper aims at the mathematical rationale for a new method of coefficients computation of impulse response of window functions. We consider the method of real-time mode computation of impulse response of window functions on the basis of recurrence equations obtained by solving differential equation.

Results: The paper displays the mathematical rationale for a new method of computation of window functions. We compute the coefficients of expansion of basic functions. The proposed method allows us to reduce the capacity of memory required for hardware implementation of window filtering.

Conclusion: Thus, as a result we obtained the mathematical rationale of the new method of computation of window functions on the basis of recurrence equations. Although the proposed method slightly increases the number of arithmetic operations in digital signal processing, it allows us to reduce dramatically the memory capacity of digital devices used for signal processing. This method eliminates the necessity to store the impulse response reports of weighting windows, limiting to coefficients of trigonometric function series expansion.

Статья поступила в редакцию 25.06.2015.