Л

УДК 519.711

В. И. Левин
Пензенский государственный технологический университет, Россия
440039, Пенза, пр. Байдукова, 1-а

НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

V. I. Levin
Penza State Technological University, Russia
440039, Penza, Baidukova pr.

CONTINUOUS LOGIC AND ITS APPLICATION TO RESEARCH OF SYSTEMS WITH UNCERTAINTY

В. И. Левин
Пензенський державний технологічний університет, Росія
440039, Пенза, пр. Байдукова, 1-а

БЕЗПЕРЕРВНА ЛОГІКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ДОСЛІДЖЕНЬ СИСТЕМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Непрерывная логика (НЛ) вводится как естественное обобщение дискретной логики (ДЛ). При этом большинство законов ДЛ остается в силе и для НЛ. Однако операцию отрицания НЛ нельзя определить так, чтобы она была дополнением, как, например, в двузначной логике, т.е. чтобы выполнялись законы исключенного третьего и противоречия. Поэтому структурно непрерывная логика существенно отличается от двузначной дискретной логики. Это и непрерывность переменных приводит к определенным отличиям НЛ от ДЛ в номенклатуре решаемых задач и методике их решения. Цель статьи – дать подробный обзор теории НЛ, ее истории, методики, результатов и применений в различных областях науки и техники.
Ключевые слова: непрерывная логика, законы логики, логическая функция, проблема полноты, применения непрерывной логики.

Continuous logic (CL) is introduced as a natural generalization of discrete logic (DL). At the same time, most of the DL laws remain in force for CL. However, the operation of negating of CL can not be defined so that it is a complement, as, for example, in two-valued logic, i.e. that the laws of the excluded third and the contradictions are fulfilled. Therefore, structurally continuous logic essentially differs from two-valued discrete logic. This and the continuity of the variables leads to certain differences between the CL and DL in the nomenclature of the problems being solved and the methods for their solution. The purpose of the article is to give a detailed review of the theory of CL, its history, methods, results and applications in various fields of science and technology.
Keywords: continuous logic, laws of logic, logical function, problem of completeness, applications of continuous logic.

Безперервна логіка (БЛ) вводиться як природне узагальнення дискретної логіки (ДЛ). При цьому більшість законів ДЛ залишається в силі і для БЛ. Однак операцію заперечення БЛ не можна визначити так, щоб вона була доповненням, як, наприклад, в двозначній логіці, тобто щоб виконувалися закони виключеного третього і протиріччя. Тому структурно безперервна логіка суттєво відрізняється від двозначної дискретної логіки. Це і безперервність змінних призводить до певних відмінностей БЛ від ДЛ в номенклатурі вирішуваних завдань і методикою їх вирішення. Мета статті – дати детальний огляд теорії БЛ, її історії, методики, результатів і застосувань в різних областях науки і техніки.
Ключові слова: безперервна логіка, закони логіки, логічна функція, проблема повноти, застосування безперервної логіки.

1 Общее описание непрерывной логики

Пусть $C=[A,B]$ – замкнутый интервал с серединой $M=(A+B)/2$. Основные операции НЛ определяются на C в виде

$$a\vee b=\max(a,b)\ \text{(дизъюнкция)},$$
$$a\wedge b=\min(a,b)\ \text{(конъюнкция)}, \tag{1}$$
$$\bar{a}=2M-a\ \text{(отрицание)}.$$

Знак $\wedge$ часто не ставится. Реже в качестве базовых выбирают операции включения $a\supset b=(\bar{a}+b)\wedge B$, импликации $a\to b=\bar{a}\vee b$, эквивалентности $(a\equiv b)=(a\vee\bar{b})(\bar{a}\vee b)$, неэквивалентности $(a\not\equiv b)=a\bar{b}\vee\bar{a}b$, Шеффера $a\,|\,b=\overline{ab}$, Вебба $a\downarrow b=\overline{a\vee b}$, противоречия $(a\neq a)=a\bar{a}$, тавтологии $(a\equiv a)=a\vee\bar{a}$, запрета $(a\overrightarrow{\to}b)=a\bar{b}$. Алгебры, образуемые множеством C вместе с теми или иными базовыми операциями на нем, называются алгебрами НЛ. Любая функция вида $C^n\to C$, в форме суперпозиции конечного числа базовых операций данной алгебры НЛ, примененных к аргументам $x_1,...,x_n\in C$, называется функцией НЛ. Число функций НЛ конечно, хотя множество всех функций вида $C^n\to C$ является бесконечным.

Наиболее разработанная алгебра НЛ – квазибулева алгебра

$$\Delta=(C;\vee,\wedge,\bar{\ }). \tag{2}$$

Любая функция НЛ в алгебре (2) на любом наборе аргументов принимает значение одного из аргументов или его отрицания. Поэтому задать такую функцию можно таблицей значений. От табличного можно перейти к аналитическому представлению функции, используя метод сочленения. Обратный переход осуществляется методом расчленения.

Число $P(n)$ функций НЛ от n аргументов в квазибулевой алгебре растет с увеличением n весьма быстро: $P(0)=2, P(1)=6, P(2)=84, P(3)=43918$. Для $n=0$ эти функции – константы

$$y_0=A, y_1=B. \tag{3}$$

Для $n=1$ – это константы y_0, y_1 и еще 4 функции, существенно зависящие от аргумента x

$$y_2=x, y_3=\bar{x}, y_4=x\vee\bar{x}, y_5=x\bar{x}. \tag{4}$$

Для $n=2$ – это 2 константы (3), 8 функций (4), зависящих от одного аргумента x_1 или x_2, 10 функций, зависящих от двух аргументов

$$\begin{gathered}y_{10}=x_1\vee x_2, y_{11}=x_1x_2, y_{12}=(x_1\vee\bar{x}_2)(\bar{x}_1\vee x_2), y_{13}=x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_2, y_{14}=\overline{x_1x_2},\\ y_{15}=\overline{x_1\vee x_2}, y_{16}=\bar{x}_1\vee x_2, y_{17}=x_1\vee\bar{x}_2, y_{18}=\bar{x}_1x_2, y_{19}=x_1\bar{x}_2,\end{gathered} \tag{5}$$

и еще 64 функции, зависящие от 2 аргументов, получаемые суперпозицией перечисленных 20 функций, либо составлением таблицы значений функции и последующим переходом к ее аналитическому представлению. Для $n=3$ функции НЛ включают все упомянутые выше функции, зависящие не более чем от 2 аргументов, и все функции, существенно зависящие от 3 аргументов. Из последних наиболее употребительны дизъюнкция и конъюнкция

$$y=x_1\vee x_2\vee x_3=\max(x_1,x_2,x_3), y=x_1x_2x_3=\min(x_1,x_2,x_3), \tag{6}$$

медиана и ее отрицание (инверсия)

$$y = \mathrm{med}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3,$$
$$y = \overline{\mathrm{med}}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3, \quad (7)$$

функции Шеффера и Вебба

$$y = \overline{x_1x_2x_3},\ y = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3}, \quad (8)$$

элементарные трехместные дизъюнкция и конъюнкция

$$y = x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_3,\ y = x_1\bar{x}_1x_2\bar{x}_2x_3\bar{x}_3. \quad (9)$$

Остальные функции, существенно зависящие от 3 аргументов, можно получить суперпозицией перечисленных выше функций либо составлением таблицы значений и последующим переходом к ее аналитическому представлению. Аналогично строятся множества функции НЛ от большего числа аргументов.

Заметим, что число $P(n)$ функций непрерывной логики от n аргументов растет при увеличении n гораздо быстрее, чем число $Q(n)$ функций двоичной логики. Например $Q(0) = 2, Q(1) = 4, Q(2) = 16, Q(3) = 256$. Поэтому изучать свойства функций непрерывной логики путем их перебора, как это делается в двоичной логике, нельзя. Так что ограничиваются изучением типовых функций НЛ.

Основные операции НЛ впервые рассмотрел Р. Мак-Нотон. Общее описание непрерывной логики и ее математический аппарат разработали С. А. Гинзбург, В. И. Левин, П. Н. Шимбирев. Обзор соответствующих работ приведен в [1], [2], [4], [6], [7], [9], [11], [12], [14], [21].

2 Законы непрерывной логики

НЛ является непосредственным обобщением ДЛ на случай непрерывного носителя C. Большинство законов ДЛ сохраняется и в НЛ:

$$a \vee a = a,\ aa = a \quad \text{(тавтология)}, \quad (10)$$
$$a \vee b = b \vee a,\ ab = ba \quad \text{(переместительный)}, \quad (11)$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ (ab)c = a(bc) \quad \text{(сочетательный)}, \quad (12)$$
$$a(b \vee c) = ab \vee ac,\ a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c) \quad \text{(распределительный)}, \quad (13)$$
$$\overline{a \vee b} = \bar{a}\bar{b},\ \overline{ab} = \bar{a} \vee \bar{b} \quad \text{(де Моргана)}, \quad (14)$$
$$a \vee ab = a,\ a(a \vee b) = a \quad \text{(поглощение)}, \quad (15)$$
$$\bar{\bar{a}} = a \quad \text{(двойное отрицание)}, \quad (16)$$
$$aA = A,\ aB = a,\ a \vee A = a,\ a \vee B = B \quad \text{(действия с константами)}, \quad (17)$$
$$a\bar{a}(b \vee \bar{b}) = a\bar{a},\ a\bar{a} \vee (b \vee \bar{b}) = b \vee \bar{b} \quad \text{(Клини)}. \quad (18)$$

Однако законы противоречия и исключенного третьего ДЛ здесь не действуют и заменяются на следующие законы

$$a\bar{a} = M - |a - M|,\ a \vee \bar{a} = M + |a - M|. \quad (19)$$

Так как операции НЛ применяются к непрерывным величинам, естественно их применение совместно с алгебраическими операциями над непрерывными величинами. При комбинировании операций НЛ со сложением и умножением появляются новые законы – распределительный при сочетании дизъюнкции и конъюнкции со сложением

$$a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c),\ a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c),$$
$$a - (b \vee c) = (a - b) \wedge (a - c),\ a - (b \wedge c) = (a - b) \vee (a - c), \quad (20)$$

и аналогичный закон при сочетании дизъюнкции и конъюнкции с умножением; закон спуска отрицания на слагаемые

$$\overline{a+b}=\bar{a}-b=\bar{b}-a \tag{21}$$

и др. Операции НЛ выражаются через алгебраические операции: сложения и умножения, при использовании нелинейных операций – единичной функции $I(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$ или модуля $|x|$. Так, дизъюнкция и конъюнкция НЛ выражаются в виде

$$a\vee b=0{,}5[a+b+|a-b|],\ a\wedge b=0{,}5[a+b-|a-b|]. \tag{22}$$

Возможность выражения операций НЛ через алгебраические операции (см. формулы (1), (22)) означает наличие связей между алгеброй и логикой.

Обобщая ДЛ, сама НЛ есть частный случай дистрибутивной структуры с псевдодополнением (то есть с операцией отрицания, которая не есть дополнение, т.к. не выполняются законы исключенного третьего и противоречия). Значения непрерывных переменных НЛ, принадлежащих интервалу $[A,B]$, имеют интерпретацию, сходную с ДЛ: граничное значение $x=A\,(x=B)$ считается мерой истинности абсолютно ложного (абсолютно истинного) высказывания, промежуточные значения $x, A<x<B$, считаются мерой истинности любого другого высказывания.

Некоторые основные законы НЛ для частного случая $C=[0{,}1]$ указал Р. Мак-Нотон. В общем виде законы НЛ изучали С.А. Гинзбург, В.И. Левин и Е. И. Беркович. Обзор соответствующих результатов содержится в [1], [2], [4], [6], [9], [14–16], [21].

3 Перечисление и стандартизация непрерывно-логических функций

Наиболее традиционными для логики задачами НЛ являются перечисление всех функций НЛ с данным числом аргументов и представление функций НЛ в стандартной форме.

Перечисление всех функций НЛ в алгебре (2) требует указать для них соответствующие аналитические выражения. Для этого можно использовать 2-этапную процедуру: 1) перечисление таблиц значений функций (таблицы для всех функций имеет одинаковый порядок следования вариантов упорядочения аргументов $x_1,...,x_n$ и их отрицаний $\bar{x}_1,...,\bar{x}_n$, отличаясь распределением значений функций, равных x_i или $\bar{x}_i$ между вариантами); 2) переход от таблиц к соответствующим аналитическим выражениям методом сочленения. Однако такой подход при $n\geq 3$ затруднителен. Поэтому на практике ограничиваются определенными классами функций НЛ, которые выделяют по признаку сходства с соответствующими классами функций ДЛ, простоты получения формулы, важности практического применения.

В качестве стандартных форм функции НЛ в алгебре (2) принимают дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы (ДНФ и КНФ). Они отличаются от аналогичных форм двузначной ДЛ тем, что их элементарные конъюнкции (дизъюнкции) могут вместе с аргументом x_i включать и его отрицание $\bar{x}_i$ (9). Переход от любого аналитического представления функции НЛ к ее ДНФ или КНФ аналогичен соответствующему для функции двузначной ДЛ. Он состоит в случае ДНФ в: 1) спуске отрицаний на более простые выражения согласно законам (14), (16); 2) раскрытии скобок по 1 закону (13), в случае КНФ – в: 1) таком же спуске отрицаний; 2) введении скобок согласно закону (13).

Пример 1. Перейдем от функции НЛ, заданной аналитически, к ее ДНФ.

$$(x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)\overline{\bar{x}_1x_4} = (x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3)(x_1 \vee \bar{x}_4) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 =$$
$$= x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4.$$

В качестве однозначных стандартных (канонических) форм функций НЛ принимают канонические ДНФ и КНФ. ДНФ однозначно представляет функцию НЛ, если она тупиковая (несократимая) дизъюнкция неразложимых элементарных конъюнкций. В свою очередь, элементарная конъюнкция неразложима в дизъюнкцию конъюнкций, если она фундаментальна, т.е. непротиворечива (не содержит одновременно x_i и $\bar{x}_i$) или противоречива, но содержит все аргументы данной функции, в прямом x_i или инверсном $\bar{x}_i$ виде.

Отсюда получаем следующий алгоритм приведения любой ДНФ функции непрерывной логики к канонической ДНФ: 1) выделить в ДНФ все фундаментальные конъюнкции; 2) каждую нефундаментальную конъюнкцию k (она противоречива и содержит не все аргументы функций) представить дизъюнкцией фундаментальных конъюнкций (для чего взять ее конъюнкцию с подходящей дизъюнкцией вида $x_j \vee \bar{x}_j$ (что не изменит величины k, содержащей $x_i\bar{x}_i \le M$, ибо $x_j \vee \bar{x}_j \ge M$) и раскрыть скобки; 3) из каждой пары сравнимых (в отношении $\le$) конъюнкций ДНФ исключить меньшую.

Только что полученная каноническая ДНФ по смыслу (но не по форме) аналогична совершенной ДНФ булевой функции.

Пример 2. Преобразуем функцию непрерывной логики, заданную в ДНФ, к канонической ДНФ:

$$y = x_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_2x_3\bar{x}_3.$$

Здесь первые две конъюнкции – фундаментальные. Третья конъюнкция – нефундаментальная, при умножении на $x_4 \vee \bar{x}_4$ разлагается в

$$x_1x_2\bar{x}_2x_3\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_2x_3\bar{x}_3\bar{x}_4.$$

Полученные две фундаментальные конъюнкции поглощаются первыми двумя фундаментальными конъюнкциями заданной ДНФ функции y. Окончательно, каноническая ДНФ функции

$$y = x_2x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4.$$

Любая функция НЛ, отличная от фундаментальной конъюнкции, разложима, т.е. класс неразложимых (элементарных) функций НЛ в алгебре (2) состоит из одних фундаментальных конъюнкций.

Вопросами задания и перечисления функций непрерывной логики занимались: К. М. Кларк, Д. Дюбуа, А. Прад, А. Кандель, В. И. Левин, М. Мукайдоно, П. Н. Шимбирев (см. обзоры [3], [5], [6], [9], [11–13]). Представление функций НЛ в стандартной форме изучали: Ф. П. Препарата, А. Кандель, Д. Дюбуа, А. Прад, В. И. Левин, П. Н. Шимбирев (см. обзоры [3], [6], [9], [11]).

4 Минимизация и декомпозиция непрерывно-логических функций

Минимизация функций непрерывной логики преследует ту же цель, что и минимизация функций дискретной логики – приведение функций к форме с минимальным числом вхождений переменных.

В алгебре (2) минимизация функций НЛ разработана лишь для функций, представленных в ДНФ. Ее задача – найти ДНФ с минимальным числом вхождений всех символов $x_i, \bar{x}_i$. Процедура минимизации аналогична соответствующей для булевых функций: 1) отыскание всех фундаментальных конъюнкций функции НЛ f (они играют роль элементарных конъюнкций СДНФ булевой функции) и представление f в канонической тупиковой форме; 2) отыскание всех простых импликант функции (как обычно, импликантой функции f считаем элементарную конъюнкцию k, такую, что $k \le f$; если k не поглощается другими импликантами, она называется простой); 3) нахождение минимального покрытия множества фундаментальных конъюнкций множеством простых импликант (например, по импликантным таблицам). Содержание шагов 1, 2 специфично для функций НЛ. О шаге 1 сказано выше. О шаге 2. В его основе лежит понятие консенсуса элементарных конъюнкций k_i: если $k_1 = x_i a, k_2 = \bar{x}_i b$, где a, b – конъюнкции других букв, то консенсус k_1 и k_2 – это множество таких противоречивых конъюнкций 1) ab, (если она противоречива); 2) конъюнкции $x_i \bar{x}_i ab, i = \overline{1,n}$ (если ab непротиворечива). Если k_1, k_2 не представимы в указанном виде ни при каком i, консенсус = 0.

Пример 3. Для элементарных конъюнкций $k_1 = x_1 \bar{x}_2 x_3, k_2 = x_2 \bar{x}_3$ консенсус

$$\{x_1 x_2 \bar{x}_2, x_1 x_3 \bar{x}_3\}.$$

Для элементарных конъюнкций $k_1 = x_1 x_2 x_3, k_2 = x_2 \bar{x}_3$ консенсус

$$\{x_1 x_2 x_3 \bar{x}_3, x_1 x_2 \bar{x}_2, x_1 \bar{x}_1 x_2\}.$$

Отыскание всех простых импликант функции НЛ f, представленной в тупиковой ДНФ $f = \bigvee_i k_i$, выполняется по такому алгоритму: 1) для некоторой пары (k_i, k_j) образуется консенсус; 2) к дизъюнкции $\bigvee_i k_i$ добавляются все конъюнкции, полученные на шаге 1; 3) удаляются все конъюнкции k_a, входящие в другие конъюнкции k_b (т.е. $k_a \le k_b$). Шаги 1–3 повторяются для новых пар (k_i, k_j) до тех пор, пока выражение функции f не перестанет изменяться. Окончательное выражение $f = \bigvee_i \tilde{k}_i$ в качестве конъюнкций $\tilde{k}_i$ будет содержать все простые импликанты функции f.

В связи с быстрым ростом числа функций НЛ при увеличении числа их аргументов и сложностью их минимизации важное значение имеет задача декомпозиции этих функций.

Декомпозицией функции НЛ $f(x), x = (x_1, ..., x_n)$ называется представление f в виде композиции нескольких функций НЛ с меньшим числом аргументов

$$f(x) = F[f_m(x^m), ..., f_1(x^1), x^i], \ x^i \subset x, \ i = \overline{0,m}. \tag{23}$$

Если множества $x^i, \ i = \overline{0,m}$ не пересекаются, декомпозиция называется разделительной, в противном случае – неразделительной. Представление (23) с $m = 1$ называется простой декомпозицией. На сегодня известен лишь алгоритм поиска простой декомпозиции функции НЛ в алгебре (2).

Вопросы минимизации и декомпозиции функций НЛ исследовали: А. Кандель, Д. Дюбуа, А. Прад, П. Н. Шимбирев (см. обзоры [3], [9], [11], [12]).

5 Анализ и синтез непрерывно-логических функций

Анализ и синтез функций НЛ отличаются от аналогичных задач в ДЛ. Пусть D_x – область значений вектора аргументов $x=(x_1,...,x_n)$, D_f – область значений функции НЛ $f(x)$ и имеется взаимно-однозначное соответствие

$$(x \in D_x) \Leftrightarrow (f(x) \in D_f). \tag{24}$$

Анализом функции f называется нахождение в соответствии с (24) области D_x по заданным области D_f и функции $f(x)$. Синтезом функции $f(x)$ называется построение по заданным областям D_x и D_f такой функции НЛ f, которая реализует соответствие (24). Основные методы анализа разработаны для частных случаев, когда f – многоместная дизъюнкция (конъюнкция), а D_f – полуинтервал или интервал. Они основаны на следующих эквивалентностях

$$\begin{gathered}\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \ge a\right) \Leftrightarrow (x_1 \ge a \text{ или...или } x_n \ge a); \left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \le b\right) \Leftrightarrow (x_1 \le b,...,x_n \le b);\\ \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \ge a\right) \Leftrightarrow (x_1 \ge a,...,x_n \ge a); \left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \le b\right) \Leftrightarrow (x_1 \le b \text{ или...или } x_n \le b).\end{gathered} \tag{25}$$

В общем случае, при произвольной функции НЛ f и ее области D_f, применяют формальные методы, разбивая D_f на подобласти – полуинтервалы, решая для каждой соответствующее неравенства и объединяя результаты. Иногда анализ функции $f(x)$ понимают как отыскание по заданным f и областям $D_{x_1},...,D_{x_n}$ для аргументов $x_1,...,x_n$ (составляющим в совокупности область D_x) соответствующей области D_f (24). Эта постановка обратна рассматриваемой выше, а ее решение проще. Оно основано на эквивалентностях

$$\begin{gathered}(a \le x_1 \le b, c \le x_2 \le d) \Leftrightarrow (a \vee c \le x_1 \vee x_2 \le b \vee d, ac \le x_1 x_2 \le bd),\\ (a \le x \le b) \Leftrightarrow (2M - b \le \bar{x} \le 2M - a).\end{gathered} \tag{26}$$

Задача синтеза функции НЛ в общем случае не имеет единственного решения, а алгоритм ее точного решения неизвестен. Возможный путь таков: 1) отбросить требование $x \le D_x$; 2) выбрать какую-либо типовую функцию $f(x)$; 3) проанализировать $f(x)$ по заданным условиям $f \in D_f$, найти соответствующее условие для $x: x \in D_x^{/}$; 4) если $D_x \subseteq D_x^{/}$, то $f(x)$ – решение задачи. В противном случае – переход к следующей функции $f(x)$ и т.д. Такой перебор при большом n невозможен, и тогда отказываются от требования $x \in D_x$, получая задачу синтеза: построить по заданной области D_f функцию $f(x)$, такую, что $f(x) \in D_f$. Но любая (кроме констант) функция НЛ $f(x)$ при подходящем x может принимать любое значение в C. В результате получаем задачу анализа: найти с помощью (24) область D_x по области D_f и выбранной функции.

6 Решение уравнений и неравенств непрерывной логики

Уравнения и неравенства НЛ аналогичны уравнениям и неравенствам ДЛ. Однако методы их решения особые, так как НЛ оперирует непрерывными множествами. Уравнением (неравенством) НЛ называется уравнение (неравенство)

$$f(a,x) \leqq F(a,x), \tag{27}$$

где f и F – заданные различные функции НЛ, а $a=(a_1,...,a_k)$ – вектор параметров, $x=(x_1,...,x_n)$ – вектор неизвестных. Частным решением уравнения (неравенства) (27) называется любой вектор x, для которого истинно равенство (неравенство) (27). Уравнения и неравенства НЛ классифицируются по числу неизвестных n и по сложности функций НЛ левой и правой частей, представленных в стандартной тупиковой ДНФ. Полное уравнение (неравенство) с 1 неизвестным в стандартной форме

$$ax \vee a^{/}\bar{x} \vee bx\bar{x} \vee c \leqq dx \vee d^{/}\bar{x} \vee lx\bar{x} \vee e. \tag{28}$$

Наибольшее число неизвестных и их отрицаний в одной элементарной конъюнкции стандартизированного уравнения (неравенства) называется порядком I. Для (28) $I=2$. Уравнения (неравенства) с $I=1$ называются линейными, а с $I \geq 2$ – нелинейными. Общий вид линейного уравнения (неравенства) с n неизвестными в стандартной форме

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} a_i^{/}\bar{x}_i\right) \vee c \leq \left(\bigvee_{i=1}^{n} d_i x_i\right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{n} d_i^{/}\bar{x}_i\right) \vee e. \tag{29}$$

Уравнения (неравенства) НЛ делятся на содержащие и не содержащие отрицание неизвестных. Основным методом решения уравнений (неравенств) НЛ является последовательное расчленение их правых и левых частей, позволяющее заменить исходное уравнение (неравенство) эквивалентным объединением систем более простых уравнений и неравенств.

Пример 4. Рассмотрим уравнение (неравенство) вида (27), в котором последняя операция в левой части – дизъюнкция НЛ

$$f_1(a,x) \vee f_2(a,x) \leqq F(a,x).$$

Используя определение дизъюнкции НЛ, уравнение (неравенство) можно расчленить, представив в виде объединения 2 систем уравнений – неравенств

$$\left\{\begin{matrix} f_1(a,x) \geq f_2(a,x) \\ f_1(a,x) \leqq F(a,x) \end{matrix}\right\} \bigcup \left\{\begin{matrix} f_1(a,x) < f_2(a,x) \\ f_2(a,x) \leqq F(a,x) \end{matrix}\right\}.$$

Здесь каждое полученное уравнение (неравенство) проще исходного, так как в одной части содержит меньше операций. Процесс упрощения можно продолжить расчленением правой части заданного уравнения (неравенства) и т.д. Этот процесс продолжается до получения нерасчленяемых уравнений и неравенств, дающих в совокупности решение заданного уравнения (неравенства).

Случай, когда последняя операция в левой или правой части заданного уравнения (неравенства) есть конъюнкция НЛ, рассматривается аналогично.

Теорию и методы решения уравнений и неравенств НЛ разработал В. И. Левин. Наиболее полные сведения по этому вопросу содержатся в [2]. Обзорные сведения можно также найти в [4–6], [9].

7 Дифференцирование и интегрирование непрерывно-логических функций

Как известно, функции ДЛ зависят от дискретных аргументов и потому не могут дифференцироваться и интегрироваться.

Функции НЛ зависят от непрерывных аргументов и потому могут дифференцироваться и интегрироваться. Трудность дифференцирования функций НЛ в том, что они всегда содержат точки излома, где производная не существует. Назовем функцию НЛ, образованную суперпозицией операций $\vee$ и $\wedge$ над аргументами x_i (и их отрицаниями), функцией 1-го (2-го) рода. Точка $x=(x_1,...,x_n)$ называется полурегулярной у функции 1-го рода, если она имеет ε-окрестность с постоянной упорядоченностью $x_1,...,x_n$. Точка $x=(x_1,\bar{x}_1,...,x_n,\bar{x}_n)$ называется регулярной у функции 2-го рода, если она имеет ε-окрестность с постоянной упорядоченностью $x_1,\bar{x}_1,...,x_n\bar{x}_n$. Для полурегулярности точки x (регулярности точки x) необходимо и достаточно, чтобы ее координаты были строго упорядочены по величине.

Справедливы следующие теоремы: 1) Любая функция НЛ 1-го рода имеет в каждой полурегулярной точке единственную производную по любому аргументу со значениями из множества {0,1}; 2) любая функция НЛ 2-го рода имеет в каждой регулярной точке единственную производную по любому аргументу, со значениями из множества {1, -1, 0}; 3) любая функция НЛ f в каждой точке существования ее производных $\partial f/\partial x_i$, $i=\overline{1,n}$, имеет не более 1 производной, отличной от 0. Основным методом дифференцирования функций НЛ является их последовательное расчленение с получением совокупности более простых выражений, справедливых в подобластях, и их дифференцированием. При необходимости используются также общие правила дифференциального исчисления (производная суммы, произведения и т.д.). Несколько примеров производных от функций НЛ:

$$\begin{aligned} &x'_x=1,(\bar{x})'_x=-1,(x\vee\bar{x})'_x=1(x-M)-1(M-x),(x\bar{x})'_x=1(M-x)-1(x-M),x\neq M;\\ &(x_1\vee x_2)'_{x_1}=1(x_1-x_2),(x_1x_2)'_{x_1}=1(x_2-x_1),x_1\neq x_2. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $1(x)$ – единичная функция. Условие $x\neq M$ исключает нерегулярную точку $x=M$, в которой третья и четвертая производные не существуют. Дифференциальное исчисление в НЛ служит источником новых тождеств (законов). Они появляются, в частности, при дифференцировании законов алгебры НЛ и могут рассматриваться как дифференциально-разностные уравнения, определяющие различные функции НЛ. Например,

$$(x_1\vee x_2)'_{x_1}+(x_1x_2)'_{x_1}=1,\ (x_1\vee x_2)'_{x_1}\cdot(x_1x_2)'_{x_1}=0. \tag{31}$$

Система из двух дифференциальных уравнений (31) определяет две функции НЛ – дизъюнкцию и конъюнкцию, которые являются решениями системы.

При дифференцировании функций НЛ с большим числом аргументов целесообразно приведение этих функций к стандартным формам, в которых дифференцируемая переменная выделена. От такой формы легко взять производную. Примеры выделенных форм в классе ДНФ:

$$ax\vee d,\ b\bar{x}\vee d\ . \tag{32}$$

Их производные

$$\begin{aligned} &(ax\vee d)'_x=1(ax-d)\cdot 1(a-x),\quad ax\neq d,\quad x\neq a;\\ &(b\bar{x}\vee d)'_x=1(bx-d)\cdot 1(\bar{x}-b),\quad b\bar{x}\neq d,\quad \bar{x}\neq b. \end{aligned} \tag{33}$$

Для функций непрерывной логики можно определить также производные высших порядков (2-го, 3-го и т.д.). При этом любая функция 1-го рода в каждой полурегулярной точке и любая функция 2-го рода в каждой регулярной точке имеют производные высших порядков и все они равны 0.

Функции НЛ, как функции непрерывных переменных, можно интегрировать. Для этого подынтегральную функцию последовательно расчленяют, получая совокупность более простых выражений, справедливых в своих подобластях, где их интегрируют.

При необходимости используются также обычные правила интегрирования (интеграл от суммы, разбиение интервала интегрирования и т.д.). Получаемые интегралы в силу непрерывности функций НЛ всегда существуют.

Дифференциальное и интегральное исчисление для функций НЛ исследовали Е. И. Беркович и В. И. Левин. Обзор их работ приведен в [12].

8 Проблема полноты в непрерывной логике

В НЛ, как в ДЛ, существует проблема полноты. Система функций НЛ $\{f_1,..., f_m\}$ называется полной (базисом) в классе R, если любую функцию из R можно представить суперпозицией функций $f_1,..., f_m$. В отличие от ДЛ, где R задан, а ищутся базисы, в НЛ обычно задан базис, а отыскивается класс R. Наиболее известные результаты здесь таковы: 1) система функций $\{\vee,\wedge\}$ есть базис для класса R_1 тех функций вида $C^n \to C$, которые принимают значение одного из аргументов; 2) система функций $\{\vee,\wedge,\bar{\ }\}$ есть базис для класса R_2 тех функций вида $C^n \to C$, которые принимают значение одного из аргументов или его отрицания; 3) системы $\{\overline{x_1 x_2}\}$ и $\{\overline{x_1 \vee x_2}\}$ являются базисами для класса функций R_1; 4) системы $\{\overline{x_1 x_2}, \bar{\ }\}$ и $\{\overline{x_1 \vee x_2}, \bar{\ }\}$ являются базисами для класса функций R_2; 5) система функций $\{\vee,\wedge,\supset\}$ есть базис для класса R_3 тех функций вида $C^n \to C$, которые представимы в виде

$$y = [A \vee (b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i)] \wedge B, \text{ где } b_0,...,b_n \text{ – целые числа.} \qquad (34)$$

Классы функций НЛ R_1, R_2, R_3 являются различными конечными подмножествами бесконечного множества всех функций НЛ. Математически эти классы достаточно узкие. Однако практически они весьма важны, так как элементарные операции НЛ (дизъюнкция, конъюнкция, и др.) адекватны процессам, происходящим во многих реально существующих системах. Эта адекватность, вместе с полнотой операций непрерывной логики, лежит в основе многочисленных применений непрерывной логики к изучению математических, технических, экономических, социальных и других объектов.

Вопросы полноты систем функций НЛ изучали Р. Мак-Нотон, Ф. П. Препарата, В. И. Левин. Обзор соответствующих результатов приведен в [5], [6], [9], [21].

9 Применения непрерывной логики в геометрическом моделировании

НЛ находит многочисленные применения в задачах управления. Эти применения основаны на возможности математического моделирования с помощью НЛ некоторых классов объектов и процессов управления. Простейшим является геометрическое моделирование. С него и начнем изложение.

Для задач управления основной интерес представляет следующая задача геометрического моделирования: для заданной кривой (поверхности, объема), характеризующей объект управления, дать аналитическое представление в виде соответствующего уравнения.

Применение НЛ к решению данной задачи дает возможность аналитического описания сложных изломанных, разрывных и многозначных кривых и поверхностей, областей и их границ, пересечения областей и т.д.

Необходимо отметить, что обычно НЛ требует меньше исходных параметров и приводит к более простому описанию объекта, чем другие методы. Так, изломанную кривую, полученную пересечением прямых $y = a_1 x + b_1$ и $y = a_2 x + b_2$, можно записать аналитически

$$y = (a_1 x + b_1) \underset{\wedge}{\vee} (a_2 x + b_2), \tag{35}$$

где операция конъюнкции НЛ $\wedge$ берется для выпуклой кривой, а операция дизъюнкции НЛ $\vee$ – для вогнутой. Представление (35) даже не требует знания точки пересечения прямых, благодаря чему это представление очень простое. Выражения типа (35) верны также для изломанных кривых, полученных пересечением двух или нескольких кривых.

Для аналитического представления разрывных кривых обозначим $\underset{a}{\vee}$ операцию $\vee$ при $a > 0$ и операцию $\wedge$ при $a < 0$; аналогично обозначим $\underset{a}{\wedge}$. Тогда, например, простейшую разрывную кривую, описываемую знаковой функцией $sign\ x$, можно представить аналитически как

$$sign\ x = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ x > 0 \\ -1,\ x < 0 \end{array} \right| = 1 \underset{x}{\vee} (-1). \tag{36}$$

Наиболее просто аналитическое представление области и ее границы для области-полосы. Так, горизонтальная полоса $b_1 \le y \le b_2$ имеет границу, описываемую уравнением НЛ

$$(y - b_1) \wedge (b_2 - y) = 0. \tag{37}$$

При этом вне полосы левая часть (37) отрицательна, а внутри полосы положительна. Поэтому уравнение полосы как области

$$(y - b_1) \wedge (b_2 - y) \wedge 0 = 0. \tag{38}$$

Аналогично получаются уравнения области и границ прямоугольника и более сложных фигур как на плоскости, так и в пространстве. Общий прием такого получения следующий. Если область на плоскости определена неравенством $f(x, y) \le 0$, то в терминах НЛ эту область и ее дополнение $f(x, y) > 0$ можно задать уравнениями

$$f(x, y) \vee 0 = 0, \quad -f(x, y) \wedge 0 = 0. \tag{39}$$

Таким образом, пересечение двух областей $f(x, y) \le 0$ и $\varphi(x, y) \le 0$ дается уравнением

$$[f(x, y) \vee 0] + [\phi(x, y) \vee 0] = 0. \tag{40}$$

Часть первой области, находящаяся вне второй, – уравнением

$$[f(x,y) \vee 0] + [\varphi(x,y) \wedge 0] = 0 \qquad (41)$$

и т.д.

Геометрические приложения НЛ изучали С. А. Гинзбург, И. А. Пресс, Е. И. Беркович и В. И. Левин. Обзор соответствующих результатов приведен в [1], [6], [12], [22], [23].

10 Непрерывно-логическая аппроксимация характеристик объектов управления

Пусть некоторая характеристика объекта управления в виде нелинейной функции одной переменной $y = f(x)$ аппроксимируется с заданной точностью кусочно-линейной функцией $F(x)$, состоящей из m линейных функций-образующих $f_1(x),\ldots f_m(x)$. Тогда выпуклую $f_{вып}$ (вогнутую $f_{вог}$) функцию f можно приближенно представить конъюнкцией (дизъюнкцией) НЛ функций-образующих

$$f_{вып}(x) \approx \widehat{F}(x) = \bigwedge_{i=1}^{m} f_i(x), \quad f_{вог}(x) \approx \breve{F}(x) = \bigvee_{i=1}^{m} f_i(x). \qquad (42)$$

В общем случае, когда f имеет и выпуклые, и вогнутые участки, эти участки разделяются с помощью вспомогательной функции $A(x)$, график которой соединяет точки перегиба кривой $f(x)$, и представление $f(x)$ получается логической суперпозицией функций $A(x), \widehat{F}(x)$ и $\breve{F}(x)$. Такой принцип аппроксимации функции работает и в случае кусочно-нелинейной аппроксимации. Пусть характеристика объекта управления в виде непрерывной функции двух переменных $z = f(x,y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) аппроксимируется с заданной точностью кусочно-плоской функцией $F(x,y)$, которая состоит из m плоских образующих $f_1(x,y),\ldots, f_m(x,y)$. Тогда функцию f в окрестности указанной точки можно приближенно представить суперпозицией дизъюнкции и конъюнкции непрерывной логики образующих $f_1,\ldots, f_m$, причем вид суперпозиции определяется характером точки (x_0, y_0) – эллиптическая, гиперболическая или параболическая. Так, для эллиптической точки (имеющей вид «холма» или «ямы») и выпуклой $f_{вып}$ (вогнутой $f_{вог}$) в окрестности этой точки функции f

$$f_{вып}(x,y) \approx \widehat{F}(x,y) = \bigwedge_{i=1}^{m} f_i(x,y), \quad f_{вог}(x,y) \approx \breve{F}(x,y) = \bigvee_{i=1}^{m} f_i(x,y). \qquad (43)$$

Более сложное локальное представление функции f в окрестности гиперболической точки (имеющей вид седла) или параболической точки. Для глобального логического представления $f(x,y)$ в некоторой области последняя разбивается на подобласти, в которых все точки являются однотипными (скажем, эллиптическими), записываются представления функции для каждой отдельной области, затем они соединяются в глобальное представление, с использованием при необходимости (при наличии точек перегиба у $f(x,y)$) вспомогательных функций $A(x,y)$, имеющих тот же смысл, что и для функции одной переменной. Данный принцип применим и для кусочно-нелинейной аппроксимации $f(x,y)$.

Возможна качественная НЛ-аппроксимация функций, т.е. определение только формы соответствующей кривой, без ее полного вычисления. Для этого достаточно найти отношения значений функций при различных наборах значений аргументов.

Так, качественная аппроксимация функции одной переменной $f(x)$ сводится к упорядочению множества ординат $\{y_1,...,y_n\}$, соответствующего выделенному множеству точек аргументов $\{(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\}$. Это упорядочение в терминах НЛ можно выполнить по рекуррентной формуле

$$y^{(r)}(n+1)=\begin{cases} y^{(1)}(n)y_{n+1}, & r=1; \\ y^{(r)}(n)y_{n+1}\vee y^{(r-1)}(n), & r=\overline{2,n}; \\ y^{(r+1)}(n)\vee y_{n+1}, & r=\overline{2,n}. \end{cases} \quad (44)$$

где $y^{(s)}(k)$ есть s-й в порядке возрастания, элемент k-элементного множества ординат $\{y_1,...,y_k\}$. Сложность такого алгоритма $O(n^2)$.

Количественную аппроксимацию функций с помощью НЛ изучали С. А. Гинзбург [1] и И. А. Пресс [23]. Качественная НЛ-аппроксимация разрабатывалась В. И. Левиным [6].

11 Непрерывная логика, нечеткие множества и решения в условиях неопределенности

Обычное множество определяют как собрание различающихся элементов. Поэтому любое такое множество A можно задать двоичной функцией принадлежности $\mu_A(u)$, определенном на универсальном множестве $U=\{u\}$ и равной 1 при $u\in A$ и 0 при $u\notin A$. Естественное обобщение обычного множества дает нечеткое множество A. Для него функция принадлежности $\mu_A(u)$ принимает любые значения из отрезка $[0,1]$. Эти значения характеризуют степень принадлежности элементов u данному множеству A. Нечеткие множества отражают расплывчатый характер зависимостей между объектами, возникающий вследствие неполной информации о них, и имеют важное значение для решения задач управления в условиях неопределенности.

В связи с большей общностью нечетких множеств для них вводятся новые понятия: носитель нечеткого множества A (подмножество U, для элементов u которого $\mu_A(u)>0$), высота множества A (величина $h_A=\sup\limits_{u\in U}\mu_A(u)$), точка перехода множества A (элемент $u\in A$, для которого $\mu_A(u)=0{,}5$), нормальное множество A (для него $h_A=1$), множество α-уровня A_α (обычное множество вида $A_\alpha=\{u\,|\,\mu_A(u)\geq\alpha\}$. В основе применения теории нечетких множеств лежит возможность перенесения на них всех операций и отношений с обычными множествами. Например, отношение включения между нечеткими множествами A и B определяется условием

$$(A\subset B)\Leftrightarrow\mu_A(u)\leq\mu_B(u), u\in U\,. \quad (45)$$

Операции дополнения $\overline{A}$, объединения $A\cup B$ и пересечения $A\cap B$ нечетких множеств определяются в виде

$$\mu_{\overline{A}}(u)=1-\mu_A(u)=\overline{\mu}_A(u),\ \mu_{A\cup B}(u)=\mu_A(u)\vee\mu_B(u),\ \mu_{A\cap B}(u)=\mu_A(u)\wedge\mu_B(u), \quad (46)$$

где $-,\vee$ и $\wedge$ – операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции НЛ. Эти операции подчиняются тем же законам, что и соответствующие операции над обычными множествами (коммутативность, ассоциативность, идемпотентность, дистрибутивность

пересечения и объединения относительно друг друга, законы двойного дополнения и де Моргана), кроме законов $A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \varnothing$, где $\varnothing = \overline{U}$ – пустое множество.

Используя базовые операции (46), можно получать новые операции над нечеткими множествами, например, разность и сумму множеств

$$A - B = A \cap \overline{B}, A + B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B), \tag{47}$$

декартово произведение $A_1 \times ... \times A_n$ множеств $A_1,...,A_n$ на соответствующих универсальных множествах $U_1,...,U_n$

$$\mu_{A_1 \times .. \times A_n}(u_1,...,u_n) = \mu_{A_1}(u_1) \wedge ... \wedge \mu_{A_n}(u_n). \tag{48}$$

Используя более общие операции, чем в НЛ, можно получать более общие операции над нечеткими множествами. Так, операция выбора r-го в порядке возрастания элемента множества $|a_1...a_n|^r : \{a_1...a_n\} \to a^r$ позволяет ввести операцию r-композиции нечетких множеств в виде

$$\underset{i=1}{\overset{n}{(r)}} A_i \Leftrightarrow \mu_{\underset{i=1}{\overset{n}{(r)}} A_i} = \left|\mu_{A_1(u)} ... \mu_{A_n(u)}\right|^r, \qquad r = \overline{1,n}. \tag{49}$$

Операция r-композиции нечетких множеств сильнее объединения, но слабее пересечения множеств. Она не имеет аналогов среди обычных теоретико-множественных операций.

Приведенные результаты полезны для принятия приближенных решений о значении одних нечетких переменных по известным значениям других, а также для основанного на таких решениях управления в условиях неопределенности. Пусть $y = f(x)$ – обычная функция. Тогда, если известно, что $x = a$, можно принять решение: $y|_{x=a} = f(a)$.

Пусть теперь $y = F(x)$ – нечеткая функция, т.е. нечеткое отношение в $OX \times OY$, где OX и OY – оси абсцисс и ординат. Пусть известно нечеткое подмножество A оси OX и надо определить, исходя из F, соответствующее нечеткое подмножество B оси OY. Образуем цилиндрическое нечеткое множество $\overline{A}$ с основанием A, являющееся аналогом вертикали $x = a$ функции f. Его функция принадлежности запишется в виде

$$\mu_{\overline{A}}(x, y) = \mu_A(x), \tag{50}$$

где μ_F – функция принадлежности известного множества A. Далее образуем пересечение полученного множества $\overline{A}$ с нечеткой функцией F. Имеем нечеткое множество $\overline{A} \cap F$ – аналог точки пересечения прямой $x = a$ с кривой $y = f(x)$. Функция принадлежности образованного множества

$$\mu_{\overline{A} \cap F}(x, y) = \mu_A(x, y) \wedge \mu_F(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_F(x, y), \tag{51}$$

где μ_F – функция принадлежности множества F. Теперь спроектируем множество $\overline{A} \cap F$ на ось OY. Получим искомое нечеткое подмножество B этой оси. Его функция принадлежности

$$\mu_B(y) = \bigvee_x \mu_{\overline{A} \cap F}(x, y) = \bigvee_x [\mu_A(x) \wedge \mu_F(x, y)]. \tag{52}$$

Как видно из (52), функция принадлежности искомого нечеткого множества B выражается через заданные функции принадлежности при помощи дизъюнкции и

конъюнкции НЛ. Изложенная процедура позволяет принимать приближенные решения о значении нечеткой функции F по известным значениям ее нечетких аргументов $x, y, \ldots$.

Разработкой теории нечетких множеств применительно к задачам управления занимались многие авторы. Обзор их работ в [5], [8], [13]. Операция r-композиции нечетких множеств изучена в работе [24].

12 Синтез функциональных генераторов и преобразователей формы информации

Непрерывная логика – удобное средство построения функциональных генераторов. Согласно разделу 11 любая нелинейная непрерывная функция одной переменной представима в виде (42) или обобщенно

$$f(x) = L[f_1(x), \ldots, f_n(x)], \tag{53}$$

где $f_i(x)$ – линейные функции-образующие, а L – набор операций НЛ. Согласно (53) функцию $f(x)$ можно реализовать функциональным генератором из двух последовательных блоков: функционального блока F образующих (вход X, выходы $f_1, \ldots, f_n$) и логического блока L (входы $f_1, \ldots, f_n$, выход $f(x)$). Блок F содержит сопротивления и источники, соединенные так, чтобы получить линейные образующие $f_1, \ldots, f_n$. Блок L состоит из диодов, соединенных так, чтобы реализовать требуемый в (53) набор операций НЛ. Это блочное построение генераторов остается при переходе к функциям двух и большего числа переменных. Данный подход, ввиду получающихся сложных реализаций, используют только для реализации функций ограниченного числа переменных. Для функций большого числа переменных используют более универсальные методы аппроксимации – интерполяционные полиномы. Для некоторых классов нелинейных функций функциональные генераторы строятся проще, чем описано выше. Таковы кусочно-линейные функции, известные как типовые нелинейности и состоящие из горизонтальных, вертикальных и наклонных линейных участков. Например, $|x|, c-|x|, sign x$ и многие другие. Эти функции выражаются через операции НЛ непосредственно (без аппроксимации), так что их реализация особенно проста. Так, $|x| = x \vee |-x|$, т.е. реализация модуль-функции $|x|$ выполняется схемой из 2 элементов: инвертора и дизъюнктора непрерывной логики.

Непрерывную логику можно применять к проектированию аналого-цифровых преобразователей. При n двоичных разрядах цифрового кода преобразуемой аналоговой величины x имеется $N = 2^n$ различных кодов и $N-1$ эталонных кодов $k_1, k_2, \ldots, k_{N-1}$, с которыми нужно сравнить x для нахождения ее кода k_x. Поэтому аналого-цифровое преобразование сводится к распознаванию множества ситуаций

$$x < k_1 < \ldots < k_{N-1}, k_1 \le x < k_2 < \ldots < k_{N-1}, \ldots, k_1 < \ldots < k_{N-1} \le x. \tag{54}$$

Но элементарное неравенство двух величин распознается вычислением дизъюнкции или конъюнкции НЛ. Поэтому подходящей суперпозицией этих операций можно построить функции НЛ, распознающие ситуации (54) и тем самым решающие задачу преобразования x в k_x.

Синтез функциональных генераторов с помощью непрерывной логики разрабатывали С. А. Гинзбург [1] и Л. И. Волгин [10], [12]. Синтез аналого-цифровых преобразователей с использованием НЛ исследовал П. Н. Шимбирев [11].

13 Непрерывно-логический анализ динамики дискретных автоматов. Динамическая диагностика

НЛ является удобным средством изучения динамики дискретных автоматов с непрерывным временем – моделей цифровых вычислительных и управляющих устройств. Пусть задан элемент-автомат с двумя двоичными входами x_1 и x_2 и одним двоичным выходом y, реализующий булеву функцию «конъюнкция»: $y = x_1 \& \ x_2$, $x_1, x_2 \in \{0,1\}$. На входы автомата действуют двоичные процессы

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, t < a, \\ 1, t \geq a, \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 1, t < b, \\ 0, t \geq b. \end{cases}$$

Найдем двоичный процесс $y(t)$ на выходе автомата – реакцию на заданные входные процессы. Обозначим $1(A,B)$ двоичный процесс в виде импульса в интервале времени (A,B). Реакция автомата равна импульсу $1(a,b)$ при $b \geq a$ и постоянному 0 при $b < a$. Интерпретируем постоянный 0 как импульс с совпадающим началом и концом. Тогда искомая реакция запишется с использованием дизъюнкции НЛ в виде

$$y(t) = \begin{cases} 1(a,b) & \text{при } b \geq a, \\ 0 = 1(a,a) & \text{при } b < a, \end{cases} \Bigg| = 1(a, a \vee b).$$

Аналогично рассчитываются процессы в других простых автоматах (элементах). Схемы сложных автоматов без памяти (без обратных связей) разбивают на последовательные (от входов к выходам) ступени глубиной в 1 элемент, затем, применяя вход-выходные соотношения элементов, сначала по заданным входным процессам автомата находят процессы на выходах 1-й ступени, по ним – процессы на выходах 2-й ступени и т.д., вплоть до вычисления процессов на выходах всего автомата. Расчеты для автоматов с памятью (с обратными связями) выполняются моделированием циркуляции информации по контурам обратной связи прохождением этой информации через подсхему автомата, не содержащую контуров. Таким образом, динамические процессы в различных автоматах (простых и сложных, с памятью и без памяти) выражаются аналитически в терминах операций НЛ. Этот аппарат позволяет решать и более сложные задачи, например, нахождение формы процессов на входах автомата, при которой процесс на его выходе имеет требуемую форму; построение автомата, преобразующего заданные входные процессы в заданный выходной процесс; расчет динамических процессов на выходе автомата с неопределенными (интервальными) временными параметрами и т.д.

Важное значение имеет динамика автоматов для технической диагностики. Последняя основана на подаче тестовых сигналов на входы устройства, получении его отклика y и сравнении его с откликом y_0 исправного устройства (откликами y_k при различных неисправностях k). В итоге принимают решение об исправности (неисправности) устройства в целом или же о наличии в нем какой-либо неисправности k. Проблема здесь в том, что многие отказы элементов устройства трудно обнаружимы, так как изменяют его отклик лишь на немногие входные воздействия. Для дискретных устройств, реализующих дискретные автоматы, обычно используют статические тестовые воздействия в виде входных наборов $(x_1,...,x_n)$. Это позволяет обнаружить и различить лишь часть константных неисправностей устройств, но не динамических неисправностей. Целесообразно расширить тестовые воздействия до

динамических, т.е. наборов входных процессов $x(t)=[x_1(t),...,x_n(t)]$. В результате становятся обнаружимыми и различимыми динамические неисправности устройств и повышается процент обнаружимых и различимых константных неисправностей. Анализ обнаруживающих способностей динамического теста $x(t)$ предполагает вычисление процесса-изменения $\Delta_s y(t)=y(t)\oplus y_s(t)$, где $y(t)$ и $y_s(t)$ – процессы на выходе исправного устройства и с неисправностью s, а $\oplus$ – сумма по модулю 2. Если процесс $\Delta_s y(t)=1$ на достаточном интервале времени, то тест $x(t)$ обнаруживает неисправность s, в противном случае – не обнаруживает. Для вычисления этого процесса строится модель из исправного устройства и устройства с неисправностью s, соединенных на выходе элементом «сумма по модулю 2», и находится ее отклик на воздействие $x(t)$ – это и будет процесс $\Delta_s y(t)$. Последний выражается через параметры процесса $x(t)$ с помощью операций НЛ. Аналогично анализируется различающая способность динамического теста, здесь вычисляемый процесс – изменение $\Delta_{rs} y(t)=y_r(t)\oplus y_s(t)$. Задача синтеза динамического теста $x(t)$, обнаруживающего данную неисправность s (различающего пару неисправностей r,s), эквивалентна синтезу входных процессов, дающих достаточный по времени единичный интервал в выходном процессе схемы-модели. Так что ее можно решить как задачу нахождения процессов на входах автомата, дающих нужную форму выходного процесса, в терминах НЛ. Динамическая теория дискретных автоматов на базе НЛ разработана В.И. Левиным [24], [25], а динамическая диагностика – им же совместно с А. М. Андрюшаевым [26].

14 Обработка информации с помощью непрерывно-логических методов

Непрерывная логика – удобное средство синтеза алгоритмов обработки информации: поиска, сортировки, фильтрации и т.д. Пусть дано неупорядоченное множество чисел $A=\{a_1,...,a_n\}$ и необходимо найти его r-й в порядке возрастания элемент a^r. Если $r=1(r=n)$, то a^r есть минимальный (максимальный) элемент, выражаемый через элементы $a_1,...,a_n$ с помощью конъюнкции (дизъюнкции) непрерывной логики в виде соответствующей функции $f_n^r, r=1,2,...$. Эта функция указывает, какие из элементов $a_1,...,a_n$ надо сравнить, какой из сравниваемых элементов выбрать (больший или меньший) и в каком порядке выполнять сравнения, чтобы получить искомый элемент a^r. Т.е. функция $f_n^r, r=1,2,...$ задает алгоритм поиска элементов $a_1,...,a_n$ в неупорядоченном множестве A. Доказано, что поисковая функция f_n^r, является симметрической булевой функцией и в общем случае, для любых $r, r=\overline{1,n}$, выражается суперпозицией двух указанных операций НЛ. Так что любые порядковые элементы $a^r, r=\overline{1,n}$ неупорядоченного множества A можно находить с помощью алгоритмов последовательного сравнения его элементов. При этом алгоритмы поиска имеют сложность $O(nr)$, позволяющую поиск элементов с любыми номерами r. Пусть необходимо неупорядоченное множество $A=\{a_1,...,a_n\}$ отсортировать, т.е. представить как упорядоченное множество $\{a^1,...,a^n\}$. Для этого достаточно синте-

зировать алгоритмы поиска всех порядковых элементов $a^1,...,a^n$ и соединить их, исключив повторяющиеся участки и, если нужно, упростить, используя подходящие законы НЛ. Наиболее эффективны алгоритмы сортировки с использованием итеративных по n алгоритмов поиска элементов a^r, например, алгоритм типа (44) со сложностью $0{,}5n(n-1)$, не требующий запоминания промежуточных результатов. Алгоритмы с запоминанием могут иметь и меньшую сложность вплоть до предельной $n\log_2 n$. Пусть для повышения надежности аналоговой схемы некоторый ее элемент заменяется группой из n параллельно работающих элементов. При отказе одного из элементов его выходной сигнал становится отличным от сигналов других элементов, что позволяет его отфильтровать. Для этого на выходе группы элементов ставится фильтр (восстанавливающий орган). Функция фильтра подбирается по статистике отказов элементов. При этом оптимальной является некоторая функция вида f_n^r. Она включает только операции конъюнкции и дизъюнкции НЛ. Поэтому фильтр – аналоговая схема из элементов И, ИЛИ. Применение НЛ в обработке информации дано в работах [6], [27].

15 Исследования систем обслуживания

Известны вероятностные системы обслуживания, где заявки поступают в случайные моменты времени и обслуживаются за случайное время. Такие системы изучают с помощью теории вероятностей. Представляют интерес и регулярные системы обслуживания, где заявки поступают в детерминированные моменты времени и обслуживаются за детерминированное время. Простейшая постановка задачи здесь такова. Рассматривается система из M блоков, соединенных в структуру. В систему поступает конечная последовательность работ. Каждая работа состоит из различных операций, выполняемых соответствующими блоками. Различные работы отличаются составом операций и соответственно этому, технологическим маршрутом их прохождения в системе. Задаются режим поступления работ в систему и времена a_{ij} выполнения операций j в блоках i. Ставятся задачи: расчет характеристик быстродействия и загрузки системы в зависимости от ее структуры (последовательная, параллельная и т.д.), режима работы и матрицы времен операций $A=\|a_{ij}\|$; анализ изменения этих характеристик при варьировании структуры, режима работы системы и матрицы A; синтез оптимального режима подачи работ, обеспечивающего максимум быстродействия (загрузки) системы. Задачи расчета и анализа решаются с помощью НЛ. Так, для последовательной системы время T выполнения всех работ, являющееся характеристикой быстродействия системы, выражается в виде

$$T=\bigvee_q \sum\nolimits_q^{/} a_{ij}\ , \tag{55}$$

где $\sum_q^{/} a_{ij}$ – сумма элементов матрицы A, расположенных вдоль q-го ступенчатого пути из верхней левой клетки в правую нижнюю, $\vee$ – дизъюнкция НЛ. Дизъюнкция НЛ сумм элементов a_{ij} в правой части формулы (55) есть числовая характеристика матрицы A, называемая дизъюнктивным логическим определителем (ЛО) $A^{\vee}$ матрицы A.

Другими словами, характеристика системы T равна дизъюнктивному ЛО от ее матрицы времен операций A. Далее, загрузка последовательной системы полностью определяется матрицами $\underline{T} = \|\underline{t}_{ij}\|$ и $\overline{T} = \|\overline{t}_{ij}\|$ моментов начала и окончания выполнения работ j блоками i. Эти матрицы выражаются с помощью непрерывной логики в виде

$$\underline{T} = A^* - A, \overline{T} = A^*, \tag{56}$$

где $A^* = \|A_{ij}^{\vee}\|$ – матрица, присоединенная к A, ее элемент $A_{ij}^{\vee}$ есть дизъюнктивный ЛО, образованный i первыми строками и j первыми столбцами матрицы A. Расчет и анализ с помощью НЛ сложных систем (параллельные, параллельно-последовательные и т.д.) выполняются аналогично. Синтез систем выполняется с использованием результатов их расчета. Пример синтеза последовательной системы см. в параграфе 17.

Проблемы изучения систем обслуживания с помощью НЛ в рассмотренной постановке подробно изучены в [9]. Другие постановки задач, использующие автоматные модели, изложены в [28].

16 Непрерывная логика в дискретной оптимизации и теории расписаний

Характерные задачи дискретной оптимизации, решаемые с помощью непрерывной логики, – это задачи оптимального распределения ограниченных ресурсов между объектами, что естественно, так как операции дизъюнкции и конъюнкции НЛ есть взятие максимума и минимума.

Пусть, например, надо распределить трех кандидатов по трем должностям так, чтобы все должности были заняты, все кандидаты трудоустроены, а суммарная эффективность была максимальной. При этом известны значения a_{ij} эффективности кандидатов i в должностях j. Каждому распределению должностей соответствует своя распределяющая сумма элементов матрицы $A = \|a_{ij}\|$, включающая ровно один элемент из каждой строки и каждого столбца A. Так что задача сводится к отысканию максимальной распределяющей суммы A^0 элементов матрицы A. Общее выражение этой суммы в терминах операций НЛ, дающее алгоритм полного перебора для отыскания A^0:

$$\begin{aligned} A^0 = {} & (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \vee (a_{11} + a_{23} + a_{32}) \vee (a_{12} + a_{21} + a_{33}) \vee \\ & \vee (a_{12} + a_{23} + a_{31}) \vee (a_{13} + a_{21} + a_{32}) \vee (a_{13} + a_{22} + a_{31}). \end{aligned} \tag{57}$$

Объединив в (57) 1-ю скобку со 2-й, 3-ю с 4-й, 5-ю с 6-й и вынеся за скобки в каждой паре общее слагаемое, получим выражение алгоритма сокращенного перебора отыскания A^0, в котором на 3 операции меньше

$$\begin{aligned} A^0 = {} & \{a_{11} + [(a_{22} + a_{33}) \vee (a_{23} + a_{32})]\} \vee \{a_{12} + [(a_{21} + a_{33}) \vee (a_{23} + a_{31})]\} \vee \\ & \vee \{a_{13} + [(a_{21} + a_{32}) \vee (a_{22} + a_{31})]\}. \end{aligned} \tag{58}$$

Выражение (58) позволяет представить A^0 в обозримой форме. Для этого назовем A^0 суммирующим ЛО матрицы A, а ЛО матрицы, полученной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, – логическим дополнением A_{ij}^0 элемента a_{ij} в ЛО A^0. Тогда (58) есть разложение ЛО A^0 по элементам 1-й строки

$$A^0 = \bigvee_{i=1}^{3} (a_{1i} + A_{1i}^0). \tag{59}$$

Аналогичные (59) разложения верны для любых строки и столбца, они не зависят от размерности A. Формула (59) дает итеративный по числу должностей (кандидатов) алгоритм решения. Возможны более общие и экономные алгоритмы, получаемые разложением A^0 по совокупности строк (столбцов).

Другой класс задач оптимизации, решаемых с помощью НЛ, это задачи оптимизации порядка подачи заявок в регулярных системах обслуживания с целью минимизации времени T, известные еще как задачи теории расписаний. Рассмотрим последовательную систему с m блоками, на вход которой поступает n различных работ, каждая из m операций, с матрицей времен операций $A = \|a_{ij}\|, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Введем дизъюнктивные ЛО $A^{\vee}$ не только для всей матрицы A, но и для пар ее соседних столбцов i, j:

$$A^{\vee}_{sr}(i, j) = \begin{vmatrix} a_{si} & a_{sj} \\ \vdots & \vdots \\ a_{ri} & a_{rj} \end{vmatrix}^{\vee}, 1 \le s \le r \le m. \tag{60}$$

Тогда достаточным условием оптимальности порядка работ $P = (i_1,...,i,j,...,i_n)$ является выполнение для любой его пары соседних работ (i, j) системы неравенств

$$\begin{gathered} A^{\vee}_{s,s+1}(i, j) \le A^{\vee}_{s,s+1}(j,i),\ s = \overline{1,m-1};\quad A^{\vee}_{s,s+2}(i, j) \le A^{\vee}_{s,s+2}(j,i),\ s = \overline{1,m-2};... \\ ..., A^{\vee}_{1m}(i, j) \le A^{\vee}_{1m}(j,i), \end{gathered} \tag{61}$$

а необходимым условием оптимальности этого порядка – выполнение для любой пары соседних работ (i, j) объединения систем неравенств

$$\begin{gathered} A^{\vee}_{12}(i, j) \le A^{\vee}_{12}(j,i) \text{ или } A^{\vee}_{k3}(i, j) \le A^{\vee}_{k3}(j,i),\ k = \overline{1,2}, \text{ или...} \\ ...\text{или } A^{\vee}_{km}(i, j) \le A^{\vee}_{km}(j,i), k = \overline{1,m-1}. \end{gathered} \tag{62}$$

Построив орграф приоритетов работ, где упорядоченные пары соседних вершин означают пары работ, удовлетворяющие достаточным условиям (61), и найдя гамильтонов путь в графе, получим оптимальную последовательность работ. Ее можно найти также построив орграф приоритетов работ по необходимым условиям (62), найдя все гамильтоновы пути в графе, и взяв путь с минимальным временем T выполнения всех работ (это время вычисляется согласно (55)).

Применение НЛ к дискретной оптимизации подробно изложено в [9], [22]. Отдельные вопросы изложены в [14–16], [18], [20].

17 Логико-автоматный подход к исследованию надежности систем

Широкий класс задач управления, к которым применимы методы НЛ, решаются весьма эффективно с помощью модели динамики автомата. При этом строится модель изучаемой системы в виде динамического автомата, входные процессы которого моделируют заданные величины, выходные процессы – искомые величины, а реализуемые функции – известную зависимость между этими величинами. В итоге решение задачи сводится к отысканию выходных процессов автомата по его входным процессам, с использованием НЛ. В качестве первого примера рассмотрим задачу исследования надежности систем.

Рассмотрим систему с N блоками, состояния которых обозначим $a_1,...,a_N$. Каждый блок i может находиться в работоспособном $(a_i = 1)$ или неработоспособном $(a_i = 0)$ состоянии. Система в целом (обозначим ее состояние y) также может находиться в работоспособном $(y = 1)$ или неработоспособном $(y = 0)$ состоянии. Состояние

системы в любой момент времени определяется только состояниями блоков. Таким образом, модель надежности системы записывается в виде булевой логической функции

$$y = f(a_1,...,a_N)\,. \tag{63}$$

Согласно (63) ненадежной системе соответствует модель – автомат без памяти, получающий на N входах двоичные процессы $a_1(t),...,a_n(t)$, моделирующие эволюцию надежности блоков, и выдающий на выходе двоичный процесс $y(t)$, моделирующий эволюцию надежности системы.

Таким образом, для нахождения надежностного процесса в системе $y(t)$ по известным надежностным процессам в ее блоках надо по входным процессам автомата – модели системы вычислить его выходной процесс. При этом используется методика параграфа 14, и результат выражается в терминах НЛ. Последнее означает, что моменты отказов и восстановлений системы выражаются через аналогичные моменты блоков с помощью операций НЛ. Применение НЛ к изучению надежности описано в [7].

18 Логико-автоматное моделирование пространственных сцен и распознавания образов

Еще два класса задач, эффективно решаемых с помощью модели динамики автомата – анализ пространственных сцен и распознавание образов, что является важной частью многих систем управления. Рассмотрим простейшую сцену – на прямой линии, где объектами являются n интервалов $(a_k, b_k), k = \overline{1,n}$, а задача состоит в отыскании картины взаиморасположения данных интервалов. Интерпретируем прямую как ось времени. Тогда интервалы на прямой можно интерпретировать как временные. Рассмотрим автомат без памяти с n входами и 1 выходом, на котором реализуется булева логическая функция f_n^r (симметрическая булева функция индекса r от n переменных). Пусть на k-м входе автомата действует процесс $x_k(t)$ в виде единичного импульса $1(a_k, b_k)$ – интервал его действия совпадает с k-м из заданных интервалов сцены. По определению функция $f_n^r = 1$ только если ровно r ее переменных (безразлично какие) равны 1. Так что процесс на выходе автомата равен 1 только в тех интервалах, в которых ровно r входных процессов (безразлично каких) равны 1. То есть процесс на выходе автомата с функцией f_n^r равен 1 только на тех участках, на которых пересекаются ровно r объектов (интервалов) сцены. Итак, система автоматов с функциями $f_n^r, r = \overline{0,n}$, имеющих каждый n входов с входными процессами $x_k(t) = 1(a_k, b_k), k = \overline{1,n}$, и один выход $y_r, r = \overline{0,n}$, полностью моделирует своими выходными процессами $y_0(t),..., y_n(t)$ искомую картину взаиморасположения интервалов на прямой.

В случае плоской сцены объектами являются прямоугольники на плоскости, задача состоит в отыскании плоской картины их взаиморасположения. Указанная задача решается методом сечений, т.е. разбиением исходной сцены на несколько сцен на прямой с помощью семейства параллельных секущих, решением соответствующих задач и объединением их результатов. Метод сечений позволяет анализировать и сцены более высокой размерности, путем последовательного снижения размерности.

Рассмотрим плоскую фигуру Φ (образ) и систему плоских эталонов, определяющих классы фигур. Φ принадлежит классу K, если она ближе к K-му эталону, чем к другим. Задача распознавания образов – установить, к какому из классов принадлежит Φ. Для решения надо сравнить Φ с каждым эталоном K, получить значения показателя их близости $\Pi(K)$ и отнести Φ к тому классу, для которого $\Pi = \min$. Рассечем Φ и эталон, рассматриваемые в системе координат (x, y), семейством параллельным равноотстоящих прямых вдоль оси x. Каждая прямая i пересекается с Φ несколько раз, каждый раз входя в Φ и выходя из нее. Аналогично пересекается она с эталонами. Так что точкам пересечения прямых i с Φ можно поставить в соответствие двоичные процессы $u_i(x)$, а точкам их пересечения с эталоном – двоичные процессы $v_i(x)$. Эти процессы дают полную информацию о Φ и эталоне. Показатели близости Φ и эталона можно представить как булевы функции f от $u_i(x), v_i(x)$. Например, возможен показатель

$$\Pi(x) = \bigvee_i u_i(x) \oplus v_i(x). \tag{64}$$

Каждой функции f можно поставить в соответствие модель-автомат без памяти, получающих на входах двоичные процессы $u_i(x), v_i(x)$, моделирующие Φ и эталон, и выдающий на выходе двоичный процесс $\Pi(x)$, моделирующий показатель близости Φ и эталона. Таким образом, для вычисления показателя близости Π заданных фигуры Φ и эталона необходимо по входным процессам автомата-модели изучаемой системы вычислить его выходной процесс, используя при этом методику параграфа 14. Применение НЛ к изучению пространственных сцен описано подробно в [6], а ее применение к распознаванию образов – в [29].

19 Логико-автоматные методы моделирования социальных и экономических систем

Для эффективного управления социальными и экономическими системами необходимы их подходящие математические модели. Одними из таких моделей являются модели динамического автомата, основанные на НЛ.

Рассмотрим, например, моделирование поведения социальных групп, состоящих из отдельных индивидуумов. Последние могут находиться в 2 состояниях: работоспособном (т.е. способности взаимодействовать с другими индивидуумами) или неработоспособном. Группа в целом также может находиться в 2 состояниях – работоспособном (пригодность к выполнению группового задания) или неработоспособном. Известна статическая модель группы – зависимость ее состояния от состояний всех индивидуумов в произвольный момент времени t. Задана динамика изменения состояния каждого индивидуума во времени. Требуется определить динамику изменения состояния группы во времени. Поставим в соответствие работоспособному (неработоспособному) состоянию индивидуума и группы значение $1(0)$. Тогда динамике изменения состояния i-го индивидуума соответствует двоичный процесс $x_i(t), x_i \in \{0,1\}$, а динамике изменения состояния группы – двоичный процесс $y(t), y \in \{0,1\}$. Заданной статической модели группы соответствует булева логическая функция состояния группы

$$y = f(x_1, ..., x_n), n - \text{ число индивидуумов} \tag{65}$$

Функция (65) определяет некоторый автомат без памяти – модель динамики группы. На входы автомата-модели поступают процессы $x_i(t)$, моделирующие дина-

мику (поведение) отдельных индивидуумов i, а с выхода снимается процесс $y(t)$, моделирующий динамику изменения состояния группы. Таким образом, для решения задачи надо по известным входным процессам автомата вычислить его выходной процесс, используя методы параграфа 14.

Множество практических задач управления персоналом можно описать в такой форме. Имеется n служащих 1-го вида, p служащих 2-го вида,..., q служащих k-го вида и M управляющих. Каждый из них может находиться в состоянии занятости или незанятости исполнением своих обязанностей. Заданы интервалы времени занятости (незанятости) всех сотрудников. Проводится коллективное мероприятие, в котором должны участвовать все управляющие, а также не менее n' служащих 1-го вида, не менее p' служащих 2-го вида,..., не менее q' служащих k-го вида (безразлично, кто именно). Требуется найти интервалы, в которых возможно проведение этого мероприятия. Поставим в соответствие состоянию незанятости (занятости) работников значение $1(0)$. Тогда заданной динамике изменения состояния i-го служащего 1-го вида соответствует некоторый двоичный процесс $x_i(t)$, аналогично, для i-го служащего 2-го вида – двоичный процесс $y_i(t)$,..., для i-го служащего k-го вида – двоичный процесс $z_i(t)$, для i-го управляющего – двоичный процесс $u_i(t)$. В этих процессах интервалы со значениями 1 и есть заданные интервалы незанятости служащих и управляющих. Состояние всей системы опишем переменной V, равной 1 в момент t, если в этот момент возможно проведение коллективного мероприятия, и равно 0, если невозможно. В реальности V зависит от t, т.е. является некоторым двоичным процессом $V(t)$. Так что задача сводится к нахождению процесса $V(t)$. Для того чтобы в некоторый момент времени могло проводиться коллективное мероприятие, нужно, чтобы в этот момент были незаняты все управляющие, а также n' или $n'+1$ или $\ldots n$ служащих 1-го вида, p' или $p'+1$ или ... p служащих 2-го вида;...; q' или $q'+1$ или ... q служащих k-го вида. Отсюда, вводя симметрические булевы функции f_n^r, имеем зависимость неизвестной переменной V от известных x_i, y_i, z_i, u_i в виде

$$V = \left(\mathop{\&}_{i=1}^{M} u_i \right) \& \left[\bigvee_{r=n'}^{n} f_n^r(x_1,\ldots,x_n) \right] \& \left[\bigvee_{r=p'}^{p} f_p^r(y_1,\ldots,y_p) \right] \& \ldots \& \left[\bigvee_{r=q'}^{q} f_q^r(z_1,\ldots,z_q) \right]. \qquad (66)$$

Булева логическая функция состояния системы определяет соответствующий автомат без памяти – модель системы. Теперь для решения задачи надо по известным входным процессам автомата-модели $u_i(t), x_i(t), y_i(t), z_i(t)$ вычислить методами § 14 его выходной процесс $V(t)$. Интервалы единичных значений процесса $V(t)$ и будут теми интервалами времени, в которых возможно проведение коллективного мероприятия. Значительное число других социальных, экономических, политических систем также можно успешно моделировать изложенным методом. Таковы, например, система управления занятостью населения, система объединения потоков политических (исторических и т.д.) событий регионального уровня в аналогичный общегосударственный поток, система нивелирования индивидуальностей и превращения толпы в коллектив и некоторые другие.

Логико-автоматные методы моделирования социальных, экономических, политических и др. систем изложены в [30], [31].

Заключение

Можно ожидать дальнейшего расширения фронта исследований в области непрерывной логики. В теории непрерывной логики основное внимание будет, по-видимому, уделяться разработке различных новых обобщений этой дисциплины, позволяющих расширять возможности НЛ в том или ином направлении. Не будут, вероятно, забыты и традиционные задачи НЛ: перечисление функций непрерывной логики, их представление и минимизация; здесь будут искаться новые, более эффективные решения. Однако особенно большого продвижения можно ожидать в области применения непрерывной логики. В первую очередь, это относится к исследованию операций, моделированию сложных экономических систем и нейронных структур, описанию и анализу процессов в общественных и гуманитарных науках: социологии, истории и политологии.

Стоит заметить, что кроме изложенной в этой статье НЛ, существует другая бесконечнозначная логика. Это $\aleph_0$-значная логика Лукасиевича, определенная на отрезке [0,1] и имеющая базисные операции, аналогичные соответствующим в непрерывной логике. Но, как показал Р. Мак-Нотон [21], не для всех наборов значений аргументов, для которых определены функции НЛ, определены соответствующие функции логики Лукасиевича. В работах В. И. Левина [2], [3], [6], [7], [9] установлено, что моделирование прикладных систем с помощью НЛ практически требует, чтобы ее операции определялись на отрезке $[A, B]$, где $A < 0, B > 1$. Таким образом, теоретические и прикладные возможности непрерывной логики шире, чем логики Лукасиевича.

Более подробные сведения по затронутым в данном обзоре вопросам можно найти в обобщающих работах [1–13]. Там же имеется обширная библиография.

Кратко изложим содержание русских работ [1], [2], [4], [6–12]. В работе [1] изложены основы НЛ применительно к задачам аппроксимации функций, синтеза функциональных преобразователей и расчета электрических цепей. В [2], [4] изложена теория НЛ, включая уравнения и неравенства НЛ и их применение к теории автоматов и расчету цифровых устройств. В [6] рассмотрены НЛ, ее обобщения и применения в теории автоматов, обработке информации, теории надежности, принятии решений, оптимизации. В [7] показана адекватность НЛ и задачи анализа надежности систем, и на основе этого построена логическая теория надежности технических систем. В [8] описаны различные нечеткие логики и их применение к принятию решений и оптимизации. В [9] рассмотрен математический аппарат НЛ и ее обобщений и их применение к системам обслуживания, оптимизации, теории расписаний, моделированию экономических систем. В [10] описано одно обобщение НЛ и его применение к расчету и синтезу аналоговых устройств. В [11] разработана теория непрерывной и непрерывно-дискретной логик с использованием теории алгебраических структур, включая вопросы минимизации функций НЛ; показано их применение к синтезу функциональных и аналогово-цифровых преобразователей. В [12] дан обзор основных результатов в области НЛ и ее обобщений, а также их применений в различных областях (математика, экономика, техника, теория систем, биология и др.). Наиболее полное изложение НЛ и ее применений дано в [32], [33].

Настоящая работа продолжает цикл исследований автора по разработке математического аппарата и математических моделей НЛ. От опубликованных ранее работ автора [32–37] она отличается изложением большого числа моделей, связанных с применением НЛ в науке, технике, экономике и социологии.

Список литературы

1. Гинзбург С. А. Математическая непрерывная логика и изображение функций [Текст] / С. А. Гинзбург. – М. : Энергия, 1968.
2. Левин В.И. Введение в динамическую теорию конечных автоматов [Текст] / В. И. Левин. – Рига : Зинатне, 1975.
3. Kandel A. Fuzzy Switching and Automata. Theory and Application [Текст] / A. Kandel, S. C. Lee. – N.Y. : Grain, Russak and Co., 1979.
4. Левин В. И. Динамика логических устройств и систем [Текст] / В. И. Левин. – М. : Энергия, 1980.
5. Коффман А. Введение в теорию нечетких множеств [Текст] / А. Коффман. – М. : Радио и связь, 1982.
6. Левин В. И. Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики [Текст] / В. И. Левин. – М. : Радио и связь, 1982.
7. Левин В. И. Логическая теория надежности сложных систем [Текст] / В. И. Левин. – М. : Энергоатомиздат, 1985.
8. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта [Текст] / под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986.
9. Левин В. И. Структурно-логические методы исследования сложных систем с применением ЭВМ [Текст] / В. И. Левин. – М. : Наука, 1987.
10. Волгин Л. И. Синтез устройств для обработки и преобразования информации в элементном базисе реляторов [Текст] / Л. И. Волгин. – Таллинн : Валгус. 1989.
11. Шимбирев П. Н. Гибридные непрерывно-логические устройства [Текст] / П. Н. Шимбирев. – М. : Энергоатомиздат, 1990.
12. Волгин Л.И. Непрерывная логика. Теория и применения [Текст] / Л. И. Волгин, В. И. Левин. – Таллинн : АН Эстонии,. 1990.
13. Прикладные нечеткие системы [Текст] / под ред. Т. Тэрано, К. Асаи и М. Сугэно. – М. : Мир. 1993.
14. Непрерывная логика и ее применение в технике, экономике и социологии. Тезисы докладов 1 Всероссийской научной конференции [Текст] / под ред. В. И. Левина. – Пенза : Изд-во Пензенского дома научно-технической пропаганды, 1994.
15. Непрерывно-логические методы и модели в науке, технике и эко-номике. Труды международной научно-технической конференции [Текст] / Под ред. В. И. Левина. – Пенза : Изд-во Приволжского дома знаний, 1995.
16. Непрерывные и смежные логики в технике, экономике и социологии. Материалы международной конференции [Текст] / под ред. В. И. Левина. – Пенза : Изд-во Приволжского дома знаний, 1996.
17. Непрерывно-логические системы модели и алгоритмы. Труды международной научно-технической конференции Т. 2 [Текст] / Под ред. Л.И. Волгина. – Ульяновск : Изд-во Ульяновского гос. технического ун-та, 1995.
18. Непрерывная и смежные логики в информатике, экономике и социологии. Материалы Всероссийской научно-технической конференции [Текст] / Под ред. В.И. Левина. – Пенза : Изд-во Приволжского дома знаний, 1997.
19. Реляторные и непрерывно-логические сети и модели. Труды международной научно-технической конференции «Нейронные, реляторные и непрерывнологические сети и модели». Т. 2 [Текст] / под ред. Л. И. Волгина. – Ульяновск : Изд-во Ульяновского гос. технического ун-та, 1998.
20. Логико-математические методы в технике, экономике и социологии. Материалы международной научно-технической конференции [Текст] / Под ред. В. И. Левина. – Пенза : Изд-во Приволжского дома знаний, 1998.
21. McNaughton R. A Theorem about Infinite-Valued Sentential Logic [Текст] / R. A. McNaughton // Journal of Symbolic Logic. – 1951, Vol. 16 – № 1. – P. 1–13.
22. Беркович Е. И. Непрерывнозначная логика в задачах микроэлектроники [Текст] / Е. И. Беркович // Повышение конкурентоспособности радиоэлектронной аппаратуры. – Таллинн : Валгус, 1988. – С. 165–201.
23. Пресс И. А. Разработка и исследование пневматических функцио-нальных преобразователей для систем управления в нефтехимии. Дисс. канд. техн. наук [Текст] / И. А. Пресс. – М. : Ин-т проблем управления, 1984.
24. Левин В. И. Новое обобщение операций над нечеткими множествами [Текст] / В. И. Левин // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 1. – С. 143–146.
25. Левин В. И. Теория динамических автоматов [Текст] / В. И. Левин. – Пенза : Изд-во Пензенского гос. технического ун-та, 1995.

26. Левин В. И. Математические основы диагностики цифровых схем [Текст] / В. И. Левин – Пенза : Изд-во Пензенского гос. технического ун-та, 1994.
27. Золотова Т. М. Резервирование аналоговых устройств автоматики [Текст] / Т. М.Золотова, Ф. И. Кербников, М. А. Розенблатт. – М. : Энергоатомиздат, 1986.
28. Левин В. И. Автоматные методы исследования систем обслуживания [Текст] / В. И. Левин // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1990. – № 3. – С. 121–133.
29. Левин В. И. Автоматная модель и методы распознавания зрительных образов [Текст] / В. И. Левин // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 3. – С. 101–112.
30. Левин В. И. 1. Динамический автомат как модель поведения социальных групп. 2. Моделирование потока исторических событий методами теории автоматов [Текст] / В. И. Левин // Гуманитарные науки и современность. – Пенза: Изд-во Пензенского гос. ун-та, 1997. Вып. 3. – С. 227–244; 1999. Вып. 5. – С. 231–248.
31. Левин В. И. Автоматная модель определения времени проведения коллективных мероприятий [Текст] / В. И. Левин // Известия РАН. Теория и системы управле-ния. – 1999. – № 3. – С. 134–139.
32. Левин В. И. Непрерывная логика: история, теория, применения [Текст] / В. И. Левин. – Пенза : Изд-во ПГТА, 2008.
33. Левин В. И. Логико-математические методы исследования технических, гуманитарных и социологических систем [Текст] / В. И. Левин. – Пенза: Изд-во ПензГТУ, 2014.
34. Левин В. И. Непрерывная логика: основные понятия [Текст] / В. И. Левин // Вестник ТГУ. – 2000. – Т. 5. Вып. 1. – С. 91–113.
35. Левин В. И. Полиинтервалы и их применение в моделировании систем [Текст] / В. И. Левин // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2016. – № 2(3). – С. 39–47.
36. Левин В. И. Интервальные уравнения и их решение [Текст] / В. И. Левин, Е. А. Немкова // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2017. – № 3(6). – С. 12–21.
37. Левин В. И. Интервальная математика и построение прямых и обратных характеристик преобразователей информации [Текст] / В. И. Левин, Е. А.Немкова // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2018. – № 1(8). – С. 4–12.

References

1. Ginzburg S.A. *Matematicheskaya nepreryvnaya logika i izobrazheniye funktsiy* [Mathematical continuous logic and image functions], M., Energiya, 1968.
2. Levin V.I. *Vvedeniye v dinamicheskuyu teoriyu konechnykh avtomatov* [Introduction to the dynamic theory of finite automata], Riga, Zinatne, 1975.
3. Kandel A., Lee S.C. *Fuzzy Switching and Automata. Theory and Application* [Fuzzy Switching and Automata. Theory and Application], N.Y., Grain, Russak and Co., 1979.
4. Levin V.I. *Dinamika logicheskikh ustroystv i sistem* [Dynamics of logical devices and systems], M., Energiya, 1980.
5. Koffman A. *Vvedeniye v teoriyu nechetkikh mnozhestv* [Introduction to the theory of fuzzy sets], M., Radio i svyaz', 1982.
6. Levin V.I. *Beskonechnoznachnaya logika v zadachakh kibernetiki* [Infinite-valued logic in the problems of cybernetics], M., Radio i svyaz', 1982.
7. Levin V.I. *Logicheskaya teoriya nadezhnosti slozhnykh sistem* [Logical theory of reliability of complex systems], M., Energoatomizdat, 1985.
8. *Nechetkiye mnozhestva v modelyakh upravleniya i iskusstvennogo intellekta* [Fuzzy sets in models of control and artificial intelligence] / pod red. D.A. Pospelova, M., Nauka, 1986.
9. Levin V.I. *Strukturno-logicheskiye metody issledovaniya slozhnykh sistem s primeneniyem EVM* [Structural-logical methods for studying complex systems with the use of computers], M., Nauka, 1987.
10. Volgin L.I. *Sintez ustroystv dlya obrabotki i preobrazovaniya informatsii v elementnom bazise relyatorov* [Synthesis of devices for processing and transformation of information in the elemental basis of relators], Tallinn, Valgus, 1989.
11. Shimbirev P.N. *Gibridnyye nepreryvno-logicheskiye ustroystva* [Hybrid Continuous-Logic Devices], M., Energo-atomizdat, 1990.
12. Volgin L.I., Levin V.I. *Nepreryvnaya logika. Teoriya i primeneniya* [Continuous logic. Theory and applications.], Tallinn, AN Estonii. 1990.
13. *Prikladnyye nechetkiye sistemy* [Applied fuzzy systems]/ pod red. T. Terano, K. Asai i M. Sugeno, M., Mir. 1993.

14. *Nepreryvnaya logika i yeye primeneniye v tekhnike, ekonomike i sotsiologii. Tezisy dokladov 1 Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii* [Continuous logic and its application in engineering, economics and sociology. Abstracts of the 1 All-Russian Scientific Conference] / Pod red. V.I. Levina, Penza, Izd-vo Penzenskogo doma nauchno-tekhnicheskoy propagandy, 1994.
15. *Nepreryvno-logicheskiye metody i modeli v nauke, tekhnike i ekonomike. Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Continuously-logical methods and models in science, technology and economics. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference] / Pod red. V.I. Levina, Penza, Izd-vo Privolzhskogo doma znaniy, 1995.
16. *Nepreryvnyye i smezhnyye logiki v tekhnike, ekonomike i sotsiologii. Materialy mezhdunarodnoy konferentsii* [Continuous and related logic in engineering, economics and sociology. Materials of the International Conference] / Pod red. V.I. Levina, Penza, Izd-vo Privolzhskogo doma znaniy, 1996.
17. *Nepreryvno-logicheskiye sistemy modeli i algoritmy. Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Continuously-logical systems of models and algorithms. Proceedings of the international scientific conference]. T. 2 / Pod red. L.I. Volgina, Ul'yanovsk, Izd-vo Ul'yanovskogo gos. tekhnicheskogo un-ta, 1995.
18. *Nepreryvnaya i smezhnyye logiki v informatike, ekonomike i sotsiologii. Materialy Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Continuous and related logic in informatics, economics and sociology. Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference] / Pod red. V.I. Levina, Penza, Izd-vo Privolzhskogo doma znaniy, 1997.
19. *Relyatornyye i nepreryvno-logicheskiye seti i modeli. Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Neyronnyye, relyatornyye i nepreryvnologicheskiye seti i modeli»* [Relator and continuous-logical networks and models. Proceedings of the international scientific conference "Neural, Relator and Continuum Networks and Models"]. T. 2 / Pod red. L.I. Volgina, Ul'yanovsk, Izd-vo Ul'yanovskogo gos. tekhnicheskogo un-ta, 1998.
20. *Logiko-matematicheskiye metody v tekhnike, ekonomike i sotsiologii. Materialy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Logical and mathematical methods in engineering, economics and sociology. Materials of the International Scientific and Technical Conference] / Pod red. V.I. Levina, Penza, Izd-vo Privolzhskogo doma znaniy, 1998.
21. McNaughton R. A Theorem about Infinite-Valued Sentential Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 1951, Vol. 16, no. 1, pp. 1–13.
22. Berkovich Ye.I. Nepreryvnoznachnaya logika v zadachakh mikroelektroniki [Continuous logic in the tasks of microelectronics] // *Povysheniye konkurentosposobnosti radioelektronnoy apparatury* [A rise in the competitiveness of radioelectronic equipment], Tallinn, Valgus, 1988, pp. 165–201.
23. Press I.A. *Razrabotka i issledovaniye pnevmaticheskikh funktsio-nal'nykh preobra-zovateley dlya sistem upravleniya v neftekhimii. Disc. kand. tekhn. nauk* [Development and research of pneumatic functional transformers for control systems in petrochemical industry. Diss. Cand. tech. sciences], M. , In-t problem upravleniya, 1984.
24. Levin V.I. Novoye obobshcheniye operatsiy nad nechetkimi mnozhestvami // *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems]. – 2001, no. 1, pp. 143–146.
25. Levin V.I. *Teoriya dinamicheskikh avtomatov* [The theory of dynamical automata], Penza, Izd-vo Penzenskogo gos. tekhnicheskogo un-ta, 1995.
26. Levin V.I. *Matematicheskiye osnovy diagnostiki tsifrovykh skhem* [Mathematical foundations of diagnostics of digital circuits], Penza, Izd-vo Penzenskogo gos. tekhnicheskogo un-ta, 1994.
27. Zolotova T.M., Kerbnikov F.I., Rozenblatt M.A. *Rezervirovaniye analogovykh ustroystv avtomatiki* [Redundancy of analog automation devices], M., Energoatomizdat, 1986.
28. Levin V.I. Avtomatnyye metody issledovaniya sistem obsluzhivaniya. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [Izvestiya AN SSSR. Technical cybernetics], 1990, no.3, pp. 121–133.
29. Levin V.I. Avtomatnaya model' i metody raspoznavaniya zritel'nykh obrazov. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [Izvestiya AN SSSR. Technical cybernetics], 1991, no.3, pp. 101–112.
30. Levin V.I. 1. Dinamicheskiy avtomat kak model' povedeniya sotsi-al'nykh grupp. 2. Modelirovaniye potoka istoricheskikh sobytiy metodami teorii avtomatov // *Gumanitarnyye nauki i sovremennost'* [1. Dynamic automaton as a model of the behavior of social groups. 2. Modeling of the flow of historical events using the methods of the theory of automata, in: Humanities and Modernity.]. Penza: Izd-vo Penzenskogo gos. un-ta, 1997. Vyp. 3, pp. 227–244; 1999. Vyp. 5, pp. 231–248.
31. Levin V.I. Avtomatnaya model' opredeleniya vremeni provedeniya kollektivnykh meropriyatiy // *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Izvestiya RAN. Theory and control systems], 1999, no. 3, pp. 134–139.

32. Levin V.I. *Nepreryvnaya logika: istoriya, teoriya, primeneniya* [Continuous logic: history, theory, applications.], Penza, Izd-vo PGTA, 2008.
33. Levin V.I. *Logiko-matematicheskiye metody issledovaniya tekhnicheskikh, gumanitarnykh i sotsiologicheskikh sistem* [Logical and mathematical methods of research of technical, humanistic and sociological systems], Penza, Izd-vo PenzGTU, 2014.
34. Levin V.I. Nepreryvnaya logika: osnovnyye ponyatiya [Continuous logic: basic concepts]. *Vestnik TGU* [Bulletin of TSU], 2000, T. 5, Vyp. 1, pp. 91–113.
35. Levin V. I. Poliintervaly i ikh primeneniye v modelirovanii sistem [Polyintervals and their application in system modeling]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2016, no. 2(3), pp. 39-47.
36. Levin V. I., Nemkova E. A. Interval'nyye uravneniya i ikh resheniye [Interval Equations and Their Solution]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2017, no. 3(6), pp. 12-21.
37. Levin V. I., Nemkova E. A. Interval'naya matematika i postroyeniye pryamykh i obratnykh elementov preobrazovateley informatsii [Interval mathematics and construction of direct and reverse characteristics of information converters]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2018, no. 1(8), pp. 4-12.

RESUME

V. I. Levin

Polyintervals and Their Application in System Modeling

Background: Continuous logic (CL) is introduced as a natural generalization of discrete logic (DL). At the same time, most of the DL laws remain in force for CL. However, the operation of negating in CL can not be defined so that it is a complement, as, for example, in two-valued logic, i.e. that the laws of the excluded third and the contradictions are fulfilled. Therefore, structurally continuous logic essentially differs from two-valued discrete logic. This and the continuity of the variables leads to certain differences between the CL and DL in the nomenclature of the problems being solved and the methods for their solution.

Materials and methods: To obtain new results in continuous logic, a number of direct methods are used: 1) calculation of the table of values of the logical expression; 2) equivalent transformations of logical expressions; 3) the articulation of particular logical expressions in general; 4) the partition of the general logical expression into several particular.

Results: Today CL has developed as an independent scientific discipline, the nature of which is de-termined by the needs of its harmonious development as a mathematical discipline and the needs of its numerous applications covering almost all areas of human activity: mathematics (approximation of functions, geometry, set theory, number theory, interval analysis); technology (calculation of electrical circuits, synthesis of functional generators and ADCs, calculation of analog and digital devices, modeling of the shape of details, reliability, diagnostics and maintenance); systems (theory of service systems, pattern recognition and scene analysis, decision-making, data processing, synchronization); economics (discrete optimization, scheduling theory, modeling of economic systems), biology (modeling of neural structures), sociology (modeling the dynamics of the behavior of the collective); political science (modeling of the dynamics of society), history (modeling the flow of historical events).

Conclusion: This work continues the author's research cycle on the development of the mathematical apparatus and mathematical models of CL. From the works of the author published earlier, it distinguishes a large number of models associated with the use of CL in science, technology, economics and sociology.

РЕЗЮМЕ

В. И. Левин

Непрерывная логика и ее применение к исследованию систем в условиях неопределенности

История вопроса. Непрерывная логика (НЛ) вводится как естественное обобщение дискретной логики (ДЛ). При этом большинство законов ДЛ остается в силе и для НЛ. Однако операцию отрицания НЛ нельзя определить так, чтобы она была дополнением, как, например, в двузначной логике, т.е. чтобы выполнялись законы исключенного третьего и противоречия. Поэтому структурно непрерывная логика существенно отличается от двузначной дискретной логики. Это и непрерывность переменных приводит к определенным отличиям НЛ от ДЛ в номенклатуре решаемых задач и методике их решения.

Материалы и методы. Для получения новых результатов в непрерывной логике используют ряд прямых методов: 1) вычисление таблицы значений логического выражения; 2) эквивалентные преобразования логических выражений; 3) сочленение частных логических выражений в общее; 4) расчленение общего логического выражения на несколько частных.

Результаты. На сегодня НЛ сложилась как самостоятельная научная дисциплина, характер которой определяется потребностями ее гармоничного развития, как математической дисциплины, и потребностями ее многочисленных приложений, охватывающих чуть ли не все области человеческой деятельности: математика (аппроксимация функций, геометрия, теория множеств, теория чисел, интервальный анализ); техника (расчет электрических цепей; синтез функциональных генераторов и АЦП, расчет аналоговых и цифровых устройств, моделирование формы деталей; надежность, диагностика и техническое обслуживание); системы (теория систем обслуживания, распознавание образов и анализ сцен, принятие решений, обработка информации, синхронизация); экономика (дискретная оптимизация, теория расписаний, моделирование экономических систем), биология (моделирование нейронных структур), социология (моделирование динамики поведения коллектива); политология (моделирование динамики общества), история (моделирование потоков исторических событий).

Заключение. Настоящая работа продолжает цикл исследований автора по разработке математического аппарата и математических моделей НЛ. От опубликованных ранее работ автора она отличается изложением большого числа моделей, связанных с применением НЛ в науке, технике, экономике и социологии.

Статья поступила в редакцию 25.04.2018.