П

УДК 004.8

В. Ю. Пшекоп, В. М. Зуев, Н. Н. Свиридова
Государственное учреждение «Институт проблем искусственного интеллекта», г. Донецк
283048, г. Донецк, ул. Артема, дом 118 б

ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА

V. J. Przekop, V. M. Zyev, N. N. Sviridova
Public institution «Institute of Problems of Artificial intelligence», Donetsk
283048, Donetsk, Artema st., 118 b

DISCRETE ORTHOGONAL FUNCTIONS ON THE BASIS OF HERMITE POLYNOMIALS

В. Ю. Пшекоп, В. М. Зуєв, Н. М. Свірідова
Державна установа «Інститут проблем штучного інтелекту», м. Донецьк
283048, м. Донецьк, вул. Артема, буд. 118 б

ДИСКРЕТНІ ОРТОГОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІВ ЕРМІТА

В статье вводятся симметричные дискретные ортогональные функции, полученные на основе непрерывных функций Эрмита. Эти функции могут быть применены в цифровой обработке сигналов, в системах сжатия данных, при анализе дискретных сигналов, теории вероятности и математической статистике.
Ключевые слова: дискретные ортогональные функции, ортогональные дискретные преобразования, конечные разности, полиномы Эрмита, цифровая обработка сигналов.

The paper examines a new group of symmetric discrete orthogonal functions obtained on the basis of the Hermite continuous functions. These functions can be applied to digital signal processing, data compression systems, analysis of digital signals, probability theory and statistics.
Keywords: discrete orthogonal functions, discrete orthogonal transformations, finite differences, Hermite polynomials, digital signal processing.

У статті вводяться симетричні дискретні ортогональні функції, отримані на основі безперервних функцій Ерміта. Ці функції можуть бути застосовані в цифровій обробці сигналів, в системах стиснення даних, при аналізі дискретних сигналів, теорії ймовірності та математичної статистики.
Ключові слова: дискретні ортогональні функції, ортогональні дискретні перетворення, кінцеві різниці, поліноми Ерміта, цифрова обробка сигналів.

Введение

В цифровой обработке сигналов используется класс дискретных ортогональных функций. Например: функции Радемахера, функции Хаара, функции Уолша и др. Соответственно на основе этих и других функций реализуются различные ортогональные дискретные преобразования, такие как дискретное преобразование Фурье, преобразование Уолша-Адамара, обобщенное преобразование, преобразование Хаара, пилообразное преобразование, дискретное косинусное преобразование и различные их модификации [1]. В основном эти преобразования производятся над векторами длиной $N = 2^n$; где n – целое число.

В данной статье рассматриваются дискретные ортогональные функции произвольной длины, причем длина функций не обязательно равна $N = 2^n$; где n – целое число.

Цель работы – формирование новой группы дискретных симметричных функций, позволяющих производить разложение исследуемой функции в ряд по конечным разностям, а также разработка способа нахождения дискретного аналога функций Эрмита.

Дискретные функции на основе полиномов Эрмита получаем из следующих выражений.

Полиномы Эрмита определяются выражением [5], [6]:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}. \tag{1}$$

Для действительных значений *x*, они ортогональны с весовой функцией e^{-x^2} на интервале $(-\infty, \infty)$. То есть:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}. \tag{2}$$

Введем функцию: $G_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тогда видно, что $G_n(x)$ ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_n(x) G_m(x) dx = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}. \tag{3}$$

Функция $G_n(x)$ имеет вид:

$$G_n(x) = \frac{(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\left(e^{\frac{-x^2}{2}} \right)^2 \right)}{e^{\frac{-x^2}{2}}}. \tag{4}$$

Получим дискретные ортогональные функции, базируясь на (4). В формуле (4) заменим непрерывные математические функции и операции их дискретными аналогами.

А именно:

– дискретным аналогом функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$ можно считать биноминальное распределение с вероятностями $p=q=0.5$

$$P_n(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!2^n} = C_n^k \frac{1}{2^n} \tag{5}$$

где $k=0,\dots,n$, сходится к нормальному распределению при $n \to \infty$

$$P_n(k) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{2(k-0.5n)^2}{n}} \tag{6}$$

Не трудно видеть, что функция $P_n(k)$ имеет максимум при $k = 0{,}5n$, в отличие от формулы $e^{-\frac{x^2}{2}}$, которая имеет максимум при $x = 0$. Но, как будет показано далее, это отличие не принципиально, так как эти функции всегда можно центрировать и промасштабировать.

Всюду далее будем считать, что обозначение $n!$ есть:

$$n! = \begin{cases} 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n & n>0 \\ 1 & n=0. \\ \infty & n<0 \end{cases} \tag{7}$$

Тогда очевидно, что

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} & k \le n \\ 0 & k>n \end{cases}. \tag{8}$$

Строго говоря, запись в (7) для отрицательных n не совсем корректна, так как в окрестности этих значений функция может иметь разные знаки. Однако легко видеть, что в (8) это уже не имеет никакого значения.

Введем матрицу $\mathbf{R}$, такую, что:

$$\mathbf{R} = r_{n,m} = \left(C_{N-n}^m\right)^2, \tag{9}$$

где: $n=0,\dots,N$, $m=0,\dots,N$.

Здесь N – количество точек, на которых мы строим дискретный аналог функции Эрмита.

Основываясь на выражении (4), составим дробь, в числителе будет дискретная производная от $\mathbf{R}$. Взятие производной n-го порядка можно заменить нахождением соответствующей конечной разности, или (что идентично) дискретной сверткой строк матрицы (9) со строками матрицы $\mathbf{S}$ следующего вида:

$$\mathbf{S} = s_{n,m} = C_n^m (-1)^m, \tag{10}$$

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & -C_{n-1}^{n-3} & \dots & 0 \\ 1 & -C_{n}^{n-1} & C_{n}^{n-2} & -C_{n}^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Результатом свертки матриц $\mathbf{S}$ и $\mathbf{R}$ будет матрица $\mathbf{T}$, каждый элемент которой определяется следующим выражением:

$$\mathbf{T} = t_{n,m} = \left(C_{N-n}^{m}\right)^2 \cdot C_n^m - \left(C_{N-n}^{(m+1)\bmod N}\right)^2 \cdot C_n^{(m+1)\bmod N} + \dots$$
$$+\left(C_{N-n}^{(m+N)\bmod N}\right)^2 \cdot C_n^{(m+N)\bmod N} (-1)^m =$$
$$= \sum_{j=0}^{N} \left(C_{N-n}^{(m+j)\bmod N}\right)^2 \cdot C_n^{(m+j)\bmod N} \cdot (-1)^m = \qquad (12)$$
$$= \sum_{j=0}^{N} \frac{\left((N-n)!\right)^2 n!(-1)^m}{\left(N-m-(m+j)\bmod N\right)! \cdot \left(\left((m+j)\bmod N\right)!\right)^2 \cdot \left(n-(m+j)\bmod N\right)! \cdot \left((m+j)\bmod N\right)!}$$

Например, для N=5 матрица $\mathbf{T}$ примет вид:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 8 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -8 & -8 & 7 & 1 \\ 1 & 15 & 20 & -20 & -15 & -1 \\ 1 & 25 & 100 & 100 & 25 & 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Матрица $\mathbf{T}$ фактически состоит из дискретного аналога функций Гаусса и его первых n = 5 (для данного примера) производных, расположенных в инверсном порядке.

Для получения дискретных функций Эрмита достаточно разделить каждый элемент матрицы $\mathbf{T}$ на C_N^m

$$\mathbf{U}_{n,m} = \frac{\mathbf{T}_{n,m}}{C_N^m}, \quad m = 0 \dots N, \qquad n = 0 \dots N, \qquad (14)$$

$$u_{n,m} = \sum_{j=0}^{N} \frac{\left((N-n)!\right)^2 n!(-1)^m}{\left(N-m-(m+j)\bmod N\right)! \cdot \left(\left((m+j)\bmod N\right)!\right)^2 \cdot \left(n-(m+j)\bmod N\right)! \cdot \left((m+j)\bmod N\right)!} \cdot \frac{(N-m)!m!}{N!} \qquad (15)$$

Для случая N = 5 матрица **U** выглядит так:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3/5 & 2/10 & 2/10 & -3/5 & 1 \\ 1 & 1/5 & -8/10 & 8/10 & -1/5 & -1 \\ 1 & 7/5 & -8/10 & -8/10 & 7/5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Из (12) видно, что коэффициенты матрицы представляют собой рациональные дроби. Таким образом, всегда можно найти такие постоянные коэффициенты, доможив на которые строки, можно получить целочисленную матрицу.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & -4 & 4 & -1 & -5 \\ 5 & 7 & -4 & -4 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Очевидно, что матрица (14) является ортогональной так же, как ортогональны их непрерывные аналоги (4). При достаточно большом размере матрицы (14), дискретные функции, т.е. в данном случае строки матрицы, сходятся к своим непрерывным аналогам – функциям Эрмита с точностью до масштабирующих коэффициентов.

Нетрудно видеть, что можно ввести матрицу **V**, такую, что:

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}\left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T\right)^{-1} \tag{18}$$

Тогда вводимые нами функции будет не только ортогональны, но и ортонормированные, так как:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T = \mathbf{E} \tag{19}$$

где: Е – матрица, у которой стоят единицы по главной диагонали, а остальные элементы равны нулю.

Выше был приведен пример для дискретных функций 5-го порядка. Таким же образом можно получить набор ортогональных функций произвольного порядка.

На рис. 1, в качестве примера, показан полином Эрмита 10-го порядка, описываемый уравнением:

$$H_{10} = 1024\tilde{x}^{10} - 23040\tilde{x}^{8} + 161280\tilde{x}^{6} - 403200\tilde{x}^{4} + 302400\tilde{x}^{2} - 30240 \tag{20}$$

с весовым окном $w(\tilde{x}) = A \cdot e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2}}$, где $\tilde{x} = x\frac{\sqrt{N}}{2}$ – нормированный аргумент полинома Эрмита; $A = \dfrac{\sqrt{2}}{30240 \cdot \sqrt[4]{N \cdot \pi}}$ – нормировочный коэффициент; N =320 – порядок матрицы дискретных аналогов функций Эрмита.

Маркерами на рисунке отмечены значения нормированного вектора $\mathbf{U}_{320}^{10}$ коэффициентов матрицы дискретных аналогов функций Эрмита.

Как видно из рис. 1, при больших значениях k появляются видимые расхождения между функциями Эрмита и ее дискретным аналогом. Эти расхождения определяются неточностями в формуле (6) и расхождениями между непрерывной и дискретными производными (особенно высших порядков).

Проведенный анализ подобных графиков показал, что с ростом N расхождение между непрерывными функциями Эрмита и их дискретными аналогами уменьшается. Но главным преимуществом введенных функций является то, что при любых значениях N, когда расхождения заметны, матрица $\mathbf{U}$ все равно остается ортогональной.

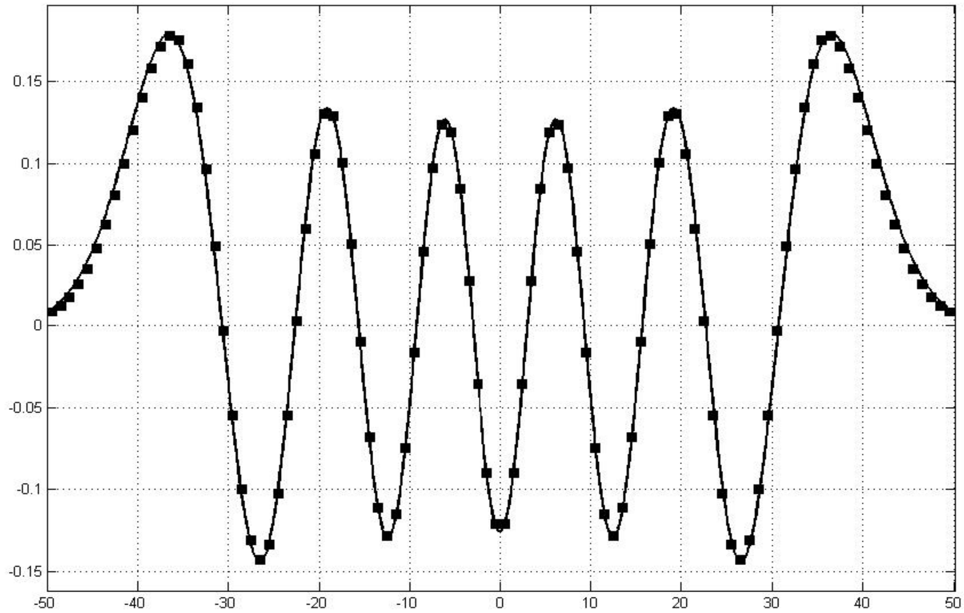

Рисунок 1 – Полином Эрмита 10-го порядка с весовым окном (сплошная линия) и его дискретный аналог (маркеры)

Интересно отметить, что если четные столбцы матрицы $\mathbf{U}$ домножить на – 1, мы получим ортогональную матрицу. У этой матрицы так же есть непрерывный аналог – функции Лежандра 1-го рода. Таким образом, существует некоторая связь некоторое тривиальное преобразование, позволяющее из дискретных аналогов функций Эрмита, получить дискретные аналоги функций Лежандра.

Выводы

В настоящее время в цифровой технике часто пользуются приближенными функциями Эрмита, получаемыми простым усечением непрерывной функции. Такие приближения не дают строгой ортогональности. В цифровой обработке сигналов наличие ортогональности часто является более важным фактором, чем точность аппроксимации функции.

В работе предложен способ нахождения дискретных симметричных функций, являющихся дискретными аналогами функций Эрмита.

В отличие от других способов нахождения дискретных функций, близких по свойствам к непрерывным функциям Эрмита, предложенный способ отличается тем, что при любой точности аппроксимации эти дискретные функции остаются строго ортогональными.

Список литературы

1. Пшекоп, В. Ю. Симметричные дискретные ортогональные функции для разложения в ряд по конечным разностям [Текст] / В. Ю. Пшекоп // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ «ИПИИ». – 2016. – № 1(2). – С. 64–72.
2. Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов [Текст] / Н. Ахмед, К. Р. Рао ; под ред. И. Б. Фоменко ; пер. с англ. – М. : Связь, 1980. – 248 с.
3. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов [Текст] / А. Оппенгейм, Р. Шафер; пер. с англ. – М. : Техносфера, 2006. – 856 с.
4. Кузьмин, О. В. Треугольник и пирамида Паскаля: свойства и обобщения [Текст] / О. В. Кузьмин // Соросовский Образовательный Журнал. – 2000. – Т. 6, № 5. – С. 101–109.
5. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Т. 2 : Функции Бесселя, Функции параболического цилиндра, Ортогональные многочлены. – М. : «Наука», 1974. – 296 с. : илл.
6. Янке, Е. Специальные функции [Текст] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1964.

References

1. Przekop V. J. Symmetric discrete orthogonal functions of finite-difference series expansion. *Problems of Artificial Intelligence*, Donetsk : PI "IPAI", 2016, no. 1(2), pp. 64-72.
2. Ahmed N., Rao K. R. *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*. Heidelberg, Springer, 1975.
3. Oppenheim A. V., Schafer R. W. *Discrete-time Signal Processing*. New Jersey, Prentice Hall, 1999.
4. Kuzmin O. V. Pascal Triangle and Pascal Pyramid : some properties and generalizations. *ISSEP*, 2000, vol. 6, no. 5, pp. 101-109.
5. Bateman H., Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms*, Vol. 2, New York, McGraw Hill, 1954.
6. Janke G., Emde F., Losch F. *Tafeln Hoherer Functionen*. B.G., Stuttgart, Teubner Verlagsgesellschaft, 1960.

RESUME

V. J. Przekop, V. M. Zyev, N. N. Sviridova

Discrete Orthogonal Functions on the Basis of Hermite Polynomials

Background: digital signal processing assumes different systems of discrete orthogonal functions to be used. Often necessary ones are usually based on the Hermite polynomials.

Materials and method: discrete orthogonal functions of arbitrary length, with the function length is not obligatory $N = 2^n$, where n is integer, are considered. The paper introduces the generation of a new group of discrete symmetric functions, allowing the finite-difference series expansion of a function under consideration; as well as the development of a method for finding discrete analogs of the Hermite functions.

Results: the main peculiarity of introduced function is that the matrix **U** is always orthogonal for any value N when divergence is noticeable. There is a connection (some kind of trivial transformation) turning discrete analogs of the Hermite functions into discrete analogs of the Legendre functions.

Conclusion: The presence of orthogonality in discrete signal processing is more important factor than accuracy of function approximation. Unlike the other methods for finding discrete functions similar to the continuous Hermite functions, the proposed method strictly provides the orthogonality of discrete functions for any approximation accuracy.

Статья поступила в редакцию 04.07.2016.