П

УДК 621.372.542

В. Ю. Пшекоп
Государственное учреждение «Институт проблем искусственного интеллекта», г. Донецк
83048, г. Донецк, ул. Артема, дом 118 б

СИММЕТРИЧНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ПО КОНЕЧНЫМ РАЗНОСТЯМ

V. J. Przekop
Public institution «Institute of Problems of Artificial intelligence», Donetsk
83048, Donetsk, Artema st., 118b

SYMMETRIC DISCRETE ORTHOGONAL FUNCTIONS OF FINITE-DIFFERENCE SERIES EXPANSION

В. Ю. Пшекоп
Державна установа «Інститут проблем штучного інтелекту», м. Донецьк
83048, м. Донецьк, вул. Артема, буд. 118 б

СИМЕТРИЧНІ ДИСКРЕТНІ ОРТОГОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ПО КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЯХ

В статье рассматривается новая группа симметричных дискретных ортогональных функций, которые позволяют представить временной ряд (дискретную функцию) в виде суммы конечных разностей. Эти функции могут быть применены в цифровой обработке сигналов, в системах сжатия данных, при анализе дискретных сигналов, нахождении трендов временных рядов.
Ключевые слова: дискретные ортогональные функции, ортогональные дискретные преобразования, конечные разности, цифровая обработка сигналов.

The article considers a new group of symmetric discrete orthogonal functions allowing us to represent time series (discrete function) in the form of the sum of finite differences. These functions may be applied in the digital signal processing, data-compression system, discrete signal analysis, calculation of trends for time series.
Key words: discrete orthogonal functions, orthogonal discrete transformations, finite differences, digital signal processing.

У статті розглядається нова група симетричних дискретних ортогональних функцій, які дозволяють представити часовий ряд (дискретну функцію) у вигляді суми кінцевих різниць. Ці функції можуть бути застосовані в цифровій обробці сигналів, в системах стискування даних, при аналізі дискретних сигналів, знаходженні трендів тимчасових рядів.
Ключові слова: дискретні ортогональні функції, ортогональні дискретні перетворення, кінцеві різниці, цифрова обробка сигналів.

Введение

В цифровой обработке сигналов используется класс дискретных ортогональных функций. Например: функции Радемахера, функции Хаара, функции Уолша и др. Соответственно на основе этих и других функций реализуются различные ортогональные дискретные преобразования, такие как дискретное преобразование Фурье (ДПФ), преобразование Уолша-Адамара (ПУА), обобщенное преобразование, преобразование Хаара, пилообразное преобразование, дискретное косинусное преобразование и различные их модификации [1]. В основном эти преобразования производятся над векторами длиной $N = 2^n$; где n – целое число.

В данной статье рассматривается набор дискретных ортогональных функций произвольной длины, имеющих ряд свойств, таких как: целочисленность, быстрая сходимость.

Цель работы – формирование новой группы дискретных симметричных функций, позволяющих производить разложение исследуемой функции в ряд по конечным разностям.

Определение конечных разностей дискретной функции

Предположим нужно найти конечную разность 1-го порядка для дискретной функции $X(n)$, где $n = 0 \ldots N$. Эту задачу можно решить, используя формулу:

$$\Delta X(n) = X(n+1) - X(n). \qquad (1)$$

Соответственно для конечной разности 2-го, 3-го и т.д. порядка можно записать:

$$\begin{aligned}
&\Delta X^2(n) = \Delta X(n+1) - \Delta X(n) = X(n+2) - 2 \cdot X(n+1) + X(n) \\
&\Delta X^3(n) = \Delta^2 X(n+1) - \Delta^2 X(n) = X(n+3) - 3 \cdot X(n+2) + 3 \cdot X(n+1) - X(n) \qquad (2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Delta X^k(n) \approx \Delta^{k-1} X(n+1) - \Delta^{k-1} X(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_j^k \cdot X(n+k-j),
\end{aligned}$$

где C_j^k – биноминальные коэффициенты Ньютона.

Введем следующие обозначения:

W_n – квадратная матрица размером $(n+1)\times(n+1)$, строки которой представляют собой взаимно ортогональные дискретные функции, или другими словами матрица есть система ортогональных функций;

W_n^i – i-ая вектор-строка матрицы, где $I = 0 \ldots n$, то есть некоторая дискретная функция;

$W_n^i(j)$ – j-й элемент вектор-строки W_n^i;

$w_n^i(z) = Z\{W_n^i(j)\} = \sum_{j=0}^{n} W_n^i(j) z^{-j}$ – z-преобразование от вектор-строки W_n^i.

Или другими словами конечные разности функции можно найти, применив операцию дискретной свертки функции с импульсной характеристикой звена вида:

$$w_n^n(z) \;\; = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot C_j^n \cdot z^{-j}. \qquad (3)$$

То есть, чтобы найти конечную разность, например 5-го порядка, импульсная характеристика звена определяется однозначно 6-ю коэффициентами:

$$W_5^5 = [1 \quad -5 \quad 10 \quad -10 \quad 5 \quad -1]. \tag{4}$$

В определении конечной разности 4-го порядка 6-ю коэффициентами появляется неоднозначность. То есть производную 4-го порядка можно найти произвольным количеством способов. Например:

$$W_5^4 = [1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \quad 0]\cdot k_1 + [0 \quad 1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1]\cdot k_2, \tag{5}$$

где k_1, k_2 – произвольные действительные числа, с условием $k_1 + k_2 = 1$; $[1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1] = W_4^4$ – импульсная характеристика звена, определяющая конечную разность 4-го порядка, 5-ю коэффициентами.

$$\begin{aligned} W_5^3 &= [1 \quad -3 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 0]\cdot k_1 + [0 \quad 1 \quad -3 \quad 3 \quad -1 \quad 0]\cdot k_2 + \ldots \\ &\ldots + [0 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 3 \quad -1]\cdot k_3, \end{aligned} \tag{6}$$

где $k_1 + k_2 + k_3 = 1$; $[1 \quad -3 \quad 3 \quad -1] = W_3^3$ и т.д.

Неопределенность в определении конечных разностей низших порядков можно использовать таким образом, чтобы получить набор ортогональных дискретных функций.

На данном этапе можно пренебречь условием нормировки $\left(\sum_i k_i = 1\right)$ и вернуться к нему впоследствии. Введем другое требование: k_i – целые числа.

Пользуясь формулами (5), (6), подбирая коэффициенты k_i, можно поучить следующий набор ортогональных дискретных целочисленных функций 5-го порядка.

$$W_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 5 & -1 & -4 & -4 & -1 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 4 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Матрица (7) есть множество функций, образующих ортогональную и полную систему. Свертка входного сигнала со строками матрицы даст на выходе шесть сигналов равных конечным разностям с точностью до постоянного коэффициента, усредненным на интервале ($n \ldots n+5$). Что немаловажно, все коэффициенты матрицы (7) целочисленные, и это облегчает вычисления.

Для нормировки, с целью получения на выходе системы усредненных значений производных, строки матрицы (7) необходимо умножить на соответствующие весовые коэффициенты

$$W_5 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/35 \\ 1/28 \\ 1/18 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 5 & -1 & -4 & -4 & -1 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 4 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Для нормировки, с целью получения системы ортонормированных функций строки матрицы (7), необходимо умножить на следующие весовые коэффициенты:

$$W_5 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{70} \\ 1/\sqrt{84} \\ 1/\sqrt{180} \\ 1/\sqrt{28} \\ 1/\sqrt{252} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 5 & -1 & -4 & -4 & -1 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 4 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Легко проверить, что: $W_5 \cdot W_5^T = I$, где I – единичная матрица, это свидетельствует о том, что система функций ортонормированна.

Алгоритм получения системы ортогональных функций

Рассмотрим алгоритм вычисления ортогональных функций на примере функций 6-го порядка. Как было сказано выше, функция со старшим порядковым номером вычисляется по формуле (3)

$$w_6^6(z) = \sum_{j=0}^{6} (-1)^j \cdot C_j^k \cdot z^{-j} = 1 - 6z^{-1} + 15z^{-2} - 20z^{-3} + 15z^{-4} - 6z^{-5} + z^{-6}$$

$$W_6^6 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Следующую функцию можно вычислить по формуле:

$$w_6^5(z) = k_1 \cdot w_5^5(z) + k_2 \cdot w_5^5(z) \cdot z^{-1}, \quad (11)$$

где $w_5^5(z) = \left(1 - 5z^{-1} + 10z^{-2} - 10z^{-3} + 5z^{-4} - z^{-5}\right)$;

k_1, k_2 – постоянные коэффициенты.

Очевидно, что функция со старшим порядковым номером либо симметрична относительно среднего коэффициента (для функций с четным верхним индексом), либо кососимметрична (для функций с нечетным верхним индексом). Для выполнения требований ортогональности, это правило должно выполняться и для других функций с меньшим порядковым номером. Следовательно, в формуле (9) коэффициенты $k_1 = k_2$ и, не забывая об условии, что все коэффициенты должны быть целыми числами, получаем: $k_1 = k_2 = 1$.

$$\begin{aligned} w_6^5(z) &= k_1\left(1 - 5z^{-1} + 10z^{-2} - 10z^{-3} + 5z^{-4} - z^{-5}\right) + \ldots \\ &\ldots + k_2\left(z^{-1} - 5z^{-2} + 10z^{-3} - 10z^{-4} + 5z^{-5} - z^{-6}\right) = 1 - 4z^{-1} + 5z^{-2} - 5z^{-4} + 4z^{-5} - z^{-6} \end{aligned} \quad (12)$$

$$W_6^5 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Для функции $W_6^4(z)$ можно записать:

$$w_6^4(z) = k_1 \cdot w_4^4(z) + k_2 \cdot w_4^4(z) \cdot z^{-1} + k_3 \cdot w_4^4(z) \cdot z^{-2}, \quad (13)$$

где $w_4^4(z) = \left(1 - 4z^{-1} + 6z^{-2} - 4z^{-3} + z^{-4}\right)$; k_1, k_2, k_3 – целочисленные коэффициенты, причем $k_1 = k_3$.

Из условия ортогональности (12):

$$W_n^i \cdot \left(W_n^j\right)^T = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j$$
$$W_n^i \cdot \left(W_n^j\right)^T \neq 0, \quad \text{если} \quad i = j \tag{14}$$

следует, что:

$$W_6^4 \cdot \left(W_6^6\right)^T = 0 \tag{15}$$

$$W_6^4 \cdot \left(W_6^5\right)^T = 0\,. \tag{16}$$

Условие (14) выполняется автоматически, так как функция W_6^4 должна быть симметричная, а W_6^5 – кососимметричная.

Из уравнения (11) и условия (13) можно записать:

$$\left(k_1\left(\left(1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \quad 0 \quad 0\right)+\left(0 \quad 0 \quad 1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1\right)\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+k_2\left(0 \quad 1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1 \quad 0\right)\right)\times\left(1 \quad -6 \quad 15 \quad -20 \quad 15 \quad -6 \quad 1\right)^T=\ldots$$
$$\ldots=\left(k_1+0k_2\right)\cdot 1+\left(-4k_1+k_2\right)\cdot\left(-6\right)+\left(7k_1-4k_2\right)\cdot 15+\left(-8k_1+6k_2\right)\cdot\left(-20\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(7k_1-4k_2\right)\cdot 15+\left(-4k_1+k_2\right)\cdot\left(-6\right)+\left(k_1+0k_2\right)\cdot 1=420k_1-252k_2=0$$

Выбираем k_1 и k_2 наименьшими положительными числами, получаем $k_1 = 3$, $k_2 = 5$, $k_3 = 3$, $W_6^4 = \left(3 \quad -7 \quad 1 \quad 6 \quad 1 \quad -7 \quad 3\right)$.

Аналогично для функции W_6^3

$$W_6^3 \cdot \left(W_6^6\right)^T = 0, \tag{17}$$

$$W_6^3 \cdot \left(W_6^5\right)^T = 0, \tag{18}$$

$$W_6^3 \cdot \left(W_6^4\right)^T = 0, \tag{19}$$

Условия (17) и (19) выполняется автоматически, так как функция W_6^3 должна быть кососимметричная, а W_6^4 и W_6^6 – симметричные. Составляем уравнение для W_6^3, находим коэффициенты

$$w_6^3(z) = k_1 \cdot w_3^3(z) + k_2 \cdot w_3^3(z) \cdot z^{-1} + k_3 \cdot w_3^3(z) \cdot z^{-2} + k_4 \cdot w_3^3(z) \cdot z^{-3}$$
$$k_1 = k_4,\; k_2 = k_3$$

$$\left(k_1\left(\left(1 \quad -3 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)+\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 3 \quad -1\right)\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+k_2\left(\left(0 \quad 1 \quad -3 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 0\right)+\left(0 \quad 0 \quad 1 \quad -3 \quad 3 \quad 1 \quad 0\right)\right)\right)\times\left(1 \quad -4 \quad 5 \quad 0 \quad -5 \quad 4 \quad -1\right)^T=\ldots$$
$$\ldots=\left(k_1+0k_2\right)\cdot 1+\left(-3k_1+k_2\right)\cdot\left(-4\right)+\left(3k_1-2k_2\right)\cdot 5+\left(0k_1+0k_2\right)\cdot 0+\left(-3k_1+2k_2\right)\cdot\left(-5\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(3k_1-k_2\right)\cdot\left(4\right)+\left(-k_1+0k_2\right)\cdot\left(-1\right)=56k_1-28k_2=0$$

Получаем: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$, $W_6^3 = \left(1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1\right)$.

Для функции W_6^2 необходимо уже решить систему уравнений

$$\begin{cases} W_6^2 \cdot \left(W_6^4\right)^T = 0 \\ W_6^2 \cdot \left(W_6^6\right)^T = 0 \end{cases}$$

$$w_6^2(z) = k_1 \cdot w_2^2(z) + k_2 \cdot w_2^2(z) \cdot z^{-1} + k_3 \cdot w_2^2(z) \cdot z^{-2} + k_4 \cdot w_2^2(z) \cdot z^{-3} + k_5 \cdot w_2^2(z) \cdot z^{-4}$$
$$k_1 = k_5,\; k_2 = k_4\,.$$

Решаем 1-е уравнение:

$$\left(k_1\left(\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\right)+\ldots\right.$$
$$\ldots+k_2\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\right)+\ldots$$
$$\left.\ldots+k_3\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}3 & -7 & 1 & 6 & 1 & -7 & 3\end{pmatrix}^T=36k_1-6k_2-10k_3=0.$$

Решаем 2-е уравнение:

$$\left(k_1\left(\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\right)+\ldots\right.$$
$$\ldots+k_2\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\right)+\ldots$$
$$\left.\ldots+k_3\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1\end{pmatrix}^T=56k_1-112k_2+70k_3=0.$$

В итоге получаем:

$$\begin{cases}36k_1-6k_2-10k_3=0\\56k_1-112k_2+70k_3=0\end{cases}$$

$$\frac{k_1}{k_3}=\frac{5}{12},\ \frac{k_2}{k_3}=\frac{10}{12}$$

$$k_1=5,\ k_2=10,\ k_3=12,\ k_4=10,\ k_5=5,\ W_6^2=\begin{pmatrix}5 & 0 & -3 & -4 & -3 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Для функции W_6^1:

$$k_1=3,\ k_2=5,\ k_3=6,\ k_4=6,\ k_5=5,\ k_6=3, W_6^1=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3\end{pmatrix}.$$

Для функции W_6^0:

$$k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=k_6=k_7=1,\ W_6^0=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Нормализация системы ортогональных дискретных функций.

С целью получения системы ортогональных функций для нахождения конечных разностей исследуемого ряда введем нормирующие коэффициенты:

$$N_{\text{ïðn}}^{\ i}=1\Big/\sum_{j=1}^{n+1}k_j\,, \tag{20}$$

где n – порядок системы функций, i – порядковый номер функции в системе, k_j – коэффициенты пропорциональности, процесс нахождения которых описан в предыдущем пункте.

Нормировочные коэффициенты для получения системы ортонормированных функций будут равны

$$N_{opm_n}^{\ i}=1\Big/\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1}\left(W_n^i(j)\right)^2} \tag{21}$$

где n – порядок системы функций, i – порядковый номер функции в системе, j – порядковый номер коэффициента функции W_n^i.

Свойства систем ортогональных дискретных функций

1 Сходимость

По сути, строки матриц W_n (8) есть функции для нахождения конечных разностей. Для дискретных рядов с сильной корреляцией нахождение конечных разностей аналогично нахождению производных для непрерывных функций. А разложение в базисе приведенных выше ортогональных функций, аналогично разложению по функциям Лежандра. Данное свойство будет характерно и для дискретных функций с сильной корреляцией.

2 Целочисленность

Из алгоритма получения системы ортогональных функций можно увидеть, что процедура расчета функции с порядковым номером $(2n)$ или $(2n+1)$ сводится к решению системы из n уравнений с $n+1$ неизвестными, нулевой правой частью и целочисленными коэффициентами. Перенеся $n+1$ столбец в правую часть, и решая полученную систему уравнений, например, методом Крамера, получим решение в виде n рациональных дробей со знаменателем, равным главному определителю (целое число), которые всегда можно привести к целым числам, умножив дроби на знаменатель.

3 Аппроксимация полиномами

W_n^i – i-ая строка (начиная с нулевой) системы ортогональных функций n-го порядка может быть аппроксимирована полиномом i-ой степени.

В общем виде процесс нахождения ортогональных функций можно представить следующей формулой:

$$w_n^i(z) = \sum_{j=0}^{n-i} k_j \cdot w_i^i(z) \cdot z^{-j}, \tag{22}$$

где $w_i^i(z)$ – z-преобразование от вектор-строки W_i^i (3), имеющей $i+1$ коэффициент. Как мы знаем, дискретная функция, имеющая $i+1$ отчетов, может быть аппроксимирована полиномом i-й степени. Следовательно, вектор W_n^i, являющийся линейной комбинацией смещенных друг относительно друга векторов W_i^i, так же аппроксимируется полиномом i-й степени.

Выводы

Рассмотрен алгоритм получения набора ортогональных дискретных функций. Предложенные функции имеют целочисленные коэффициенты, быструю сходимость и образуют полный ортогональный базис. Данные свойства позволяют эффективно применять описанные функции в системах сжатия данных, для нахождения трендов временных рядов, вейвлет-анализе и других видах цифровой обработки сигналов.

Ортогональные преобразования на основе данных функций по свойствам аналогичны разложению по функциям Лежандра для непрерывных функций, что может быть полезно при определении свойств исследуемых временных рядов.

Системы ортогональных функций 1 – 6 порядков, нормированных по производным и ортонормированных, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Порядок системы n	Система ортогональных дискретных целочисленных функций W_n	Вектор нормировочных коэффициентов	
		по производным	для ортонормированных функций
0	(1)	(1)	(1)
1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/10 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{20} \\ 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{20} \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/10 \\ 1/7 \\ 1/2 \\ 1/1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{70} \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 5 & -1 & -4 & -4 & -1 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & 4 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/35 \\ 1/28 \\ 1/18 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{70} \\ 1/\sqrt{84} \\ 1/\sqrt{180} \\ 1/\sqrt{28} \\ 1/\sqrt{252} \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 & -4 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -7 & 1 & 6 & 1 & -7 & 3 \\ 1 & -4 & 5 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/7 \\ 1/28 \\ 1/42 \\ 1/4 \\ 1/11 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{7} \\ 1/\sqrt{28} \\ 1/\sqrt{84} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{154} \\ 1/\sqrt{84} \\ 1/\sqrt{924} \end{pmatrix}$

Список литературы

1. Ахмед Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К. Р. Рао ; пер. с англ.; под ред. И. Б. Фоменко. – М. : Связь, 1980. – 248 с.
2. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер; пер. с англ. – М. : Техносфера, 2006. – 856 с.
3. Кузьмин О. В. Треугольник и пирамида Паскаля: свойства и обобщения / О. В. Кузьмин // Соросовский Образовательный Журнал. – 2000. – Т. 6, № 5. – С. 101-109.
4. Ландо С. К. Введение в дискретную математику / Ландо С. К. – М.: МЦНМО, 2014. – 264 с.
5. Пшекоп В. Ю. Метод вычисления коэффициентов импульсной характеристики оконных функций / В. Ю. Пшекоп // Проблемы искусственного интеллекта. – 2015. – № 0 (1). – С. 99-106.

References

1. Ahmed N., Rao K.R. Orthogonal transforms for digital signal processing.
2. Alan V. Oppenheim, Ronald W. Shafer. Digital signal processing. Prentice-Hall, Inc. Englewood cliffs, New Jersey
3. Kuzmin O. V. Pascal triangle and Pascal pyramid: some properties and generalizations // Sorosovskiy Educational Journal. – 2000. – V. 6, no. 5. – pp. 101-109.
4. Lando S. K. Introduction to discrete mathematics. M.: MCCME, 2014. – 264 p.
5. Pshekop V. Y. Method of calculating the coefficients of the impulse response window functions / V. Y. Pshekop // Problems of Artificial Intelligence. – 2015. – № 0 (1). – P. 99-106.

RESUME

V. J. Przekop

Symmetric Discrete Orthogonal Functions of Finite-Difference Series Expansion

Background: digital signal processing is now widely adopted in different areas of science and technology. In this connection the development of new methods of signal analysis and processing, in particular orthogonal discrete transformations with a series of new properties, becomes an urgent problem.

Materials and methods: a group of orthogonal discrete functions is obtained from Pascal pyramid through orthogonalization with the help of the Gram-Shmidt process.

Results: as a result we have discrete functions which allow us to expand the assumed function under analysis into finite-difference series. The series obtained after transformation are of rapid convergence for functions with strong correlation. The vectors of transformation matrix have integer coefficients, and the resultant functions represent partial derivatives of the assumed function averaged over a certain interval. The mentioned properties may be useful in certain areas of digital signal processing.

Conclusion: we develop an algorithm for obtaining a group of orthogonal discrete functions. The proposed functions have integer coefficients and rapid convergence, and form a complete orthogonal basis. These properties allow us to apply the described functions in the data-compression systems, calculation of trends for time series, wavelet analysis and other types of digital signal processing.

Статья поступила в редакцию 05.03.2016.