Л

УДК 62-50:6197/8

В. И. Левин, Е. А. Немкова
Пензенский государственный технологический университет
440039, г. Пенза, пр. Байдукова/ул.Гагарина, 1а/11

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

V. I. Levin, E. A. Nemkova
Penza State Technological University
440039, Penza, proezd Baidukova/ Gagarina st., 1a / 11

INTERVAL EQUATIONS AND THEIR SOLUTION

В. І. Левін, Е. А. Немкова
Пензенський державний технологічний університет
440039, м. Пенза, пр. Байдукова / вул.Гагаріна, 1а / 11

ІНТЕРВАЛЬНІ РІВНЯННЯ І ЇХ ВИРІШЕННЯ

В статье предложен новый метод решения интервальных уравнений, основанный на аппарате интервальной математики. Предложенный в статье метод заключается в использовании эквивалентных преобразований обеих частей интервального уравнения по законам интервальной математики, позволяющих перейти от интервального уравнения к обычным детерминированным уравнениям и их последующему решению известными методами.
Ключевые слова: интервал, интервальная функция, интервальное уравнение, множественный метод, интервальный метод.
.
A new method for solving interval equations based on the apparatus of interval mathematics is proposed in the article. The method proposed in the article consists in using equivalent transformations of both parts of the interval equation according to the laws of interval mathematics that allow one to move from the interval equation to the ordinary deterministic equations and their subsequent solution by known methods.
Key words: interval, interval function, interval equation, multiple method, interval method.

У статті запропоновано новий метод вирішення інтервальних рівнянь, заснований на апараті інтервального математики. Запропонований в статті метод полягає в використанні еквівалентних перетворень обох частин інтервального рівняння за законами інтервального математики, що дозволяють перейти від інтервального рівняння до звичайних детермінованим рівнянням і їх подальшого вирішення відомими методами.
Ключові слова: інтервал, інтервальна функція, інтервальний рівняння, множинний метод, інтервальний метод.

Введение

Современная наука и практика успешно справляются с задачами исследования систем с полностью определенными параметрами. Они формулируются как задачи расчета, анализа и синтеза различных функций с детерминированными параметрами, служащих характеристиками изучаемых систем. Но на практике чаще встречаются системы с неполностью определенными параметрами. Причины появления таких систем – естественная неопределенность реальных процессов, происходящих в системах; неточное задание параметров большинства систем из-за погрешности при их вычислении или измерении; изменение во времени параметров систем; необходимость совместного исследования семейств однотипных систем, имеющих сходные функции – характеристики и различающихся лишь значениями параметров этих функций. Исследование введенных неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих характеристиками данных систем. Эти задачи сложнее их упомянутых выше детерминированных аналогов, которые приходится решать при исследовании систем с детерминированными параметрами. Это усложнение – результат того, что алгебра недетерминированных чисел всегда сложнее алгебры детерминированных чисел.

В настоящей работе рассматриваются задачи нахождения корней интервальных уравнений. Эти уравнения отличаются от обычных (полностью определенных) уравнений тем, что их параметры – неполностью определенные, и задаются в виде интервалов возможных значений. Интервальные уравнения встречаются на практике, например, в задачах оптимизации систем в условиях неопределенности, при нахождении критических точек характеристик и точек пересечения характеристик неполностью определенных (эмпирических) моделей и т.д.

Постановка задачи

Рассмотрим обычное (детерминированное) уравнение с одной переменной

$$f(P,x)=0 \quad . \tag{1}$$

Здесь f – некоторая детерминированная функция, x – детерминированная переменная, P – детерминированный вектор параметров вида

$$P=(p,q,...,s). \tag{2}$$

Если заменить в уравнении (1) детерминированный вектор параметров P вектором параметров $\tilde{P}$ вида

$$\tilde{P}=(\tilde{p},\tilde{q},...,\tilde{s}),$$

где $\tilde{p}=[p_1,p_2]$, $\tilde{q}=[q_1,q_2],...,$ $\tilde{s}=[s_1,s_2]$ – интервальные параметры, то детерминированная функция f перейдет в соответствующую интервальную функцию $\tilde{f}=[f_1,f_2]$, а вещественное число 0 – в соответствующее интервальное число $\tilde{0}=[0,0]$. В результате детерминированное уравнение (1) перейдет в интервальное уравнение вида

$$\tilde{f}(\tilde{P},x)=\tilde{0}. \tag{3}$$

Уравнение (3) и будет объектом нашего изучения. Основной задачей этого изучения является нахождение корня (множества корней) уравнения (3), т.е. значений переменной x, которые обращают значение левой части уравнения в значение его правой части, т.е. в интервальный нуль $\tilde{0}$. Эта задача, в отличие от задачи решения обычного уравнения, носит неоднозначный характер. Это связано с тем, что пересечение интервальных кривых, определяющее корни интервального уравнения (3), может пониматься в различных смыслах. Этот эффект не возникает при пересечении обычных кривых, с которым связано решение обычного уравнения.

Обзор литературы

Хотя необходимость решения интервальных и других неточно определяемых (стохастических, нечетких и т.д.) уравнений возникает достаточно часто на практике [1–5], систематическое изучение таких уравнений и методов их решения началось сравнительно недавно. По-видимому, первое упоминание об интервальных уравнениях и методах их решения появилось в книге [6]. В этой работе использован множественный подход, при котором интервальное уравнение (3) рассматривается как множество образующих его обычных уравнение (1), получаемых при варьировании их параметров P в границах заданных интервальных параметров $\tilde{P}$. При этом множество решений интервального уравнения получается как множество решений указанных, образующих его обычных уравнений. Аналогичный подход используется в работе [7] для решения конкретного интервального уравнения, возникающего в важной прикладной задаче расчета длины опасной зоны загрязнения поверхности токсичным веществом. Краткий обзор различных ситуаций, возникающих при решении практических задач с помощью указанного подхода, приведен в работе [8]. При этом рассматриваются как ситуации, моделируемые уравнениями с одним корнем, так и ситуации, моделируемые уравнениями с двумя или несколькими корнями. Наконец, в книге [9] был предложен другой, чисто интервальный подход к решению интервальных уравнений вида (3), при котором такое уравнение рассматривается не как множество обычных уравнений вида (1), а как одно уравнение, имеющее интервальные параметры и потому подчиняющееся законам интервальной математики. Использование этих законов позволяют совершать эквивалентные преобразования интервального уравнения, упрощая его и приводя к детерминированному виду, из которого непосредственно вытекает его решение. Таким образом, предложенные в литературе подходы к решению интервальных уравнений существенно различаются по определению того, что считать решением уравнения, и по используемому математическому аппарату. Кроме того, они различаются по своим возможностям в отыскании корней уравнений. В частности, чисто интервальный подход, в отличие от множественного подхода, не всегда обеспечивает существование точного решения интервального уравнения. Однако отсутствие точного решения такого уравнения является не недостатком интервального подхода, а следствием неопределенности задачи, выражающейся в задании параметров уравнения с точностью лишь до интервалов возможных значений [10], [11].

Множественный подход

Будем решать интервальное уравнение (3), используя множественный подход. Рассмотрим первый случай, когда последней операцией в левой части уравнения является сложение. Тогда уравнение (3) можно представить в виде

$$\tilde{f}_A(\tilde{P},x)+\tilde{f}_B(\tilde{P},x)=\tilde{0}\,, \qquad (4)$$

где $\tilde{f}_A=[f_{A_1},f_{A_2}]$, $\tilde{f}_B=[f_{B_1},f_{B_2}]$ – новые по отношение к $\tilde{f}$ интервальные функции тех же переменной x и вектора параметров $\tilde{P}$.

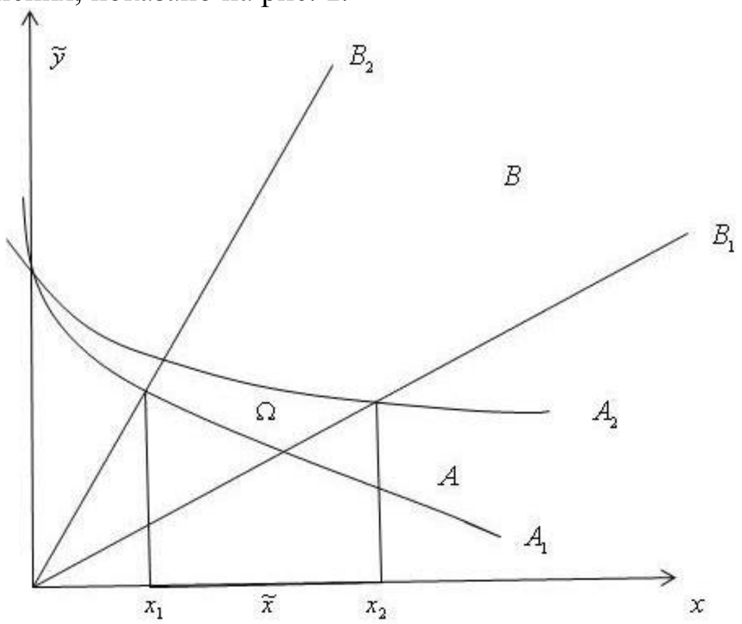
Обозначив $-\tilde{f}_B = \tilde{f}_C$, уравнение (4) можно переписать в виде

$$\tilde{f}_A(\tilde{P},x) = \tilde{f}_C(\tilde{P},x). \quad (5)$$

Поскольку интервальные функции в левой и правой части уравнения (5) графически представляются в виде интервальных кривых, решение этого уравнения сводится к нахождению пересечения двух интервальных кривых, т.е. к нахождению множества Ω точек (области), принадлежащих обеим интервальным кривым. В этом, очевидно, и проявляется множественный подход к решению интервальных уравнений. При этом собственно решением интервального уравнения (5) является не само указанное выше множество Ω, а его проекция Ω_x на ось X.

Детали множественного алгоритма нахождения решения интервального уравнения проще всего показать на примере решения уравнения с одним корнем.

Пример 1. Найти решение интервального уравнения $e^{-\tilde{P}\cdot x} = \tilde{q}x$ с интервальными параметрами $\tilde{p} = [p_1, p_2]$, $\tilde{q} = [q_1, q_2]$. Это уравнение используется при расчете длины опасной зоны загрязнения поверхности токсичным веществом. Графическое изображение интервальных кривых, представляющих функции левой и правой частей заданного уравнения, показано на рис. 1.



A – интервальная кривая $\tilde{y} = e^{-\tilde{P}\cdot x}$, где $\tilde{p} = [p_1, p_2]$;

B – интервальная кривая $\tilde{y} = \tilde{q}x$, где $\tilde{q} = [q_1, q_2]$;

A_1 – детерминированная кривая $y = e^{-p_1\cdot x}$; A_2 – детерминированная кривая $y = e^{-p_2\cdot x}$;

B_1 – детерминированная кривая $y = q_1 x$; B_2 – детерминированная кривая $y = q_2 x$;

Ω – пересечение интервальных кривых A и B;

$x^* = [x_1, x_2]$ – проекция Ω на ось X – решение интервального уравнения $e^{-\tilde{P}\cdot x} = \tilde{q}x$

Рисунок 1 – Графическое представление решения интервального уравнения множественным методом

Из рисунка видно, что единственная область Ω, являющаяся общей частью обеих интервальных кривых, расположена между крайней левой точкой x_1 и крайней правой точкой x_2. Так что проекция Ω_x области Ω на ось X, являющаяся искомым единственным решением уравнения, имеет вид интервала $\tilde{x} = [x_1, x_2]$. Причем, как видно из рис .1, левая граница x_1 этого решения есть точка пересечения кривых A_1 и B_2, т.е. решение обычного детерминированного уравнения $e^{-p_2 \cdot x} = q_2 x$, а правая граница x_2 этого решения есть точка пересечения кривых A_2 и B_1, т.е. решение обычного уравнения $e^{-p_1 \cdot x} = q_1 x$. Таким образом, для решения заданного интервального уравнения достаточно решить два указанных обычных уравнения.

Пусть, например, надо найти решение конкретного интервального уравнения $e^{-[0,5;0,7] \cdot x} = [2,3]x$. Тогда для нахождения левой границы решения x_1 надо решить детерминированное уравнение $e^{-0,7 \cdot x} = 3x$, а для нахождения правой границы x_2 – детерминированное уравнение $e^{-0,5 \cdot x} = 2x$. Решая эти уравнения численным методом, находим $x_1 = 0,275$, $x_2 = 0,408$. Отсюда решение заданного конкретного интервального уравнения получается в виде $\tilde{x} = [x_1, x_2] = [0,275; 0,408]$.

Если задано интервальное уравнение, имеющее два или более корней, его решение производится путем последовательного вычисления этих корней, с использованием алгоритма, примененного выше в примере 1.

Мы рассмотрели процедуру решения с помощью множественного подхода интервального уравнения вида (3) в случае, когда последней операцией в левой части уравнения является сложение. В случае, когда последней операцией в левой части является умножение, уравнение (3) можно представить в виде

$$\tilde{f}_A(\tilde{P}, x) \cdot \tilde{f}_{\text{в}}(\tilde{P}, x) = \tilde{0} \tag{6}$$

с теми же функциями $f_A = (\circ)$, $f_B = (\circ)$, что и в формуле (4). Уравнение (6) можно разбить на пару уравнений

$$\tilde{f}_A(\tilde{P}, x) = \tilde{0} \qquad \text{или} \qquad \tilde{f}_{\text{в}}(\tilde{P}, x) = \tilde{0}\ , \tag{7}$$

в левых частях которых последней операцией является сложение. Благодаря этому уравнения (7) можно решить с помощью алгоритма, изложенного выше.

Интервальный подход

Будем решать интервальное уравнение (3), используя интервальный подход. Этот подход основан на эквивалентных преобразованиях обеих частей интервального уравнения с помощью подходящих законов интервальной математики. В результате таких преобразований левая и правая части интервального уравнения приводятся к явному виду интервала, а все интервальное уравнение – к явному интервальному виду

$$[f_1(P_f, x), f_2(P_f, x)] = [\varphi_1(P_\varphi, x), \varphi_2(P_\varphi, x)], \tag{8}$$

где f_1, f_2, φ_1, φ_2 – детерминированные функции переменной x, а P_f, P_φ – векторы параметров вида (2). От (8), приравняв нижние границы левого и правого интервалов, а также их верхние границы, получаем систему из двух обычных (детерминированных) уравнений, которая эквивалентна исходному интервальному уравнению (8)

$$\left.\begin{array}{l} f_1(P_f, x) = \varphi_1(P_\varphi, x) \\ f_2(P_f, x) = \varphi_2(P_\varphi, x) \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Таким образом, решение x^* системы детерминированных уравнений (9), если оно существует, является точным решением интервального уравнения (3). Если система (9) не имеет решения, но первое и второе ее уравнения имеют решения соответственно x_1' и x_2', которые близки, то можно принять $x^* \approx x_1'$ или $x^* \approx x_2'$ или, что, очевидно, лучше $x^* \approx (x_1' + x_2')/2$ или даже $x^* = [x_1', x_2']$. В остальных случаях решения системы детерминированных уравнений (9), а значит, и решения интервального уравнения (3) не существует.

В эквивалентных преобразованиях обеих частей интервального уравнения (3) для приведения его к системе (9) используются следующие законы интервальной математики

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]; \quad [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1];$$

$$k[a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0, \\ [ka_2, ka_1], & k < 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min_{i,j} (a_i \cdot b_j), \max_{i,j} (a_i \cdot b_j)];$$

$$[a_1, a_2]/[b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [1/b_2, 1/b_1] = [\min_{i,j} (a_i / b_j), \max_{i,j} (a_i / b_j)].$$

Детали интервального алгоритма нахождения решения интервального уравнения поясним, как и выше, на примере решения уравнения с одним корнем.

Пример 2. Найти решение интервального уравнения $e^{-\tilde{p}\cdot x} = \tilde{q}x$ с интервальными параметрами $\tilde{p} = [p_1, p_2]$, $\tilde{q} = [q_1, q_2]$. Решение данного уравнения множественным способом, с использованием графического представления интервальных кривых, было показано в примере 1. Теперь применим интервальный метод. При этом необходимость графического представления кривых отпадает, и процедура отыскания решения интервального уравнения упрощается. Алгоритм решения следующий.

Шаг 1. Приводим левую и правую части уравнения к явному виду интервала. Учитывая, что корень уравнения $x > 0$, а функция e^x – монотонно возрастающая, с помощью преобразований (10) находим: правая часть $\tilde{q}x = [q_1, q_2] \cdot x = [q_1 x, q_2 x]$, левая часть $e^{-\tilde{p}\cdot x} = e^{-[p_1, p_2]x} = e^{-[p_1 x, p_2 x]} = e^{[-p_2 x, -p_1 x]} = = [e^{-p_2 x}, e^{-p_1 x}]$

Шаг 2. Представляем все уравнение в явном интервальном виде

$$[e^{-p_2 x}, e^{-p_1 x}] = [q_1 x, q_2 x] \tag{11}$$

Шаг 3. Переходим от интервального уравнения (11) к системе двух детерминированных уравнений, приравнивая нижние границы правого и левого интервала в (11), а также их верхние границы. Получаем

$$\left. \begin{aligned} e^{-p_2 x} &= q_1 x \\ e^{-p_1 x} &= q_2 x \end{aligned} \right\}. \tag{12}$$

Шаг 4. Решаем систему уравнений (12). Находим корни 1-го уравнения x_1' и 2-го уравнения x_2'. Если $x_1' = x_2'$, то существует точное решение системы (12), которое равно $x^* = x_1' = x_2'$. Оно же является решением заданного интервального уравнения. Если $x_1' \neq x_2'$, то точное решение системы (12) и, соответственно, точное решение интервального уравнения не существует. Однако при $x_1' \approx x_2'$ существует приближенное решение x^* системы (12) и интервального уравнения: $x^* \approx x_1'$ или $x^* \approx x_2'$ или $x^* \approx (x_1' + x_2')/2$ или $x^* = [x_1^*, x_2^*]$, где $x_1^* = \min(x_1', x_2')$, $x_2^* = \max(x_1', x_2')$. При существенно различных x_1' и x_2' решения системы (12) и интервального уравнения не существует.

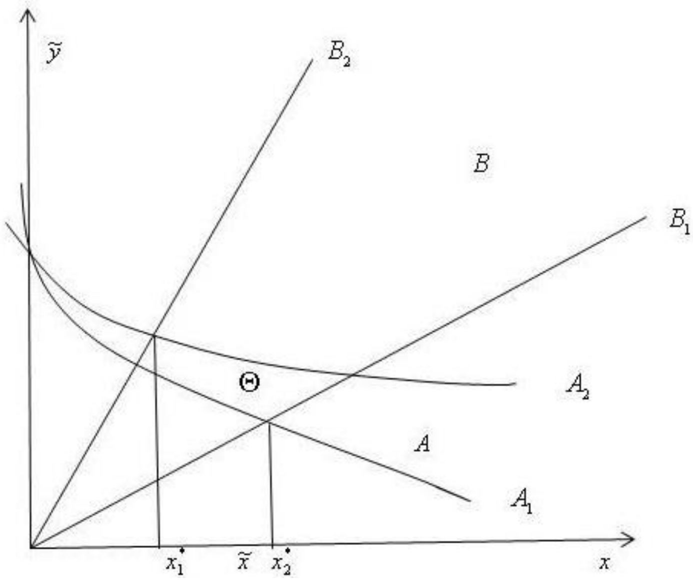
Найдем решение того же конкретного интервального уравнения, что и в примере 1: $e^{-[0,5;0,7]\cdot x} = [2,3]x$. В данном случае система уравнений (12) приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} e^{-0,7x} &= 2x \\ e^{-0,5x} &= 3x \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Решая 1-е и 2-е уравнения (13) численным методом, находим их решения в виде $x_1' = 0,381$, $x_2' = 0,289$. Здесь $x_1' \neq x_2'$, так что точного решения системы (13) заданного интервального уравнения не существует. Однако можно считать, что $x_1' \approx x_2'$ и потому существует приближенное их решение

$$x^* \approx 0,381 \text{ или } x^* \approx 0,289 \text{ или } x^* \approx (0,381 + 0,289)/2 = 0,335$$
$$\text{или } x^* = [0,289, 0,381] \quad . \quad (14)$$

Графическое изображение интервальных кривых, представляющих функции левой и правой частей рассмотренного в примере 2 интервального уравнения, показано на рис. 2.



A – интервальная кривая $\tilde{y} = e^{-\tilde{p}\cdot x}$, где $\tilde{p} = [p_1, p_2]$;

B – интервальная кривая $\tilde{y} = \tilde{q}x$, где $\tilde{q} = [q_1, q_2]$;

A_1 – детерминированная кривая $y = e^{-p_1\cdot x}$; A_2 – детерминированная кривая $y = e^{-p_2\cdot x}$;

B_1 – детерминированная кривая $y = q_1 x$; B_2 – детерминированная кривая $y = q_2 x$;

Θ – пересечение интервальных кривых A и B;

$x^* = [x_1^*, x_2^*]$ – проекция Θ на ось X – решение интервального уравнения $e^{-\tilde{p}\cdot x} = \tilde{q}x$

Рисунок 2 – Графическое представление решения интервального уравнения интервальным методом

Из рис.2 видно, что единственная область Θ, которую следует считать общей частью обеих интервальных кривых, расположена между крайней правой точкой x_2^* и крайней левой точкой x_1^*. Так что проекция области Θ на ось X, являющаяся объединенным решением заданного интервального уравнения, имеет вид интервала $x^* = [x_1^*, x_2^*]$.

Левая x_1^* и правая x_2^* границы этого решения являются соответственно точкой пересечения кривых A_2 и B_2 [т.е. решением 2-го уравнения (13)] и точкой пересечения кривых A_1 и B_1 [т.е. решением 1-го уравнения (13)].

Сравнивая рис. 1 и рис. 2, видим, что область Ω, определяющая множество решений рассмотренного интервального уравнения при множественном подходе, шире области Θ, определяющей множество решений этого уравнения при интервальном подходе. Это положение остается справедливым и для других интервальных уравнений. Оно может быть записано в виде $\Theta \subset \Omega$.

Решение с помощью интервального подхода интервальных уравнений с несколькими корнями и уравнений типа (6) (где последняя операция не сложение, а умножение) осуществляется так же, как при использовании множественного подхода.

Обсуждение

Выше было показано (теоретически и на конкретных примерах), что решение возникающих на практике разнообразных интервальных уравнений возможно, по крайней мере, двумя различными способами. Первый, множественный способ рассматривает интервальное уравнение как множество образующих его обычных уравнений, полученных варьированием их параметров в границах интервальных параметров интервального уравнения. При этом множество решений интервального уравнения получается как множество решений образующих его обычных уравнений. Второй, чисто интервальный способ рассматривает интервальное уравнение не как множество обычных уравнений, а как одно уравнение, имеющее, однако, интервальные параметры, подчиняющиеся законам интервальной математики. Эквивалентное преобразование интервального уравнения по этим законам приводит его к виду детерминированного уравнения, решение которого можно получить известными методами. Предложенный в данной статье чисто интервальный способ решения интервального уравнения существенно отличается от известного ранее множественного способа. Отличие есть в определении того, что считать решением интервального уравнения (при множественном подходе решением является множество всех точек пересечения интервальных функций в левой и правой частях уравнения, (а при интервальном подходе – множество точек, в которых интервальные функции в левой и правой частях уравнения) равны или приближенно равны): в используемом математическом аппарате (при множественном подходе это теория множеств, при интервальном подходе – интервальная математика); в возможности нахождения точного решения (при множественном походе такое решение всегда существует и может быть найдено всегда, при интервальном подходе – не всегда). Кроме того, множество получаемых с помощью интервального подхода решений интервального уравнения всегда **у**же множества решений, получаемых с помощью множественного подхода, составляя его часть. Последняя особенность интервального подхода связана с тем, что в нем учитываются только часть точек, геометрически относящихся к пересечению интервальных кривых левой и правой частей уравнения. Эта особенность свидетельствует об адекватности предложенного в статье интервального подхода, проявляющейся в том, что сокращение информации об уравнении (переход от детерминированного к интервальному уравнению) приводит к размыванию его решения (переходу от единственности решения к множеству решений).

Заключение

В работе предложен новый подход к решению интервальных уравнений, основанный на эквивалентном преобразовании уравнения по законам интервальной математики, в результате чего оно приводится к детерминированному виду и может быть решено хорошо известными методами решения обычных (детерминированных) уравнений. Этот подход отличается от известного множественного подхода содержанием понятия «решение интервального уравнений» и полной формализацией процесса отыскания корней уравнения. Этот процесс строится на использовании аппарата интервальной математики, благодаря чему полностью исключает различные эвристические приемы, что существенно упрощает процесс решения уравнения. Важно отметить, что точные значения корней интервального уравнения при интервальном подходе могут существовать, а могут и не существовать. В первом случае эти значения можно найти. Во втором случае можно найти приближенные значения корней уравнения. Предложенный подход к решению интервальных уравнений имеет важное значение, позволяя решать разнообразные задачи, связанные к исследованием неточно известных характеристик систем в технике, экономике, социальной сфере.

Список литературы

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель– М. : Высшая школа. – 2005. – 575 с.
2. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений [Текст] / Л. А. Заде. – М. : Мир. – 1976. – 165 с.
3. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г.Алефельд, Ю. Херцбергер. – М. :Мир. – 1987. – 360 с.
4. Канторович Л. В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений [Текст] / Л. В. Канторович // Сибирский математический журнал – 1962. – Т. 3, № 5.– С. 3–14.
5. Налимов В. В. Теория эксперимента [Текст] / В. В. Налимов, Л. А.Чернова. – М. : Наука. – 1971. – 320 с.
6. Вощинин А. П. Оптимизация в условиях неопределенности [Текст] / А. П. Вощинин, Г. Р. Сотиров. – М. : МЭИ, София: Техника. – 1989. – 226 с.
7. Gorsky V. Risk assessment of Accident involving environmental high-toxicity substances / V. Gorsky, T. Shvetzova-Shilovskaya, A. Voschinin // Journal of Hazardous Materials. – 2000. – No. 78.
8. Вощинин А.П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы [Текст] / А. П. Вощинин // Заводская лаборатория. – 2002. – Т. 68, № 1. – С. 118–126.
9. Левин В. И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности [Текст] / В. И. Левин. – Пенза : ПТИ. – 1998. – 68 с.
10. Левин В. И. Методология оптимизация в условиях неопределенности методом детерминизации [Текст] / В. И. Левин // Информационные технологии. – 2014. – № 5. – С. 14–21.
11. Левин В. И. Метод моделирования поведения функций с помощью раздетерминизации [Текст] / В. И. Левин // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2017. – № 1. – С. 33–41.
12. Левин В. И. Полиинтервалы и их применение в моделировании систем [Текст] / В. И. Левин // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2016. – № 2(3). – С. 39-47.

References

1. Ventzel E.S. *Probability theory*. Moscow, High school Publ., 2005. 575 p.
2. Zadeh L. A. *Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning*. Russ. ed., Moscow, Mir Publ., 1976. 165 p.
3. Alefeld G., Khertsberger J. *Introduction to interval computations*. Russ. ed., Moscow, Mir Publ, 1987. 360 p.
4. Kantorovich L. V. On some new approaches to computational methods and processing of observations, *Siberian Mathematical Journal*, 1962, vol. .3, no. 5, pp. 3-14.
5. Nalimov V. V., Chernova L. A. *The theory of experiment*. Moscow, Science Publ., 1971. 320 p.
6. Voshinin A. P, Sotirov G. R. *Optimization in conditions of uncertainty*. Moscow, MEI Publ., Sofia, Engineering, 1989. 226 p.
7. Gorsky V., Shvetzova-Shilovskaya T., Voschinin A. Risk assessment of Accident environmental high-toxicity substances. *Journal of Hazardous Materials*, 2000, no. 78.
8. Voshchinin A. Interval analysis of data: development and prospects. *Factory laboratory*, 2002, vol. 68, no. 1, pp. 118-126.
9. Levin V.I. *Interval mathematics and systems research in conditions of uncertainty*. Penza, PTI, 1998. 68 p.
10. Levin V.I. Methodology optimization in conditions of uncertainty by the method of determination. *Information technologies*, 2014, no. 5, pp. 14-21.
11. Levin V.I. A method for modeling the behavior of functions with the aid of a partition function. *Radioelectronics*, *Informatics*, *Control*, 2017, no. 1, pp. 33-41.
12. Levin V.I. Polyintervals and their application in system modeling. *Problems of Artificial Intelligence*, Donetsk, 2016, no. 2(3), pp. 39-47.

RESUME

V. I. Levin, E. A. Nemkova

Interval Equations and Their Solution

Background: In the modeling of technical, economic, social systems, it is often necessary to solve equations with interval-specific parameters (interval equations). The solution of such equations requires special methods that differ from the methods for solving ordinary, deterministic equations. A new method for solving interval equations based on the apparatus of interval mathematics is proposed.

Materials and methods: The aim of the work is the development of a completely formalized method for solving interval equations based on the mathematical apparatus mentioned. The method proposed in the article consists in using equivalent transformations of both parts of the interval equation according to the laws of interval mathematics that allow one to move from the interval equation to the ordinary deterministic equations and their subsequent solution by known methods.

Results: It is shown that the solution of various interval equations can be performed by two different methods: multiple and interval. The differences between these two methods in the concept of solving the equation, in the mathematical apparatus used, in the possibility of an exact solution, in the power of the resulting set of solutions are revealed. An example of a solution of the interval equation used in the calculation of the zone of contamination by a dangerous substance is given by two methods.

Conclusion: The paper proposes a new approach to solving interval equations based on an equivalent transformation of the equation according to the laws of interval mathematics. Such a transformation allows us to bring the equation to a deterministic form, which makes it possible to solve it by well-known methods for solving ordinary (deterministic) equations. The proposed approach allows us to find the exact solution of the interval equation (if it exists) or its approximate solution (if there is no exact solution).

Статья поступила в редакцию 07.08.2017.