УДК 517.9

А. С. Миненко, Е. В. Радевич
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
283001, г. Донецк, ул. Артема, 58

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛА

A. S. Minenko, E. V. Radevich
State Educational Institution of Higher Education «Donetsk national technical University», Donetsk city
283001, Donetsk, Artema str., 58

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF METAL CRYSTALLIZATION

О. С. Міненко, К. В. Радевич
Державна освітня установа вищої професійної освіти «Донецький національний технічний університет», м. Донецьк
283001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ КРИСТАЛІЗАЦІЇ МЕТАЛУ

В статье исследуется одна задача Стефана с учетом конвекции в жидкой фазе. Построено приближенное решение этой задачи с использованием малого параметра. Управление процессом осуществляется с применением нечеткой логики.
Ключевые слова: функционал, кристаллизация, тепловой поток, управление, краевая задача, моделирование.

The paper investigates the one Stefan's problem with allowance for convection in the liquid phase. The approximate solution of this problem is constructed using a small parameter. Process control is performed using fuzzy logic.
Keywords: functional, crystallization, heat flow, controlling, boundary value problem, modeling.

У статті досліджується одна задача Стефана з урахуванням конвекції в рідкій фазі. Побудовано наближений розв'язок цієї задачі з використанням малого параметра. Управління процесом здійснюється із застосуванням нечіткої логіки.
Ключові слова: функціонал, кристалізація, тепловий потік, управління, крайова задача, моделювання.

Введение

Распространение тепла в различных средах оказывает большое влияние на характер протекания многих важных для практики процессов. Среди задач, связанных с распространением тепла, выделяется класс задач, в которых исследуемое вещество переходит из одной фазы в другую с выделением или поглощением тепла.

Целью данной работы является моделирование процесса кристаллизации металла, изучение процесса завершения получения слитка в кристаллизаторе путем его вытягивания.

Рассматривается задача управления информационными процессами при автоматизации технологий тепловой обработки металла, на основе математического моделирования, анализа статистических данных и теплофизических экспериментальных измерений. В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на пространственной задаче Стефана, с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе.

Постановка задачи

Пусть $D = (-1< x < 1,\ y < 0)$ – полуполоса, заполненная твердым металлом. Обозначим через $u\ (x, y)$ температуру этого металла. Требуется определить температуру $u\ (x, y)$ по следующим условиям:

$$u_{xx} + u_{yy} + \omega u_y = 0, (x, y)\in D, \quad (1)$$

$$u_x \pm \omega_0 u = 0, x = \pm 1, -\omega< y < 0, \quad (2)$$

$$u\ (x, -\infty) = 0, \quad (3)$$

$$u_y\ (x, 0) = v\ (x), -1 \le x \le 1, \quad (4)$$

здесь ω и ω_0 – постоянные, соответственно, число Пекле и Нуссельта.

Решение задачи (1) – (4) имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\omega}\frac{\cos\lambda_n x^{\mu_n Y}}{\mu(1+\omega_0\dfrac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})}\int_{-1}^{1}v(\zeta)\cos\lambda_n\zeta\,d\zeta, \quad (5)$$

где $\mu=-\dfrac{\omega}{2}+\sqrt{\dfrac{\omega^2}{4}+\lambda_n^2}$, где $n = 1,2,3,...\lambda_n$ – положительные корни уравнения $\lambda=\omega_0 ctg\lambda$.

Отождествим теперь температуру $u\ (x, y)$ с температурой твердого слитка, находящегося в кристаллизаторе при электрошлаковом переплаве. Для вытягивания слитка из кристаллизатора поверхность слитка предварительно обогревается тремя электронными лучами W1, W2 и W3, причем мощность W3 одного из них равномерно распределена в центральной зоне $\{ -1 \le x \ge 1,\ y = 0\}$, а два других сконцентрированы по краям $x = \pm 1$ [1]. Независимо от того, в каком отношении находится температура поверхности слитка с критической температурой $T^к$, при которой поверхность слитка отделяется от стенок кристаллизатора, теплообмен слитка с кристаллизатором осуществляется по формуле (2). Для получения температуры слитка достаточно положить в формуле (5) $v(x) = (W_1, W_2, W_3)$.

Далее введем в рассмотрение функционал:

$$I(v)=\int_{n}^{0}(u(1,y)=T^k)^2\,dy. \quad (6)$$

Рассматривается задача. Требуется определить поток v(x) из допустимого множества U, доставляющий наименьшее значение функционалу *I(v)*. Минимизирующая последовательность v_n строится по формуле $v_{n+1} = v_n + e_n(v_{n-1} - v_n)$, параметр e_n выбирается из условия $\min I(v_n + e_n(v_{n-1} - v_n))$, $0 \le e_n \le 1$ (2). В качестве области определения функции U берется множество кусочно-постоянных ступенчатых функций: $v = v_{k,} x_k \le x \le x_{k+1}, v_k = const, k = 0,1,2,...,m.$

При этом формула (5) имеет вид:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\omega} \frac{\cos\lambda_n x e^{\mu_n y}}{\mu_n(1+\omega_0 \frac{\cos^2\lambda_n}{\lambda_n^2})} \sum_{k=0}^{m} v_k \frac{\sin\lambda_n x_{k+1} - \sin\lambda_n x_k}{\lambda_n},\ aI(v) = I(v_0, v_1, v_2, ..., v_m)\ .$$

При численной реализации задачи необходимо учесть ограничение *2500 ≤ v(x) ≤ ≤5000*, здесь *v(x)* – мощность потока в единицах МВт/м^2, а также ω = 2,66, ω = 3,05.

Решение задачи методом нулевого приближения

Найдем минимум функционала (6), в случае когда $u_0(x,y) = f_0(x,y)\vartheta$,

где $f_0(x,y) = 2\dfrac{\cos\lambda_0 x \sin\lambda_0}{\lambda_0\mu_0(1+\omega_0 \frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} e^{\mu_0 y}$.

Минимум функционала (6) находим из условия

$$\frac{\partial I}{\partial v} = 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$v_0 = 4T^* \frac{\mu_0\lambda_0(1+\omega_0 \frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}{\sin 2\lambda_0},$$

$$I(v_0) = v_0{}^2 \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{2\mu_2 H})}{2\lambda_0{}^2\mu_0^3(1+\omega_0 \frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0{}^2}} -$$

$$-\left(T^*\right)^2 H - 2T^* v_0 \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0 \frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0{}^2})}.$$

Первое приближение. Найдем теперь минимум функционала (6), в случае когда

$$u_1(x,y) = (f_0(x,y))v, \text{где } f_1(x,y) = 2\frac{\cos\lambda_1 x e^{\mu_1 y}}{\mu_1(1+\omega_0 \frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})} \frac{\sin\lambda_1}{\lambda_1}.$$

Поступая, аналогично тому, как это было сделано в случае нулевого приближения, получим:

$$v_1 = 2T^*[\frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} + \frac{\sin 2\lambda_2(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})}]A,$$

$$A = \frac{\sin^2\lambda_0(1-e^{\mu_2 H})}{\lambda_0\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})^2} + \frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^2(1+\omega_1\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2} +$$
$$+2\frac{\sin 2\lambda_0\sin 2\lambda_1}{\mu_0\lambda_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}\frac{(1-e^{\mu_0 H})(1-e^{\mu_1 H})}{\mu_0\lambda_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\mu}{\lambda_1^2})}.$$

Далее, имеет место следующая формула:

$$I(v_1) = v_2^1\frac{\sin^2 2\lambda_0(1-e^{2\mu_0 H})}{2\mu_0^3\lambda_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_1^2})^2} + v_1^2\frac{\sin^2 2\lambda_1(1-e^{2\mu_1 H})}{2\mu_1^3\lambda_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})^2} +$$

$$+2v_1^2\frac{\sin 2\lambda_0\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})(1-e^{\mu_0 H})}{\mu_1\lambda_1(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})\mu_0\lambda_0(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})} -$$

$$-2T^*v_1[\frac{\sin 2\lambda_1(1-e^{\mu_1 H})}{\lambda_1\mu_1^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_1}{\lambda_1^2})} + \frac{\sin 2\lambda_0(1-e^{\mu_0 H})}{\lambda_0\mu_0^2(1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_0}{\lambda_0^2})}] - H(T^*)^2.$$

Приближение любого порядка. Аналогичным образом можно исследовать минимум функционала $I(v_n)$, когда

$$u_n(x,y) = 2\frac{v_n\sin\lambda_0\cos\lambda_0 x(1-e^{\lambda_0 H})}{\lambda_0\mu_0\left[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}\right]}e^{\mu_0 y} +$$
$$+2\omega_0 v_n\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\lambda_k x\cos\lambda_k(1-e^{\mu_k H})}{\lambda_k^2\mu_k\left[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}\right]}e^{\lambda_0 H}.$$

Оценить погрешность предлагаемого метода вычисления минимума функционала (6) можно, используя следующее утверждение.

При достаточно малых значениях ω и при (x,y) $\in \overline{D}$ справедлива оценка:

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\lambda_k x\cos\lambda_k(1-e^{\omega_k H})}{\lambda_k^2\mu_k[1+\omega_0\frac{\cos^2\lambda_k}{\lambda_k^2}]}e^{\mu_k y}|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2}e^{\mu_k y}$$

При доказательстве этого утверждения можно воспользоваться соотношением:

$$\lambda_k = n\pi + \varepsilon_n, \text{где } \varepsilon_n \to 0 \text{ для всех } n[2]$$

Справедливо также утверждение. Пусть выполнены условия $\omega_0 \geq \omega\sqrt{2}tg\omega\sqrt{2},$ $0<\omega\leq A,\ 0<\omega\leq\frac{\pi^2}{16},\ 0<v_0\leq v(x)<v_1,$ при $x\in[-1,1]$, где v_0 и v_1 – некоторые постоянные.

Тогда решение краевой задачи (1) – (5) удовлетворяет следующим условиям при (x,y) $\in \overline{D}$: $u_y(x,y)\leq C_1\omega\exp(\mu_0 y)\leq C_1\omega\exp(\omega y)$

$$C_0=\exp(\mu_0 y)\leq u(x,y)\leq C_1\exp(\mu_0 y)C_1\exp(\omega y),$$

где $C_1=\frac{6+A(1+\cos\sqrt{A})}{3(1+\cos\sqrt{A})}$, $C_0=\frac{3(1-A)(1+\cos^2\sqrt{A})\cos^2\sqrt{A}}{6+A(1+\cos^2\sqrt{A})}$.

Для утверждения необходимо сравнить с помощью принципа максимума функции $u_y(x,y)$ и $v_y(x,y)$, где $v(x,y)$ – решение задачи (1) – (5) в предположении, что $v_y(x,0)=v_1$ при x $\in[-1,1]$.

Далее, рассматривается функция $f(x,y)=v_y(x,y)-u_y(x,y),$(x,y) $\in \overline{D}$ и доказывается, что $f(x,y)$ в $\overline{D}$.

Действительно, функция $f(x,y)$ не может принимать наименьшее отрицательное значение внутри D в силу принципа максимума. На вертикальных частях границы x = ±1 функция $f_x(x,y)$ также не может принимать отрицательный минимум. В такой точке имели бы $f_x(x,y)<0$, между тем $f_x(x,y)=-\omega_0 f(x,y)>0$, x=±1, так как $f(x,y)<0$, по предложению. На бесконечности функция $f(x,y)$ исчезает, т.е. $f(x,-\infty)=0.$ На границе y = 0, -1≤ x ≤ 1 имеет $f(x,0)=v_y(x,0)-u_y(x,0)=v_1--v(x)\geq 0$ Следовательно, всюду в $\overline{D}$ справедливо неравенство $u_y(x,y)\leq v_y(x,y)$ при (x,y) $\in \overline{D}$. Отсюда, с помощью интегрирования по переменной *y*, следует оценка для функции *u(x,y)* сверху. Аналогичным образом, можно получить оценку на производную u_2(x,y) сверху при (x,y) $\in \overline{D}$. Полученные оценки позволяют оценить температуру u(x,y) и тепловой поток внутри области D, не прибегая к решению задачи (1) – (4) [3], [4].

Проделанные численные результаты задачи представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Численные результаты при различных значениях параметров

ω_0	λ_0	λ_1	T	H	ν_0	ν_1	$I(\nu_0)$	$I(\nu_1)$
1,5	0,9882	3,5422	0,9	- 3,0	2,783	4,367	1,011	21,997
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	2,783	5,730	5,428	38,576
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	2,783	6,588	-3,038	62,490
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-3,0	2,937	4,610	1,126	24,509
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-4,0	2,937	5,730	-0,559	42,982
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-6,0	2,937	6,954	-3,385	69,627
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-3,0	4,5	4,5	16,728	23,709
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	4,5	4,5	15,256	24,355
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	4,5	4,5	12,397	25,275
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-3,0	4,5	4,5	15,537	23,062
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-4,0	4,5	4,5	13,866	23,695
1,5	0,9882	3,5422	0,95	-6,0	4,5	4,5	10,718	24,696
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-3,0	11,1	11,1	173,683	192,101
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-4,0	11,1	11,1	175,717	198,788
1,5	0,9882	3,5422	0,9	-6,0	11,1	11,1	173,351	202,940

Математическое моделирование процессов кристаллизации металла с учетом конвекции и примесей

Пусть Г0 – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри заданной области Ω0 и R3, граница которой состоит из двух замкнутых, связанных, гладких поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^-, не имеющих самопересечений, при этом Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Г0. Поверхность Г0 разбивает Ω0 на две подобласти, $\Omega_0^+ \grave{e} \Omega_0^-$, которые заняты жидкой и твердой фазами соответственно в момент t=0. Требуется определить области $\Omega_t^+ \grave{e} \Omega_t^-$, занимаемые твердой и жидкой фазами соответственно в момент времени t∈ [0,T], вектор скорости $\vec{V}(x,t),$ $\ddot{a}\grave{a}\hat{a}\ddot{e}\mathring{a}\acute{i}\ \grave{e}\mathring{a}\ p(x,t)$ концентрацию примесей c(x,t), концентрацию примеси c(x,t), температуру жидкой u+(x,t) и твердой u+(x,t) фазы по следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{V}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V}(x,t) + \nabla p(x,t) = \vartheta \nabla^2 \vec{V}(x,t) + \vec{f}(u^+,c), \nabla \vec{V}(x,t) = 0, (x,t) \in D_T^+; \\ \dfrac{\partial u^+(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u^+(x,t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x,t) = 0, (x,t) \in D_T^+; \\ \dfrac{\partial u^-(x,t)}{\partial t} - a^2 \nabla^- u^-(x,t) = 0, (x,t) \in D_T^+; \vec{V}(x,0) = \vec{C}(x); T(\vec{V}, p)\vec{n} = -q(x,t)\vec{n}, (x,t) \in \Gamma_t^+; \\ V_n = -1\dfrac{p^-}{p^+} w_n, v_\tau(x,t) \in \Gamma_t; u_-^+(x,t) = B_-^+(x,t), (x,t) \in \Gamma_t^+ \bigcup \Gamma_t^-; u_-^+(x,0) = A_-^+(x \\ u^+ = u^- = T^* - \varepsilon c, k_- \dfrac{\partial u^-}{\partial n} - k_+ \dfrac{\partial n^+}{\partial n} = xp^+ W_n, (x,t) \in \Gamma_t; \\ \dfrac{\partial \tilde{n}(x,t)}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)c(x,t) - \gamma \nabla^2 c(x,t) = 0, (x,t) \in D_T^+, \\ c(x,0) = g_0(x); c(x,t) = g(x,t), (x,t) \in \Gamma_t^+; -\alpha \dfrac{\partial c}{\partial n} = \beta c W_n, (x,t) \in \Gamma_t, \end{cases} \tag{7}$$

здесь $D_T^{\pm}=\{(x,t):\ x\in\Omega_t^{\overset{+}{-}},t\in(0,T)\},\ x=(x_1,\ x_2,\ x_3),\ \partial\Omega^{+}=\Gamma_t\bigcup\Gamma_t^{+},\partial\Omega^{-}=\Gamma_t^{+}\bigcup\Gamma_t$ – нормаль к Γ_t, направленная в сторону Ω^{+}_t, $T(\vec{V},p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij}=-\delta_{ij}p+\upsilon(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}, V_n$ è V_t – нормальная и тангенциальная составляющие, w_n – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормалям $\vec{n};T^{*},\vartheta,\varepsilon,x,p^{+},p^{-},$ $\alpha,\beta,\gamma,k_{+},k_{-}$ – известные положительные постоянные.

Если $\Phi(x,t)=\ u^{\overset{+}{-}}(x,t)+\varepsilon c(x,t)-T^{*}=0$ – уравнение поверхности Γ_t, тогда $.W_n=\frac{-\Phi_t}{|\nabla\Phi|}$. [2]

Заметим, что условия Стефана можно представить в следующем виде:

$$L(u^{+},u^{-},\Gamma_t,\varepsilon)=k_{-}^{2}\left|\nabla u^{-}\right|^{2}-k_{+}^{2}\left|\nabla u^{+}\right|^{2}+\varepsilon(k_{-}^{2}+k_{-}k_{+})(\nabla u^{-},\nabla c)-\varepsilon(k_{+}^{2}+k_{+}k_{-})(\nabla u^{+},\nabla c)$$
$$+xp^{+}(k_{-}u_t^{-}+k_{+}u_t^{+})+xp^{+}\varepsilon(k_{+}+k_{-})c_t=0,(x,t)\in\Gamma_t.$$

При некоторых предположениях на функции A(x), $\vec{N}(x),B^{\overset{+}{-}}(x,t),\vec{f}(u^{+},c),g(x,t)$ и $g_0(x)$ задача разрешима при малых значениях t в классе функций

$$u^{\overset{+}{-}}\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{D}_{+}^{\overset{+}{-}}),\ \vec{V}\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{D}_{+}^{\overset{+}{-}}),c\in H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\overline{D}_{+}^{\overset{+}{-}}),\nabla p\in H^{a,\frac{a}{2}}(\overline{D}_{+}^{\overset{+}{-}}),$$

а границы Γ_t^{+} и Γ_t описываются функциями класса $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}$.

Далее, пусть $Q_T^{\overset{+}{-}}=\Omega_0^{\overset{+}{-}}\times[0,T],\Gamma_{OT}^{-}=\Gamma_0^{-}\times[0,T],\Gamma_{OT}^{+}=\Gamma_0^{+}\times[0,T],\Gamma_{OT}=\Gamma_0\times[0,T].$

Отметим также, что решение задачи моделирует процесс кристаллизации вещества с учетом конвективного теплообмена и переноса примеси в жидкой фазе [2]. Свободные границы Γ_t^{+} и Γ_t можно представить в следующем виде:

$$\Gamma_t=\left\{x=x(\omega)+\vec{n}(\omega)*p(\omega,t)\right\},\Gamma_t^{+}=\left\{x=x(\theta)+\eta(\omega,t)*\vec{n}(\theta)\right\}.$$

При достаточно малых значениях чисел ε предложен метод решения задачи, состоящий из разложения решения в ряд по степеням чисел ε:

$$u^{\pm}(x,t,\varepsilon)=u^{\pm}{}_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u^{\pm}{}_k\ (x,t)$$

$$p(x,t,\varepsilon)=p_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k p_k\ (x,t)$$

$$V_i(x,t,\varepsilon)=V_{i0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k V_{ik},i=1,2,3;$$

$$p(\omega,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k p_k(\omega,t),\ c(x,t)=c_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k c_k(x,t),$$

В работе изучено нулевое $u^{\pm}(x)=\vec{V}_0(x)=(V_{10},V_{20},V_{30}),\Gamma_0,c_0(x)\ u_0^{\pm}(x),$ и первое приближение $(\vec{V}_1,u^{\pm}{}_1,p_1,c_1)$ для малых чисел ε. При этом установлено, что, $u^{\pm}{}_0(x)=A^{\pm}(x),\vec{V}_0(x)=\vec{C}_0(x),\ \tilde{N}_0(x)=g_0(x),\rho_1(\omega,t)\in \mathrm{H}^{2+a,\frac{2+a}{2}}$

$\Gamma_{OT},u^{\pm}{}_1(x,t,p)\in \mathrm{H}^{2+a,\frac{2+a}{2}}\overline{(Q_T}^{\pm}),c_1(x,t,p)\in \mathrm{H}^{2+a,\frac{2+a}{2}}\overline{(Q_T}^{\pm}).$ Причем $(\vec{V}_2)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1 :

$$M_1p_1=\frac{1}{xp^+}\int_0^1(k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial n}-k_+\frac{\partial u_1^+}{\partial n}+f_1(x,t))dt,\ x(\omega)\in\Gamma_{OT}.$$

Из условия Стефана для малых чисел ε следует разложение:

$$L(u^+,u^-,\Gamma_t,\varepsilon)=\left[k_-^2\left|\nabla u_0^-\right|^2-k_+^2\left|\nabla u_0^+\right|^2\right.$$

$$+\varepsilon\Big[2k_-^2\Big(\nabla u_0^-,\nabla u_1^- -2k_+^2\Big(\nabla u_0^+,\nabla u_1^+ + f_1+xp^+(k_-u_{lt}^-+k_+u_{lt}^+\Big)\ \Big)$$

$$+\varepsilon^2\Big[2k_-^2\Big(\nabla u_0^-,\nabla u_1^-\Big)-\Big[2k_+^2\Big(\nabla u_0^+,\nabla u_1^+\Big)+f_2+xp^+(k_-u_{2t}^-+k_+u_{2t}^+)\ \ \Big]+0(\varepsilon^2)=0,(x,t)\in\Gamma_{OT}.$$

Откуда следует, что

$$k_-^2\left|\nabla u_0^-\right|^2-k^2+\left|\nabla u_0^+\right|^2=0,x\in\tilde{A}_0$$

$$k_-\frac{\partial u_1^-}{\partial n}-k+\frac{\partial u_1^+}{\partial n}+f=xp+\frac{\partial p_1}{\partial t},(x,t)\in\tilde{A}_{0T}$$

$$k_-\frac{\partial u_2^-}{\partial n}-k+\frac{\partial u_2^+}{\partial n}+f_2=xp+\frac{\partial p_2}{\partial t},(x,t)\in\tilde{A}_{0T}$$

Здесь $f_1(x,t)\ \grave{e}\ f_2(x,t)$ – известные гладкие функции[2].

Рассмотрим второе приближение $\vec{V}_2,u^{\pm}{}_2,p_2,c_2,\eta_2$ задачи для малых чисел ε. Имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\vec{V}_2}{\partial t}+(\vec{V}_0\nabla)\vec{V}_2+(\vec{V}_1\nabla)\vec{V}_1+(\vec{V}_2\nabla)\vec{V}_0+\nabla p_2=\vartheta\nabla^2\vec{V}_2+\left[\vec{f}_u^{\,5}u_2+\vec{f}_c^{\,5}c_2+\dfrac{1}{2}\vec{f}_{uu}^{\,55}u_1^2+\dfrac{1}{2}\vec{f}_{cc}^{\,55}c_1^2\right]\\ (x,t)\in Q_T^+,\nabla\vec{V}_2=0(x,t)\in Q_T^+,T(\vec{V}_0,p_2)\vec{n}+T(\vec{V}_1,p_1)\vec{n}+T(\vec{V}_2\ ,p_0)\vec{n}=0,\ x\in\Gamma_0{}^+\\ \vec{V}_2(x,0)=0,V_{2n}=(1-\dfrac{p^-}{p^+})\left[\dfrac{u_{2t}}{\nabla u_0}+f_3(x,t)\right],V_{2\tau}=0,x\in\Gamma_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2^+}{\partial t}+(\vec{V}_0\nabla)u_2^++(\vec{V}_2\nabla)u_0^++(\vec{V}_1\nabla)u_1^+=a_+^2\nabla^2u_2^+,(x,t)\in Q_T^+,\dfrac{\partial u_2^-}{\partial t}+a_-^2\nabla^2u_2^-=0,\\ (x,t)\in Q_T^-,u_2^{\pm}\ (x,0)=0,u_2^{\pm}\ =u_2^-,\\ \left|\nabla u_0^{\pm}\ (x(\omega))\right|p_2(\omega,t)+u_2(x(\omega,t)+f(x(\omega,t)=0,(x,t)\in\Gamma_{OT}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{n}_2}{\partial t} + (\vec{V}_0 \nabla)\tilde{n}_2^+ + (\vec{V}_2 \nabla)\tilde{n}_0^+ + (\vec{V}_1 \nabla)\tilde{n}_1^+ - \gamma\nabla^2 \tilde{n}_2 = 0, (x,t) \in Q_T^+, c_2(x,0) = 0; c_2(x,t) = 0, \\ (x,t) \in \Gamma_{OT}^+, -\alpha \dfrac{\partial \tilde{n}_2}{\partial n} = \dfrac{u_{2t}^+}{|\nabla u_0^+|} + f_4(x,t), (x,t) \in \Gamma_{OT}, \\ \dfrac{\partial \tilde{n}_0}{\partial n}\eta(\omega,t) + c_2(x,t) + f_5(x,t) = 0; (x,t) \in \Gamma_{OT}, \end{cases}$$

где $f_3(x,t), f_4(x,t)$ è $f_5(x,t)$ – известные функции.

При заданных $\rho_2(\omega,t)$ и $\tilde{\rho}_2(\omega,t)$ из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ найдем функции $u^{\pm}{}_2(x,t,p_2)$ и $u^{\pm}{}_2(x,t,\tilde{\rho}_2)$ как единственные решения задачи. Затем рассмотрим оператор, действующий из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ в ($H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$, следующим образом:

$$M_1 p_1 = \frac{1}{xp^+}\int_0^1 (k_- \frac{\partial u_2^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1(x,t))dt,\ x(\omega) \in \Gamma_{OT}.$$

Справедливые оценки: $\left|u_2^{\pm}\right|_{QT\pm}^{(a+2)} \le C(\left|F_2^{\pm}\right|_{QT\pm}^{(a+2)} + \left|p_2\right|_{\Gamma_{OT}\pm}^{(a+2)})$, где С – некоторая постоянная, а $F_2^+ = -(\vec{V}_2 \nabla)u_0^+ - (\vec{V}_1 \nabla)u_1^+$ при (x,t)$\in Q_{OT}^+$ и $F_2(x,t) = 0$ при (x,t)$\in Q_T^-$. Отсюда следует, что $\left|M_2 p_2 - M_2\tilde{\rho}_2\right|_{\Gamma_{OT}}^{(a+2)} \le \tilde{\tilde{N}}\left|p_1 - \tilde{\rho}_2\right|_{\Gamma_{OT}}^{(a+2)}$, где $\tilde{\tilde{N}} = \tilde{N}(\left|k_+ + k_-\right| / xp^+$. Следовательно, оператор М2 – сжимающий, если выполняется условие

$$\tilde{N}(\left|k_+ + k_-\right| / xp^+ \angle 1 \tag{8}$$

Имеют место следующие утверждения:

Лемма 1. Пусть выполнено условие (8). Тогда оператор М2, действующий из $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$ в ($H^{2+a,\frac{2+a}{2}}(\Gamma_{OT})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 2. В качестве второго приближения задачи можно взять решение . $u_2^{\pm}(x,t), c_2(x,t), \vec{V}_2(x,t), p_2(x,t), \rho_2(x,t), \eta_2(x,t)$.

Теорема 1. Пусть $\dfrac{\partial g_0}{\partial n} \ne 0$ и $g_0(x)= g(x)$ на $\Gamma_0{}^+$. Тогда при малых значениях t справедливы формулы

$$\Gamma_t : x = x(\omega) - \varepsilon\vec{n}\frac{u_1(x(\omega),t + g_0(x(\omega))}{|\nabla u_0(x(\omega))|} - \varepsilon^2\vec{n}\frac{u_2(x(\omega),t + f_5(x(\omega),t)}{|\nabla u_0(x(\omega))|} + 0(\varepsilon^2), (x,t) \in \Gamma_{OT}$$

$$\Gamma^+{}_t : x = x(\theta) - \varepsilon\vec{n}\frac{\tilde{n}_1(x(\theta),t)}{\frac{\partial g_0}{\partial n}(x(\omega))} - \varepsilon^2\vec{n}\frac{\tilde{n}_2(x(\theta),t) + f_5(x(\theta),t)}{\frac{\partial g_0}{\partial n}(x(\omega))} + 0(\varepsilon^2), (x,t) \in \Gamma_{OT},$$

где $u_2^{\pm}(x,t), c_1(x,t), p_1(x,t), \eta_1(x,t)$ – функции класса $H^{2+a,\frac{2+a}{2}}$, являющиеся первым приближением задачи.

Вышеуказанные формулы позволяют осуществить анализ свободных границ Γ_t и Γ^+_t в зависимости от параметров задачи.

Заключение

В заключении приведем обзор теории по данной тематике [5–10]. Также необходимо отметить, что в данной статье смоделирован процесс кристаллизации метала, а для решения этой задачи был использован метод нулевого приближения, получившиеся данные, в результате решения, определены в табл. 1.

Список литературы

1. Патон Б. Е. Избранные труды [Текст] / Патон Б. Е. – Киев : Институт электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.
2. Шевченко А. И. Методы исследования нелинейных моделей [Текст] / А. И. Шевченко, А. С. Миненко. – Киев : Наук. Думка, 2012. – 132 с.
3. Миненко А. С. Вариационные задачи со свободной границей [Текст] / Миненко А. С. – Киев : Наук. Думка, 2005. – 341 с.
4. Шевченко А. И. Моделирование одного класса сложных с нечеткими управлениями [Текст] / А. И. Шевченко, А. С. Миненко, И. А. Сыпко // Доп. НАН Украины. – 2013. – № 8. – С. 52–54.
5. Миненко А. С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца [Текст] /А. С. Миненко // Укр. мат. журнал. – 2006. – № 10. – С. 1385–1394.
6. Minenko A. S. Axially symmetric flow. Fifth SIAM conference on optimization [Текст] / A. S. Minenko // Victoria, British Columbia. – May 20-22, 1996. – Victoria, 1996. – P. 12.
7. Миненко А. С. Аналитичность свободной границы в одной задаче осесимметричного течения [Текст] / А. С. Миненко // Укр. мат. Журнал. – 1998. – № 12. – С.1693-1700.
8. Миненко А. С. Проблема минимума одного класса интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования [Текст] / А. С. Миненко// Мат.физика и нелинейная механика. – 1993. – Вып. 16. – С. 48–52.
9. Миненко А. С. Вариационные задачи со свободной границей [Текст] / А. С. Миненко. – Киев : Наукова думка, 2005. – 354с.
10. Миненко А. С. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана [Текст] / А. С. Миненко, А. И. Шевченко // Доповіді НАН України. – 2010. –№ 4. – С. 30–34.
11. Minenko A. S. Axially symmetric flow [Text] / A. S. Minenko // Проблемы искусственного интеллекта. – 2016. – № 1 (2). – С. 5–14.
12. Миненко А. С. Приближенный анализ процесса кристаллизации металла при минимизации ступенчатой функции [Текст] / А. С. Миненко, Е. В. Радевич// Проблемы искусственного интеллекта. – 2017. – № 2 (5). – С. 14–25.

References

1. Paton B. E. *Izbrannie trudy* [Selected works], Kiev, E.O. Paton Electric Welding Institute of the NAS of Ukraine, 2008. 893 p.
2. Shevchenko A. I., Minenko A. S. *Metody issledovaniya nelineinykh modelei* [Methods of research of nonlinear models], Kiev, Naukova Dumka, 2012. 132 p.
3. Minenko A. S., *Variatsionnye zadachi so svobodnoi granitsei* [Variational problems with free boundaries], Kiev, Naukova Dumka, 2005. 341 p.
4. Shevchenko A.I., Minenko A. S., Sypko I. A. Modelirovanie odnogo klassa slozhnykh system s nechetkimi upravleniyami [Modeling for a class of complex systems with fuzzy controls]. *Proceedings of the NAS of Ukraine*, 2013, no. 8, pp. 52-54.
5. Minenko A. S. O minimizatsii odnogo integral'nogo funktsionala metodom Rittsa [On the minimization of an integral functional by the Ritz method]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2006, no. 10, pp. 1385-1394.

6. Minenko A. S. Axially symmetric flow. *Fifth SIAM conference on optimization*, Victoria, British Columbia, May 20-22, 1996, pp. 12.
7. Minenko A. S. Analitichnost' svobodnoi granitsy v odnoi zadache osesimmetrichnogo techeniya [Analyticity of the free boundary in a problem of axially symmetric flow]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1998, no. 12, pp. 1693-1700.
8. Minenko A. S. Problema minimuma odnogo klassa integral'nykh funktsionalov s neizvestnoi oblast'yu integrirovaniya [The problem of the minimum of one class of integral functionals with unknown region of integration]. *Mathematical physics and nonlinear mechanics*, 1993, vol. 16, pp. 48-52.
9. Minenko A. S. *Variatsionnye zadachi so svobodnoi granitsei* [Variational problems with free boundary], Kiev, Naukova Dumka, 2005. 354p.
10. Minenko A. S., Shevchenko A. I. Priblizhennyi analiz mnogomernoi konvektivnoi zadachi Stefana [Approximation analysis of the many-dimensional Stefan problem with convection]. *Proceedings of the NAS of Ukraine*, 2010, no. 4, pp. 30 – 34.
11. Minenko A. S. Axially symmetric flow. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2016, no. 1 (2), pp. 5–14.
12. Minenko A.S., Radevich E. V. Numerical Simulation of the Process Crystallization. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2017, no. 2 (5), pp. 14–25.

RESUME

A. S. Minenko, E. V. Radevich

Mathematical modeling of the process of metal crystallization

Background: The distribution of heat in various environments has a great influence on the nature of many important processes. Among the problems associated with the distribution of heat, there is a class of problems when the substance under analysis passes different phases with release or absorption of heat.

Materials and methods: The article considers the Stefan's problem for the liquid phase convection. An approximate solution of this problem is constructed using a small parameter. The process is controlled with the help of fuzzy logic.

Results: We suggest the solution of the problem by the methods of the first approximation and approximation of any order. The results are represented in the table 1 of the first part of the article. Also there are numerical experiments with certain parameters. The results are represented in the table 2 of the second part of the article. The analysis of numerical results shows the decrease of functional values for the first and the second approximations; this corresponds to the sense of thermal processes in the electroslag remelting.

Conclusion: The third part of the article discloses the modeling of the metal crystallization process with convection and impurities. The areas, where solid and liquid phases occur at a particular point of time, are identified taking into account the velocity vector, pressure, impurity concentration, and temperature of liquid and solid phases.

Статья поступила в редакцию 11.01.2018.