Л

УДК 62-50:519.7/8

В. И. Левин
Пензенский государственный технологический университет
440039, Россия, Пенза, пр. Байдукова, 1-а

ПОЛИИНТЕРВАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ

V. I. Levin
Penza State Technological University
440039, Russia, Penza, Baidukova ave.

POLYINTERVALS AND THEIR APPLICATION IN SYSTEM MODELING

В. И. Левин
Пензенський державний технологічний університет
440039, Росія, Пенза, пр. Байдукова, 1-а

ПОЛІІНТЕРВАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В МОДЕЛЮВАННІ СИСТЕМ

Статья посвящена разработке новой модели неопределенности (полиинтервал) и математических методов ее изучения. Предложено распространить на изучение полиинтервалов известный в интервальной математике метод изучения интервалов, базирующийся на определении алгебраических операций над интервалами в виде теоретико-множественных обобщений соответствующих операций над числами. Определена система алгебраических операций над полиинтервалами, выведены правила их выполнения. Приведен общий алгоритм изучения неопределенных систем с полиинтервальными параметрами.
Ключевые слова: интервал, полиинтервал, неопределенность, алгебра полиинтервалов.

Article is devoted to development of new model of uncertainty (polyinterval) and mathematical methods of studying it. It is proposed to extend the study of polyintervals by well-known methods of interval mathematics based on determination of algebraic operations on intervals in the form of set-theoretic generalization of operations on real numbers. The system of algebraic operations on polyintervals is determined, and rules for their implementation are derived, common algorithm of study of systems with uncertain parameters by polyintervals is given.
Keywords: interval value, polyinterval value, uncertainty, algebra of polyinterval values.

Стаття присвячена розробці нової моделі невизначеності (поліінтервал) і математичних методів її вивчення. Запропоновано поширити на вивчення поліінтервалів відомий в інтервальній математиці метод вивчення інтервалів, що базується на визначенні алгебраїчних операцій над інтервалами у вигляді теоретико-множинних узагальнень операцій над числами. Визначено систему алгебраїчних операцій над поліінтервалами, виведені правила їх виконання. Наведен загальний алгоритм вивчення невизначених систем з поліінтервальними параметрами.
Ключові слова: інтервал, поліінтервал, невизначеність, алгебра поліінтервалів.

Введение

Известно, что в период Второй Мировой войны в практику ведения военных действий западными странами (США, Англия, Канада) было введено множество новых технологий: обнаружение воздушных целей с помощью радаров, управление огнем зенитной артиллерии, шифровка и дешифровка информации в системах связи, атомное оружие и т.д. Все эти технологии в той либо иной степени были связаны с исследованием неопределенности, присущей любым военным действиям, и использовали соответствующие математические методы, в первую очередь, теорию вероятностей. После войны эти работы были продолжены и распространены во многих странах на гражданскую сферу – экономику, технику, социум. При этом расширилось понимание неопределенности, в нее стали включать не только случайность возможных исходов, но и их неединственность или незнание, дрейф переменных, семантическую неопределенность целей, многокритериальность при принятии решений, недоопределенность модели или структуры изучаемой системы и т.д. Новые подходы к описанию неопределенности изучаемых систем привели к появлению новых математических методов их изучения: теория нечетких множеств, многозначная логика, теория сверхслучайных процессов и др. Одним из наиболее популярных методов стала интервальная математика, занимающаяся изучением величин, определяемых с точностью до интервалов возможных значений [1], [2]. Но одиночные интервалы, являющиеся объектом изучения в интервальной математике, не охватывают всех ситуаций, встречающихся на практике. Например, неопределенный период времени, в течение которого возможно успешное проведение некоторой военной операции, может включать в себя несколько временных интервалов, скажем $([4^{00},5^{30}],[21^{00},23^{00}],[24^{00},2^{00}])$. Аналогично, участок пространства, в рамках которого возможно наблюдение некоторых объектов, может включать в себя несколько последовательных угловых интервалов, скажем $([15^{\circ},21^{\circ}],[28^{\circ},35^{\circ}],[48^{\circ},53^{\circ}],[56^{\circ},58^{\circ}]$. Очевидным образом на практике могут появляться и другие подобные примеры. Во всех таких примерах мы сталкиваемся с новыми неопределенными объектами, имеющими вид последовательностей интервалов неопределенности. Каждый объект такого вида естественно назвать полиинтервалом.

Настоящая статья полностью посвящена теории и возможным применениям полиинтервалов. Проблема исследования объектов, характеризуемых некоторой неопределенностью, возникла одновременно с появлением новых технологий, содержащих неопределенность. Эта ситуация сложилась в период Второй мировой войны. Соответствующими задачами на первом этапе занимались с позиции теории случайных процессов Н. Винер [3], А.Н. Колмогоров [4] и их ученики и последователи. Но широкое развитие исследований гражданских объектов в условиях неопределенности началось лишь в 1950-е – 1960-е гг. с позиций математической статистики и ее направлений – обработка данных и планирование экспериментов [5], [6]. В 1970-е – 80-е гг. пришло более широкое понимание неопределенности, включившее в себя не только случайность, но и неопределенность целей, незнание, неединственность возможных исходов, многокритериальность принятия решений. В связи с этим пришли новые подходы к описанию неопределенности: теория нечетких множеств, недоопределенность моделей, принятие решений в многокритериальных задачах [7-9]. А с 1980-х гг. стал интенсивно применяться подход, основанный на интервальной математике, позволяющий находить оценки характеристик неопределенных систем с гарантированной точностью [10-16]. Указанный подход применялся сначала в метрологии с целью определения интервального значения известной функции при интервальных значениях аргументов. Затем за рубежом этот подход развили как средство автоматического учета ошибок округления при численном решении задач на компьютерах, а в СССР и России – для нахождения области возможных значений результата вычислений с учетом структуры данных и функций, заданных символически.

Постановка задачи

Распространенный подход к изучению неопределенных систем, известный под названием интервальной математики [1], [2], строится на базе понятия интервала, трактуемого как множество всех возможных значений неполностью определенной величины $\tilde{a}$, задаваемой лишь ее нижней a_1 и верхней a_2 границами. Величину $\tilde{a}$ можно записать в виде следующего числового множества – ограниченного интервала неопределенности

$$\tilde{a} \equiv [a_1, a_2] = \{a \mid a_1 \le a \le a_2\}. \tag{1}$$

Здесь предполагается, что неизвестное «истинное» значение неопределенной величины $\tilde{a}$ достоверно находится в пределах интервала $[a_1, a_2]$, не выходя за его границы a_1 и a_2. При этом все значения величины $\tilde{a}$ в пределах указанного интервала предполагаются «равновозможными» в том смысле, что нет никаких оснований предпочитать одно значение другому. Заметим, что в данном случае понятие равновозможности не означает задание равномерного вероятностного или какого-либо иного равномерного распределения возможных значений величины $\tilde{a}$ внутри указанного интервала. Над интервалами вида (1) вводятся алгебраические операции, аналогичные соответствующим операциям над вещественными числами. Для этого используется следующая теоретико-множественная конструкция

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \{a \bullet b \mid a \in \tilde{a}, b \in \tilde{b}\}, \quad \circ\tilde{a} = \{\bullet a \mid a \in \tilde{a}\}. \tag{2}$$

т.е. любая операция над интервалами $\circ$ определяется на основе соответствующей операции над точными величинами $\bullet$, при условии, что конкретные значения этих величин пробегают все возможные значения из соответствующих интервалов. Из этого определения вытекают простые правила выполнения операций над интервалами:

$$\begin{gathered}
[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]; \\
[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]; \\
k \cdot [a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0; \end{cases} \\
[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j}(a_i \cdot b_j), \max_{i,j}(a_i \cdot b_j)]; \\
[a_1, a_2] / [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1], \text{ при } 0 \notin [b_1, b_2].
\end{gathered} \tag{3}$$

Мы продолжим развитие интервальной математики, введя понятие полиинтервала как последовательности непересекающихся одиночных интервалов неопределенности

$$\tilde{A} = (\tilde{a}, \tilde{b}, ..., \tilde{d}), \quad \text{где } \tilde{a}, \tilde{b}, ..., \tilde{d} \text{ – одиночные интервалы вида (1)}. \tag{4}$$

В выражении (4) предполагается, что каждый следующий одиночный интервал сдвинут вправо от предыдущего и не пересекается с ним.

Операции над полиинтервалами будем вводить аналогично операциям над интервалами, т.е. с помощью теоретико-множественной конструкции типа (2)

$$\tilde{A} \circ \tilde{B} = \{a \bullet b \mid a \in \tilde{A}, b \in \tilde{B}\}, \quad \circ\tilde{A} = \{\bullet a \mid a \in \tilde{A}\}. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{A}$ – полиинтервал вида (4), $\tilde{B}$ – другой полиинтервал того же вида, но с иными составляющими его одиночными интервалами вида (1). Задача настоящей работы заключается в том, чтобы на базе определения (5) операций над полиинтервалами вывести правила конструктивного выполнения указанных операций, аналогичные правилам (3) конструктивного выполнения операций над одиночными интервалами.

Математический аппарат

Будем представлять полиинтервалы вида (4) в теоретико-множественных терминах следующим образом:

$$\tilde{A} = \tilde{a} \cup \tilde{b} \cup \ldots \cup \tilde{d}\,. \tag{6}$$

Пусть заданы два полиинтервала $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ следующего вида:

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^{i}, \quad \tilde{B} = \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{b}^{j}\,, \tag{7}$$

где $\tilde{a}^{i} = [a_1^i, a_2^i],\ i = \overline{1,m}$ и $\tilde{b}^{j} = [b_1^j, b_2^j],\ j = \overline{1,n}$ – одиночные интервалы, в совокупности составляющие $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ соответственно. Требуется выполнить операцию $\circ$ над этими полиинтервалами. Согласно определению (5) имеем с учетом вида (7) полиинтервалов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$

$$\tilde{A} \circ \tilde{B} = \{a \bullet b \mid a \in \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^{i}, b \in \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{b}^{j}\}\,. \tag{8}$$

На основании ассоциативного закона алгебры множеств выражение (8) можно переписать следующим образом:

$$\tilde{A} \circ \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \{a \bullet b \mid a \in \tilde{a}^{i}, b \in \tilde{b}^{j}\}\,. \tag{9}$$

Однако, по определению (2), выражение в фигурных скобках формулы (9) равно $\tilde{a}^{i} \circ \tilde{b}^{j}$, так что окончательно получаем

$$\tilde{A} \circ \tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^{i} \circ \tilde{b}^{j}) \text{ или в развернутом виде } \left(\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^{i}\right) \circ \left(\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{b}^{j}\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (\tilde{a}^{i} \circ \tilde{b}^{j})\,. \tag{10}$$

Выражение для операции $\circ$ над одним полиинтервалом $\tilde{A}$ вида (7) имеет вид, аналогичный формуле (10)

$$\circ \tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{m} (\circ \tilde{a}^{i}) \text{ или в развернутом виде } \circ \left(\bigcup_{i=1}^{m} \tilde{a}^{i}\right) = \bigcup_{i=1}^{m} (\circ \tilde{a}^{i})\,. \tag{11}$$

Формулы (10), (11) сводят выполнение операций над полиинтервалами к выполнению операций над одиночными интервалами. Поскольку для последних имеются формулы конструктивного выполнения (3), путем совместного применения формул (3), (10), (11) решается и задача конструктивного выполнения операций над полиинтервалами.

Решение задачи

Установим сначала вид формулы, пригодной для конструктивного выполнения операции сложения полиинтервалов. Для этого подставим в исходную формулу (10) выражения для сумм интервалов (3) и учтем, что в этом случае операция $\circ$ есть сложение +, в результате получим искомую формулу в следующем виде

$$\tilde{A}+\tilde{B}=\bigcup_{i=1}^{m}[a_1^i,a_2^i]+\bigcup_{j=1}^{n}[b_1^j,b_2^j]=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}[a_1^i+b_1^j,a_2^i+b_2^j]. \qquad (12)$$

Аналогичным образом устанавливается формула для конструктивного выполнения операции вычитания полиинтервалов. Для этого в исходную формулу (10) подставляем выражения для разностей интервалов согласно формуле (3), при этом учитывая еще, что здесь операция $\circ$ есть вычитание –. В результате мы получаем формулу

$$\tilde{A}-\tilde{B}=\bigcup_{i=1}^{m}[a_1^i,a_2^i]-\bigcup_{j=1}^{n}[b_1^j,b_2^j]=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}[a_1^i-b_2^j,a_2^i-b_1^j]. \qquad (13)$$

Формула для конструктивного выполнения операции умножения полиинтервала на вещественное число находится аналогично. При этом используем выражение произведения интервала на число (3), а в качестве исходной формулы используем не формулу (10), а формулу (11). Находим

$$k\tilde{A}=k\left(\bigcup_{i=1}^{m}[a_1^i,a_2^i]\right)=\begin{cases}\bigcup_{i=1}^{m}[ka_1^i,ka_2^i], & k>0,\\ \bigcup_{i=1}^{m}[ka_2^i,ka_1^i], & k<0.\end{cases} \qquad (14)$$

Так же, как для выше найденных формул (12), (13) конструктивного выполнения операций сложения и вычитания полиинтервалов, находим формулы конструктивного выполнения операций умножения и деления полиинтервалов. При этом мы опираемся на правила умножения и деления интервалов (3), а в качестве исходной формулы снова используем формулу (10). В результате получаем формулу умножения полиинтервалов в виде

$$\bigcup_{i=1}^{m}[a_1^i,a_2^i]\cdot\bigcup_{j=1}^{n}[b_1^j,b_2^j]=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}[a_1^i,a_2^i]\cdot[b_1^j,b_2^j]=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}\left[\min_{s,q}(a_s^i b_q^j),\max_{s,q}(a_s^i b_q^j)\right] \qquad (15)$$

и формулу деления полиинтервалов в виде

$$\bigcup_{i=1}^{m}[a_1^i,a_2^i]\Big/\bigcup_{j=1}^{n}[b_1^j,b_2^j]=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}[a_1^i,a_2^i]\cdot[1/b_2^j,1/b_1^j]=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}\left[\min_{s,q}(a_s^i/b_q^j),\max_{s,q}(a_s^i/b_q^j)\right] \qquad (16)$$

$$\text{при } 0\notin[b_1^j,b_2^j], \quad j=\overline{1,n}.$$

Формулы (12) – (16) дают правила конструктивного выполнения всех введенных выше алгебраических операций над полиинтервалами путем сведения указанных операций к соответствующим хорошо известным операциям над одиночными интервалами.

Теперь алгоритм решения различных задач, возникающих при изучении систем с полиинтервальными характеристиками, можно представить следующим образом.

Шаг 1. Построение математической модели, представляющей решение поставленной задачи как расчет и анализ полиинтервальной функции F аргументов-полиинтервалов.

Шаг 2. Составление блок-схемы алгоритма расчета (анализа) полиинтервальной функции F по построенной модели.

Шаг 3. Вычисление (анализ), по имеющейся блок-схеме алгоритма, полиинтервальной функции F, с использованием выражений (12) – (16) выполнения различных операций над полиинтервалами. Заметим, что заключительной операцией во всех формулах является объединение интервалов, выполняемое известными методами выполнения теоретико-множественной операции объединения [19].

Пример. Работник служит в двух фирмах: A и B. Причем в фирме A его месячная заработная плата в зависимости от заказов фирмы оценивается в размере 10000 ± 1000 рублей или 15000 ± 1500 руб. В фирме B его месячная зарплата оценивается (также в зависимости от заказов) в размере либо 3000 ± 500 руб. либо 8000 ± 1000 руб. Необходимо оценить суммарную месячную зарплату работника.

Решение. *Шаг 1.* В фирме A первую зарплату работника можно представить как интервал $[a_1^1, a_2^1] = [9000, 11000]$, 2-ю – как интервал $[a_1^2, a_2^2] = [13500, 16500]$. Аналогично, в фирме B первую зарплату можно представить в виде интервала $[b_1^1, b_2^1] = [2500, 3500]$, а вторую – в виде интервала $[b_1^2, b_2^2] = [7000, 9000]$. Итак, месячную зарплату работника в фирмах A и B можно представить соответственно следующими полиинтервалами

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{2} [a_1^i, a_2^i] = [9000, 11000] \cup [13500, 16000], \; \tilde{B} = \bigcup_{j=1}^{2} [b_1^j, b_2^j] = [2500, 3500] \cup [7000, 9000].$$

Месячная суммарная заработная плата работника $\tilde{C}$ равна сумме его месячных зарплат в фирмах A и B, т.е. $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$. После подстановки значений $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ получаем

$$\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^{2} [a_1^i, a_2^i] + \bigcup_{j=1}^{2} [b_1^j, b_2^j] = ([9000, 11000] \cup [13500, 16500]) + ([2500, 3500] \cup [7000, 9000]).$$

Эта формула и есть математическая модель решения поставленной в примере задачи в виде вычисления суммы двух полиинтервалов.

Шаг 2. Блок-схема алгоритма вычисления функции-модели, найденной на шаге 1 очевидна и содержит одну ступень, на которой вычисляется сумма двух полиинтервалов.

Шаг 3. Находим полиинтервальную функцию-модель, полученную на шаге 1 алгоритма. Эта функция – сумма двух полиинтервалов, содержащих в себе каждый, в свою очередь, два одиночных интервала. По формуле (12) сложения полиинтервалов находим

$$\tilde{C} = \bigcup_{i=1}^{2} [a_1^i, a_2^i] + \bigcup_{j=1}^{2} [b_1^j, b_2^j] =$$
$$= [a_1^1 + b_1^1, a_2^1 + b_2^1] \cup [a_1^1 + b_1^2, a_2^1 + b_2^2] + [a_1^2 + b_1^1, a_2^2 + b_2^1] \cup [a_1^2 + b_1^2, a_2^2 + b_2^2],$$

что после подстановки численных значений переменных a_k^i, b_s^j дает

$$\tilde{C} = [9000 + 2500, 11000 + 3500] \cup [9000 + 7000, 11000 + 9000] \cup$$
$$\cup [13500 + 2500, 16500 + 3500] \cup [13500 + 7000, 16500 + 9000] =$$
$$= [11500, 14500] \cup [16000, 20000] \cup [16000, 20000] \cup [20500, 25500] =$$
$$= [11500, 14500] \cup [16000, 20000] \cup [20500, 25500].$$

Итак, суммарная месячная зарплата работника, в зависимости от заказов фирм $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, может лежать в интервалах $[11500, 14500]$ или $[16000, 20000]$, или $[20500, 25500]$ рублей либо, в иной записи, составлять 13000 ± 1500 или 18000 ± 2000 или 23000 ± 2500 рублей.

Обсуждение

Как было показано выше, дальнейшее принципиальное развитие известной концепции интервальной неопределенности параметров, процессов и систем, приводит к новому понятию полиинтервала, характеризующего более сложную неопределенность, имеющую вид последовательности одиночных интервалов неопределенности. Эта неопределенность принципиально отличается тем, что параметр системы не просто принимает какое-то, заранее неизвестное, значение внутри некоторого заданного интервала неопределенности, но и еще сначала выбирает какой-нибудь, заранее неизвестный, интервал неопределенности из нескольких заданных интервалов, внутри которого затем принимает какое-то, заранее неизвестное значение. Эта общая и более сложная модель неопределенности встречается очень часто в военном деле, экономике, технике, социальной сфере и иных областях и потому заслуживает изучения и разработки. Логично осуществлять это изучение и разработку, используя подходы интервальной математики [1], [2] и развивая их в направлении учета многоинтервальности. При этом естественно, что подобно тому, как интервальная математика базируется на алгебре интервалов, полиинтервальная математика базируется на алгебре полиинтервалов. Однако, в отличие от алгебры интервалов, в алгебре полиинтервалов нет простых зависимостей между сложностью (длиной) операндов и сложностью результата операции. Это обусловлено большей сложностью параметров, процессов и систем, описываемых алгеброй полиинтервалов. Отсутствие простых зависимостей, указанных выше, делает алгебру полиинтервалов достаточно сложной.

Заключение

В статье сформулирована задача изучения новой модели неопределенности – полиинтервала, обобщающей известную модель неопределенности – интервал – на случай существования области из нескольких последовательных интервалов неопределенности. С помощью известной из интервальной математики теоретико-множественной конструкции, вводящей операции над полиинтервалами аналогично операциям над интервалами, определены операции над полиинтервалами. Разработана методика сведения операций над полиинтервалами к операциям над интервалами, и с ее помощью выведены формулы для конструктивного выполнения всех операций над полиинтервалами и построен соответствующий алгоритм. На примере из сферы экономики проиллюстрирована практическая польза разработанной теории и методов.

Список литературы

1. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М : Мир, 1987.
2. Левин, В. И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности [Текст] / В. И. Левин. – Пенза : Изд-во Пензенского технологического ин-та, 1998. – 55 с.
3. Wiener, N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series [Текст] / Wiener N. – N.Y. : Technology Press and Wiley, 1949. – 180 p. (рассекреченный отчет 1942 года).
4. Колмогоров, А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей [Текст] / А. Н. Колмогоров // Известия АН СССР. Математика. – 1941. – № 5. – С. 3–14.
5. Налимов, В. В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов [Текст] / В. В. Налимов, Н. А. Чернова. – М. : Наука, 1965. – 340 с.
6. Налимов, В. В. Теория эксперимента [Текст] / В. В. Налимов, Н. А. Чернова. – М. : Наука, 1971. – 320 с.
7. Заде, Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений [Текст] / Заде Л. А. – М. : Мир, 1976. – 176 с.

8. Нариньяни, А. С. Недоопределенность в системе представления и обработки знаний [Текст] / А. С. Нариньяни // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 5. – С. 17–25.
9. Hyvonen, E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach [Text] / E. Hyvonen // Artificial Intelligence. – 1992. – Vol. 58. – P. 19.
10. Moore, R. E. Interval Analysis [Text] / R. E. Moore. – N.Y. : Prentice-Hall, 1966. – 230 p.
11. Алефельд, Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. : Мир, 1987. – 360 с.
12. Канторович, Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений [Текст] / Л. В. Канторович // Сибирский математический журнал. – 1962. –Т. 3, № 5.
13. Вощинин, А. П. Оптимизация в условиях неопределенности [Текст] / А. П. Вощинин, Г. Р. Сотиров. – М. : МЭИ–Техника, 1989. – 226 с.
14. Вощинин, А. П. Интервальный анализ данных [Текст] / А. П. Вощинин, А. Ф. Бочков, Г. Р. Сотиров // Заводская лаборатория. – 1990. – № 7. – С. 76–81.
15. Куржанский, А. Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок [Текст] / А. Б. Куржанский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 75–89.
16. Вощинин, А. П. Интервальный метод калибровки [Текст] / А. П. Вощинин // Датчики и системы. – 2000. – № 7. – С. 63–69.
17. Левин, В. И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности [Текст] / В. И. Левин. – Пенза : Изд-во Пензенского технологического ин-та, 1999. – 101 с.
18. Левин, В.И. Оптимизация в условиях интервальной неопределенности. Метод детерминизации [Текст] / В. И. Левин // Автоматика и вычислительная техника. – 2012. – № 4. – С. 157–163.
19. Столл, Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории [Текст] / Столл Р. Р. – М. : Просвещение, 1968. – 232 с.

References

1. Alefeld G., Khertsberger J. *Introduction to interval computations.* Academic Press, 1983.
2. Levin V. I. *Interval'naya matematika i issledovaniye sistem v usloviyakh neopredelennosti* [Interval Mathematics and System Study in Terms of Uncertainty]. Penza, Penza Technological Institute Publ., 1998. 55 p.
3. Wiener N. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. N.Y., Technology Press and Wiley, 1949. 180 p. (declassified report of 1942).
4. Kolmogorov A. N. Interpolirovaniye I extrapolirovaniye stacionarnih sluchainih posledovatelnostey [Interpolation and Extrapolation of Stationary Random Sequences]. *Izvestia of Academy of Science of USSR. Mathematics*,1941, no. 5, pp. 3–14.
5. Nalimov V. V., Chernova N. A. *Statisticheskie metody planirovania ekstremal'nyh eksperimentov* [Statistic Methods of Planning Extreme Experiments]. Moscow, Nauka, 1965. 340 p.
6. Nalimov V. V., Chernova N. A. *Teoria eksperimenta* [Experiment Theory]. Moscow, Nauka, 1971. 320 p.
7. Zadeh L. A. *Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*. Russ. ed., Moscow, Mir Publ., 1976. 176 p.
8. Narin'yani A. S. Nedoopredelennost' v sisteme predstavleniya i obrabotki znaniy [Underspecification in the System of Knowledge Representation and Reasoning]. / A. S. Narin'yani // *Izvestia of Academy of Science of USSR. Engineering cybernetics*, 1986, no. 5, pp. 17–25.
9. Hyvonen E. Constraint Reasoning Based on Interval Arithmetic: the Tolerance Propagation Approach. *Artificial Intelligence*, 1992, vol. 58, p. 19.
10. Moore R. E. *Interval Analysis*. N.Y., Prentice-Hall, 1966. 230 p.
11. Alefeld G., Khertsberger J. *Introduction to interval computations.* Academic Press, 1983.
12. Kantorovich L. V. O nekotorykh novykh podkhodakh k vychislitel'nym metodam i obrabotke nablyu-deniy [On Some New Approaches to Camputational Methods and the Processing of Observations]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1962, vol. 3, no. 5.
13. Voshchinin A. P., Sotirov G. R. *Optimizatsiya v usloviyakh neopredelennosti* [Optimization in Terms of Uncertainty]. Moscow, MEI–Tekhnika Publ., 1989. 226 p.
14. Voshchinin A. P., Bochkov A. F., Sotirov G. R. Interval'nyy analiz dannykh [Interval Data Analysis]. *Zavodskaya laboratoriya*, 1990, no. 7, pp. 76–81.

15. Kurzhanski A. B. Zadacha identifikatsii – teoriya garantirovannykh otsenok [Identification Problems – the Theory of Guaranteed Estimates]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1991, no. 4, pp. 75–89.
16. Voshchinin A. P. Interval'nyy metod kalibrovki [Interval Calibration Method]. *Datchiki i sistemy* [Sensors and Systems], 2000, no. 7, pp. 63–69.
17. Levin V. I. *Interval'nie metody optimizatsii sistem v usloviyah neopredelennosti* [Interval Methods of Optimization in Condition of Uncertainty]. Penza : Penza Technological Institute Publ., 1999. 101 p.
18. Levin V.I. Optimizatsia v usloviyah interval'noy neopredelennosti. Metod determinizatsii [Optimization in Terms of Interval Uncertainty: The Determinization Method]. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika* [Automation and Remote Control], 2012, no. 4, pp. 157–163.
19. Stoll R. R. *Sets, Logic and Axiomatic Theories.* San Francisco, Freeman, 1961. 206 p.

RESUME

V. I. Levin

Polyintervals and Their Application in System Modeling

Background. In recent decades there are more and more new technologies in the military and civil spheres which are associated with studying of uncertainty. These technologies are widely used in engineering, economics and social sphere. To support them some new mathematical models and methods are needed. In this regard, the article is dedicated to the development of new model of uncertainty (polyinterval) and relevant mathematical methods of its studying.

Materials and methods. To accomplish this goal we propose to extend the study of polyintervals by a method of interval mathematics based on the determination of algebraic operations on intervals in form of set-theoretic generalizations of operations on real numbers.

Results. The article provides a detailed development of a new mathematical model of uncertainty – polyinterval. A system of algebraic operations on polyintervals is determined, and rules for their implementation are derived. The algorithm of study of uncertain systems with polyinterval parameters is given.

Conclusion. The article suggests a new mathematical model of uncertainty in the form of systems of polyintervals, along with the mathematical tools allowing to perform various operations on polyinterval values and thereby enabling them to perform mathematical modeling of uncertain systems.

Статья поступила в редакцию 03.07.2016.