

УДК 622.734.001.57

В. Н. Павлыш, Е. В. Перинская
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк
83001, г. Донецк, ул. Артема, 58

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ АППАРАТОВ КОНВЕКТИВНОГО ТИПА

V. N. Pavlysh, E. V. Perinskaya
Donetsk National Technical University, c. Donetsk
83001, c. Donetsk, Artyoma str., 58

THE MATHEMATICAL MODELING OF FUNCTIONING PROCESSES OF SPECIAL CONVECTIVE TYPE APPARATUS

В. М. Павлиш, О. В. Перінська
Донецький національний технічний університет, м. Донецьк
83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

МАТЕМАТИНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ АПАРАТІВ КОНВЕКТИВНОГО ТИПУ

В статье рассматривается задача построения детерминированной математической модели процессов функционирования специализированного аппарата конвективного типа для получения ферритового порошка, используемого в электронной технике. В основу модели положены уравнения в частных производных, компьютерная реализация осуществлена с помощью конечно-разностной аппроксимации.

Ключевые слова: математическая модель, процесс, функция, уравнение, алгоритм.

In the article the task of construction of determine mathematical model of functioning processes of special convective type apparatus for obtaining of ferromaterial, used in electronic technology is considered. The model based on particular derivatives equations, computer realization made by ending-difference approximation.

Key words: the mathematical model, process, function, equation, algorithm.

Розглядається задача побудови детермінованої математичної моделі процесу функціонування спеціалізованого апарату конвективного типу для отримання феритового порошку, що використовується в електронній техніці. В основу моделі покладено рівняння в партикулярних похідних, комп'ютерна реалізація проведена за допомогою кінцево-різницевої апроксимації.

Ключові слова: математична модель, процес, функція, рівняння, алгоритм.

Конструкцией ряда электронных приборов предусмотрено применение узлов, основанных на изделиях из марганец-цинковых ферритовых порошков. Применяемый для их получения реактор-осадитель не позволяет получать осадки с хорошо воспроизводимыми свойствами без его реконструкции, т.к. в реакторе не достигается необходимая степень однородности компонентов в осадке, происходит залегание твердой фазы на днище, наблюдается налипание осадков на стенках. Реконструкция аппарата требует соответствующего обоснования, что вызывает необходимость теоретических и экспериментальных исследований.

Одним из эффективных методов решения рассматриваемых задач является метод математического моделирования, позволяющий получить с помощью компьютера достаточно широкий набор данных о реконструируемом объекте без проведения долговременных и дорогостоящих натурных исследований [1], [2].

Рассмотрим моделирование машин данного типа на примере аппарата для получения ферритового порошка.

В соответствии с технологическими требованиями можно выделить 3 уровня задач математического моделирования процесса.

1. Исследование гидродинамики процесса с целью выявления условий и параметров, обеспечивающих стабильный непрерывный гидродинамический режим, близкий к режиму идеального перемешивания.

2. Исследование физики процесса (конвективная диффузия, теплообмен, массоперенос) с целью выявления условий параметров, обеспечивающих образование суспензии с постоянными физическими свойствами (гранулометрический состав, удельная поверхность твердой фазы и т.п.).

3. Исследование химической кинетики процесса (химическая кристаллизация) с целью выявления условий и параметров образования осадка (твердой фазы суспензии) с комплексом постоянных физико-химических свойств (фазовый химический состав и т.п.).

В данной статье рассматривается решение задачи моделирования 1-го и частично 2-го уровней.

Условная гидродинамическая схема реактора приведена на рис. 1а.

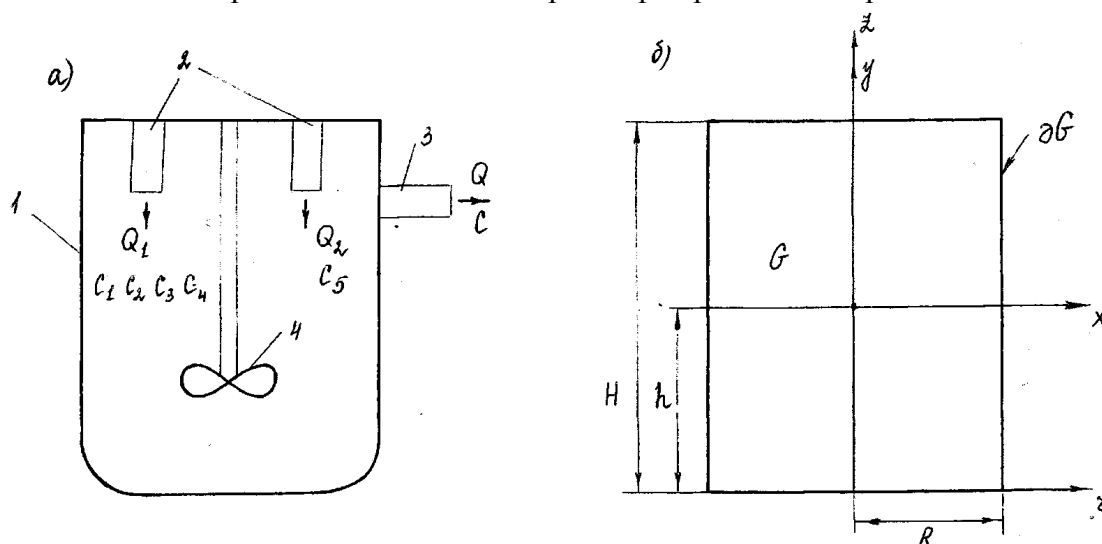


Рисунок 1 – Схема построения математической модели реактора:

- а) 1 – корпус, 2 – входные трубопроводы,
3 – верхний перелив (выходной трубопровод), 4 – мешалка
б) к выбору координат и построению различных типов моделей

Будем строить математическую модель процесса перемешивания многокомпонентной смеси в химическом реакторе с учетом вынужденной конвекции массы. Конвекция происходит за счет перемешивания смеси лопастью, угловая скорость вращения которой ω .

Рассматривается следующая задача. В области G (химический реактор, рис. 1б) требуется определить концентрацию твердой фазы, учитывая при этом вихревые течения раствора, продольную и поперечную диффузию, форму реактора и угловую скорость вращения лопасти, причем процесс перемешивания происходит в реакторе за заданное время T .

В полной математической постановке данная задача есть задача с четырьмя неизвестными: концентрациями твердой и жидкой фазы, функцией тока и поверхностью кристаллизации. Такие задачи относятся к классу краевых задач со свободной границей и являются нелинейными. Численное решение таких задач содержит большие математические трудности, так как заранее неизвестно положение поверхности, отделяющей твердую фазу от жидкой. Эту поверхность необходимо определять в процессе решения задачи.

Укажем, что аналогичные трудности возникают при численном решении краевых задач, возникающих в гидродинамике (это задачи о кавитационном течении жидкости, задачи о потенциальном течении жидкости в вогнутом сопле [1], [2], в теплофизике при рассмотрении задач кристаллизации – задачи типа Стефана [3]).

Большое количество работ по численному решению краевых задач со свободной границей, связанных с перемешиванием многокомпонентной среды, выполнено В. В. Кафаровым [4]. При этом понимается, что известно поле скоростей раствора в химическом реакторе. В данной же работе предложена математическая модель химического реактора, позволяющая рассчитывать это поле в процессе решения краевой задачи. В этом состоит существенное отличие предлагаемой модели от рассмотренных ранее.

Строится приближенная модель процесса перемешивания в химическом реакторе. Основным упрощением является то, что мы предполагаем концентрацию жидкой фазы постоянной, хотя и неизвестной величиной. Это упрощение вызвано тем, что нас в дальнейшем интересует только твердая фаза.

Перейдем теперь к описанию основных типов моделей.

Простейшей моделью является модель идеального перемешивания. При этом концентрация твердой фазы является функцией только времени, т.е. $C = C(t)$. Модель построена таким образом, чтобы она учитывала концентрации компонент C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 (это соответственно концентрации сернокислых солей железа, марганца, цинка, никеля и раствор углеаммонийной соли, т.е. растворы $FeSO_4, MnSO_4, ZnSO_4, NiSO_4$ и $NH_4H(O_3)$), поступающих в химический раствор. Первые четыре компонента поступают с расходом Q_1 л/мин, а последняя компонента с расходом Q_2 л/мин. Учитывается также расход $Q = Q_1 + Q_2$, раствора, выходящего из химического реактора объема V за время T . При сделанных предположениях наша задача сводится к решению линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Решение этой задачи выписывается в явном виде.

Второй моделью является одномерная модель перемешивания многокомпонентной среды в химическом реакторе с учетом вихревого течения раствора. При этом поле скоростей раствора рассчитывается в плоском случае. Введя функцию тока $\psi(x, y)$, мы определяем ее из решения краевой задачи для уравнения Пуассона. Граничным

условием является обращение в нуль на границе функции тока. Концентрация твердой фазы $C(x, t)$ определяется из решения краевой задачи для уравнения диффузии с учетом конвекции, вызванной вращением лопасти. Граничные условия – это условия непроницаемости на стенках реактора. Данная модель построена на основе модели идеального перемешивания и является естественным продолжением простейшей модели, так как она учитывает все параметры модели идеального перемешивания.

Рассмотрены также осесимметрическая и плоская модели перемешивания в химическом реакторе. Отличие от указанных выше моделей состоит в том, что концентрации являются соответственно функциями пространственных координат $C(r, t)$ и $C(x, y, t)$.

Варианты моделей. Краевые задачи

Обозначим через $C(t)$ концентрацию твердой фазы в случае модели идеального перемешивания. Тогда $C(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{V}{T} \cdot \frac{dC}{dt} = Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - Q \cdot C, \quad (1)$$

$$C(0) = C_0, \quad Q = Q_1 + Q_2, \quad (2)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – концентрации компонент, поступающих в виде раствора, причем первые четыре поступают с расходом Q_1 л/мин, а последняя компонента с расходом Q_2 л/мин; V – объем реактора, T – время перемешивания, C_0 – начальная концентрация. Задача (1), (2) описывает модель идеального перемешивания. Решение этой задачи имеет вид:

$$C(t) = C_0 \cdot \exp\left(-\frac{T \cdot Q}{V} \cdot t\right) + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{Q} \left[1 - \exp\left(-\frac{T \cdot Q}{V} \cdot t\right)\right] \quad (3)$$

Каждая частица, находящаяся в реакторе, обладает вектором скорости $\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}$ (в плоском случае), где V_x и V_y соответственно абсцисса и ордината вектора $\vec{V}$. В нашем случае вектор $\vec{V}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\text{rot} \vec{V} = \mu(x, y), \quad (x, y) \in G = (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1), \quad (4)$$

$$\text{div} \vec{V} = 0, \quad (x, y) \in \partial G \quad (5)$$

граничным условием является обращение в нуль нормальной составляющей $\vec{V}_n$ вектора $\vec{V}$ на границе G , т.е.:

$$\vec{V}_n = 0, \quad (x, y) \in \partial G. \quad (6)$$

Краевая задача (4) – (6) определяет поле скоростей частиц в химическом реакторе.

Укажем также, что в дальнейшем в качестве функции удобно взять такую функцию:

$$\mu(x, y) = \frac{\omega}{v(l^2 x^2 + h^2 y^2)}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad \mu(0, 0) = \omega, \quad (7)$$

где ω – угловая скорость вращения лопасти (мешалки), v – коэффициент вязкости раствора, h – характерный поперечный размер реактора, l – продольный размер реактора.

Введя функцию тока $\psi(x, y)$, запишем задачу (4) – (6) в другом виде:

$$\frac{1}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \mu(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (8)$$

$$\psi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial G. \quad (9)$$

При этом вектор скорости $\vec{V}$ и функция тока $\psi(x, y)$ связаны следующими равенствами:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (10)$$

В случае одномерной модели перемешивания концентрация $C(t, x)$ твердой фазы (осадка) является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = -V_x \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - QC}{V}$$

$$0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$C_x(t, 0) = C_x(t, 1) = 0, \quad (12)$$

$$C(0, x) = C_0. \quad (13)$$

Здесь D_L – продольный коэффициент диффузии; абсцисса вектора $\vec{V}$, т.е. V_x , определяется из первого условия (10). Краевая задача (11) – (13) является одномерной моделью химического реактора.

В случае двух геометрических переменных x и y концентрация твердой фазы $C(t, x, y)$ является решением уравнения:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = -V_x \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + V_y \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{D_H}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - QC}{V}$$

$$(x, y) \in G, \quad t > 0 \quad (14)$$

при следующем граничном и начальном условии:

$$C_x(t, x, y) = 0, \quad (t, x, y) \in \partial G \times [0, 1] \quad (15)$$

$$C(0, x, y) = C_0 \quad (16)$$

здесь D_H – поперечный коэффициент диффузии. Краевая задача (11) – (16) описывает двумерный вариант модели химического реактора. Эта задача содержит две неизвестные функции $\psi(x, y)$ и $C(t, x, y)$.

Наиболее интересной и практически важной является осесимметрическая модель химического реактора. В этом случае геометрическими переменными являются радиус r и высота z . Тогда ротор вектора скорости $\vec{V}$ определяется по следующей формуле:

$$\text{rot} \vec{V} \Big|_{\varphi} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r},$$

где $\vec{V} = V_r \cdot \vec{i} + V_z \cdot \vec{k}$, $V_{\varphi} = 0$, φ – угол. Компоненты скорости V_z и V_r определяются из следующей системы уравнений

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \mu(r, z)$$

$$\frac{\partial(r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \cdot V_z)}{\partial z} = 0$$

(второе уравнение есть уравнение неразрывности). Обозначим через $\psi(r, z)$ функцию тока. Тогда

$$V_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad V_z = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

функцией тока $\psi(r, z)$ является решение такой краевой задачи

$$\frac{1}{H^2} \cdot \frac{\partial \psi^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{R^2 \cdot r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{r \cdot \omega \cdot R}{R^2 r^2 + H^2 \cdot z^2};$$

$$D = (0 < r < 1, 0 < z < 1) \quad (17)$$

$$\psi(r, z) = 0; \quad (r, z) \in \partial D \quad (18)$$

(H и R – характерные размеры реактора).

После того, как поле скоростей частиц в химическом реакторе определено из решения краевой задачи (17), (18), концентрация твердой фазы $C(t, r, z)$ находится из решения следующей задачи:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{r \cdot R \cdot H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{1}{r \cdot R \cdot H} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial C}{\partial r} + D_H \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{D_R}{r \cdot R} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - QC}{V}$$

$$0 < r < 1, \quad 0 < z < 1 \quad , \quad (19)$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \quad (t, r, z) \in \partial D \times [0, T], \quad (20)$$

$$C(0, r, z) = C_0 \quad (21)$$

(здесь $\vec{n}$ – внешняя нормаль к области $D \times [0, T]$).

Краевая задача (17) – (21) описывает осесимметрическую модель химического реактора. Указанную задачу надо рассматривать как систему двух уравнений (одно уравнение эллиптического, а другое параболического типа) относительно двух неизвестных функций $\psi(r, z)$ и $C(t, r, z)$ с соответствующими граничными условиями (18) и (20). Отличие этих моделей от известных ранее состоит в том, что поле скоростей частиц в химическом реакторе определяется в процессе решения задач.

Численные методы и разностные уравнения

При численном решении краевых задач, моделирующих процессы в химическом реакторе, соответствующие дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными.

Рассмотрим вначале задачу (11) – (13). Разобьем отрезок $0 \leq x \leq 1$ точками $x_i = i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h > 0$ на N равных частей длины $h = \frac{1}{N}$. Отрезок $0 \leq t \leq 1$ разобьем на M равных частей с шагом τ . При этом $t_j = j \cdot \tau$, $j = 0, 1, \dots, M$.

Полагая теперь $C_{ij} = C(x_i, t_j)$, заменим производные C_t , C_x , C_{xx} , разностными соотношениями следующим образом:

$$\frac{\partial C(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{C_{ij} - C_{i,j-1}}{\tau}; \quad \frac{\partial C(x_i, t_j)}{\partial x} = \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2h}; \quad \frac{\partial^2 C(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1,j} - 2C_{ij} + C_{i-1,j}}{h^2}.$$

При такой замене порядок точности соответственно следующий: $O(\tau)$, $O(h)$ и $O(h^2)$. Теперь уравнение (11) запишется в разностном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \cdot \frac{C_{ij} - C_{i,j-1}}{\tau} &= -V_x \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2h} + D_L \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \frac{C_{i+1,j} - 2C_{ij} + C_{i-1,j}}{h^2} + f - \frac{Q}{V} \cdot C_{ij}; \\ f &= \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V}. \end{aligned}$$

Замена граничных условий (12) разностным соотношением приводит к равенствам:

$$C_{0j} = C_{1j}; \quad C_{nj} = C_{N-1,j}.$$

Используя затем начальные условия (13), получаем

$$C(0, x_i) = C_{i0} = C_0.$$

Таким образом, краевая задача (11) – (13) допускает следующую разностную постановку

$$C_{ij} = A \cdot C_{i-1,j-1} + B \cdot C_{i,j-1} + D \cdot C_{i+1,j-1} + F; \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{V_x}{2 \cdot l \cdot h} + \frac{D_L}{l^2 h^2} \right) \cdot T \cdot \tau; \quad B = \left(1 - \frac{2 \cdot D_L \cdot T \cdot \tau}{l^2 h^2} - \frac{Q \cdot T \cdot \tau}{V} \right) \\ D &= \left(\frac{D_L}{l^2 h^2} - \frac{V_x}{2 \cdot l \cdot h} \right) \cdot T \cdot \tau; \quad F = \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V} \cdot T \cdot \tau. \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (22) используется явная схема.

Перейдем теперь к численной реализации плоской модели (8) – (10), (14) – (16). В основе численной реализации этой модели лежит приближенное решение эллиптического и параболического уравнений, завязанных между собой в систему двух уравнений посредством правой части уравнения (14).

Итак, наша задача содержит две неизвестные функции $\psi(x, y)$ и $C(t, x, y)$.

Заменяя уравнение (14) разностным соотношением, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \cdot \frac{C_{ij}^{k+0,5} - C_{ij}^k}{0,5H_T} &= -\frac{V_x}{l} \cdot \frac{C_{i+1,j}^{k+0,5} - C_{ij}^{k+0,5}}{h \cdot H_x} - \frac{V_y}{h} \cdot \frac{C_{i,j+1}^k - C_{ij}^k}{H_y} + \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{C_{i+1,j}^{k+0,5} - 2C_{ij}^{k+0,5} + C_{i-1,j}^{k+0,5}}{H_x^2} + \\ &+ \frac{D_H}{h^2} \cdot \frac{C_{i,j+1}^k - 2C_{ij}^k + C_{i,j-1}^k}{H_y^2} + f. \end{aligned}$$

Здесь H_T - шаг по времени, H_x - шаг по переменной x , а H_y - шаг по переменной y , $C_{ij}^k = C(t_k, x_i, y_j)$. Далее, вначале на шаге $(k+0,5)$ решается система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \cdot C_{i-1,j}^{k+0,5} - \left(\frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} + \frac{2 \cdot D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \right) \cdot C_{ij}^{k+0,5} + \left(\frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} \right) \cdot C_{i+1,j}^{k+0,5} = \\ \left(\frac{V_y}{h \cdot H_y} - \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \right) \cdot C_{i,j+1}^k + \left(\frac{2 \cdot D_H}{h^2 \cdot H_y^2} - \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} \right) \cdot C_{ij}^k - \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \cdot C_{i,j-1}^k - f. \end{aligned} \quad (23)$$

Затем на $(k+1)$ шаге – такая система:

$$\begin{aligned} \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \cdot C_{i,j-1}^{k+1} - \left(\frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} + \frac{2 \cdot D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \right) \cdot C_{ij}^{k+1} + \left(\frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} \right) \cdot C_{i,j+1}^{k+1} = \\ \left(\frac{V_x}{l \cdot H_x} - \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \right) \cdot C_{i+1,j}^{k+0,5} + \left(\frac{2 \cdot D_L}{l^2 \cdot H_x^2} - \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} \right) \cdot C_{ij}^{k+0,5} + \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \cdot C_{i-1,j}^{k+0,5} + f. \end{aligned} \quad (24)$$

При численном построении поля скоростей краевая задача (8) – (10) заменяется конечно-разностным аналогом. При этом:

$$\begin{aligned} \psi(x_i, y_j) = \psi_{ij}; \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M; \\ \psi_{0j} = \psi_{Nj} = 0; \quad \psi_{i0} = \psi_{iM} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

ввиду граничного условия (9). Уравнение (8) в разностном варианте принимает вид:

$$\begin{aligned} \psi_{ij} = \frac{1}{4} (\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}) \\ i = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, задача (8) – (10), (14) – (16) свелась к решению уравнений (23) или (24), уравнения (26) с учетом условий (25). Блок-схема и описание программы и сама программа приводятся ниже.

Рассмотрим теперь конечно-разностную аппроксимацию задачи (17) – (21) в случае, когда концентрация $C(t, r)$ не зависит от пространственной переменной. Для этого разобьем отрезки $0 \leq r \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$ соответственно на N и M частей и точки деления обозначим через $r_j = j \cdot H_R$, $t_i = i \cdot H_T$, где $j = 0, 1, \dots, N$, $i = 0, 1, \dots, M$, H_R – шаг по r . Заменяя затем производные C_t , C_r , C_{rr} разностными соотношениями:

$$\frac{\partial C(t_i, r_j)}{\partial t} = \frac{C_{i+1,j} - C_{ij}}{H_T}; \quad \frac{\partial C(t_i, r_j)}{\partial r} = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2 \cdot H_R}; \quad \frac{\partial^2 C(t_i, r_j)}{\partial r^2} = \frac{C_{i,j-1} - 2C_{ij} + C_{i,j+1}}{H_R^2},$$

где $C_{ij} = C(t_i, r_j)$, из уравнения (19) получаем

$$\begin{aligned} C_{i+1,j} = C_{ij} \left(1 - \frac{T \cdot H_T \cdot Q}{V} - \frac{2D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} \right) + C_{i,j+1} \left(\frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot r \cdot R \cdot H_R} + \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} - \frac{V_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot R \cdot H_R} \right) + \\ + C_{i,j-1} \left(\frac{V_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot R \cdot H_R} - \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot r \cdot R^2 \cdot H_R} + \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} \right) + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V} \cdot T \cdot H_T \end{aligned} \quad (27)$$

К полученному уравнению (27) необходимо добавить равенства

$$C_{i0} = C_{iN}; \quad C_{0j} = C_{0M} = C_0 \quad (28)$$

следующие из граничного условия (20) и начального условия (21). Система уравнений (27) и (28) позволяет численно решить краевую задачу (19) – (21). При этом числовые значения функции тока ψ определяются из решений конечно-разностного аналога задачи (17), (18):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H^2} \cdot \frac{\psi_{j,k+1} - 2\psi_{jk} + \psi_{j,k-1}}{\Delta^2 z_k} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\psi_{j+1,k} - 2\psi_{jk} + \psi_{j-1,k}}{H_R^2} - \\ & - \frac{1}{R^2 \cdot r_j} \cdot \frac{\psi_{j+1,k} - \psi_{j-1,k}}{2 \cdot H_R} = \mu(r_j, z_k) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\psi_{0k} = \psi_{Nk} = \psi_{j0} = \psi_{iM} = 0, \quad (30)$$

где $\psi(r_j, z_k) = \psi_{jk}$; $j = 0, 1, \dots, N$; $k = 0, 1, \dots, P$.

Таким образом, совместное решение системы уравнений (27) – (30) приводит к численному решению краевой задачи (18) – (21).

Выводы

В статье предложены детерминированные математические модели трех уровней для компьютерного моделирования процесса получения ферритового порошка в аппарате конвективного типа. Модели основаны на уравнениях в частных производных, краевые условия сформированы согласно технологическим условиям. Выполнена численная реализация моделей методом конечно-разностной аппроксимации.

Предложенные модели и методы их реализации позволяют проводить численное моделирование процессов и решать задачи совершенствования как конструктивных, так и технологических параметров.

К достоинствам данного метода следует отнести возможность широкой вариации параметров без проведения физических и натурных экспериментов, что удешевляет и ускоряет процесс проектирования новой аппаратуры.

Список литературы

1. Баранов Д. А. Новые конструкции гидроциклонных аппаратов для разделения несмешивающихся жидкостей / Д. А. Баранов, И. Г. Терновский, М. Г. Лагутин // Современные машины и аппараты химических производств: (Химтехника-03). – Навои, 2003. – С.104-106.
2. Бедрань Н. Г. Разработка и исследование новых конструкций гидроциклонов / Н. Г. Бедрань, Л. М. Скоробогатов // Исследование и промышленное применение гидроциклонов. – Горький. 2001. – С. 41-45.
3. Tarjan G. Computation of the peripheral velocity appearing on the hydrocyclone from the velocity of the entering slurry // Acta techn. hung. – 1991. – Vol. 33, № 1/2. – P. 119-133.
4. Клячин В. В. О работе геометрически подобных гидроциклонов // Горький. – 1981. – С. 53-56.

References

1. Baranov D. A. The new constructions hydrocyclon apparatus for separation nonmixed liquids / D.A. Baranov, I.G. Ternovskiy, M.G. Lagutin // Modern machines and apparatus of chemical industry: (Chemitechnic-03). Navoi, 2003, p. 104-106.

2. Bedran N.G. Creation and investigation of new constructions of hydrocyclons / N.G. Bedran, L.M. Skorobogatov // Investigation and industrial application of hydrocyclons.- Gorkiy, 2001, p. 41-45
3. Tarjan G. Computation of the peripheral velocity appearing on the hydrocyclone from the velocity of the entering slurry // Acta techn. hung. 1991. Vol. 33, № 1/2. P.119-133.
4. Klyachin V.V. About action of geometrical type hydrocyclons // Gorkiy. – 1981. – p. 53-56.

RESUME

V. N. Pavlysh, E. V. Perinskaya

The Mathematical Modeling of Functioning Processes of Special Convective Type Apparatus

Background: The construction of many electron devices includes elements with ferromaterial ties. Present used apparatus has not satisfied parameters. The reconstruction of apparatus must be theoretical and experimental grounded. The most effective method of investigation is mathematical modeling.

Materials and methods: The proposed mathematical models are based on the equations of particular derivatives. The ending conditions are formed according to geometrical properties and technological parameters. The computer realizing made by ending-difference approximation.

Results: The proposed method does not require material resources and experimental investigations. Compared with the method of nature experiment results may be obtained by short time.

Conclusion: The development of method of mathematical modeling for optimization of parameters of convective apparatus allows us to reduce the material and terminal resources during projecting of new types apparatus.

Статья поступила в редакцию 06.07.2015.