Г

УДК 539.2+535

М. К. Галинский, В. В. Румянцев
ГУ «Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина»
283114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ СВЕТА В ОПТИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОЙ И ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

M. K. Galinsky, V. V. Rumyantsev
SE «A.A. Galkin Donetsk Institute for Physics and Engineering»
283114, c. Donetsk, R. Luxembourg str., 72

GROUP VELOCITY OF LIGHT IN LINEAR ISOTROPIC OPTICAL MEDIUM

М. К. Галінський, В. В. Румянцев
ДУ «Донецький фізико-технічний інститут ім. О.О. Галкіна»
283114, м. Донецьк, вул. Р. Люксембург, 72

ГРУППОВА ШВИДКІСТЬ СВІТЛА В ОПТИЧНО ЛІНІЙНОМУ ТА ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВІЩІ

Получены уравнения, описывающие фундаментальную зависимость распределения в пространстве групповой скорости лазерного пучка от его параметров. Проведены численные сравнения результатов применения полученных уравнений, с результатами других работ, посвященных частным случаям лазерных пучков, таких как пучки Бесселя, Гаусса и Лагерра-Гаусса. Решена обратная задача о вычислении параметров пучка по известному распределению в пространстве групповой скорости. Результаты работы могут найти свое применение в информационных технологиях.
Ключевые слова: групповая скорость, распределение амплитуд, распределение фаз, пучок Бесселя, пучок Гаусса, пучок Лагерра-Гаусса.

The paper is devoted to researching of fundamental connection between distribution of group velocity in space and parameters of a beam. For checking of correctness of equations were obtained in this work, numerical calculations of group velocity distribution in space were made for Bessel, Gaussian and Laguerre-Gaussian beams. In this work were also found the solution of inverse problem – searching of parameters of the beam, knowing the distribution of group velocity of the beam. Results of this work are applicable to information technologies.
Key words: group velocity, amplitude distribution, phase distribution, Bessel beam, Gaussian Beam, Laguerre-Gaussian beam.

Отримані рівняння, що описують фундаментальну залежність розподілу в просторі групової швидкості лазерного пучка від його параметрів. Проведені чисельні порівняння результатів застосування отриманих рівнянь з результатами інших робіт, присвячених окремим випадкам лазерних пучків, таких як пучки Бесселя, Гаусса та Лагерра-Гаусса. Знайдено рішення зворотної задачі – пошук параметрів пучка при відомому розподілі у просторі групової швидкості. Результати роботи можуть бути застосовані в інформаційних технологіях.
Ключові слова: групова швидкість, розподіл амплітуд, розподіл фаз, пучок Бесселя, пучок Гаусса, пучок Лагерра-Гаусса.

Введение

В настоящее время весьма актуальными являются работы по исследованию групповой скорости лазерных пучков [1], [2] в различных средах [3]. Причиной тому, в частности, является их потенциальное применение в информационных технологиях [3], [4].

Как известно, скорость распространения плоской электромагнитной волны в оптически линейной, однородной и изотропной среде равна отношению скорости света в вакууме к показателю преломления среды. Однако, как показывают результаты недавних работ [1], [2], групповая скорость лазерного пучка в таких средах может отличаться от скорости распространения в них плоской волны. Например, в работах [1], [2] изменение групповой скорости света для лазерного пучка рассматривается в параксиальном приближении для конкретных случаев и используемые методы не обобщены на все возможные типы пучков. Суть этих работ сводится к решению прямой задачи, то есть к нахождению групповой скорости при известных параметрах лазерного пучка. Возникает вопрос – возможно ли получить уравнения, которые не будут ограничиваться частными случаями с использованием параксиального приближения, а позволяющие связать групповую скорость распространения пучка в линейной и изотропной среде с параметрами этого пучка, т.е. дающие возможность решать не только прямую, но и обратную задачу (искать параметры пучка при заданной групповой скорости)? Этой проблеме и посвящена данная статья.

Цель настоящей работы – получение уравнений, связывающих параметры лазерного пучка с его групповой скоростью. Проверка полученных уравнений проведена на примерах пучков Бесселя, аналогично работе [1] и пучков Лагерра-Гаусса с теми же параметрами, которые рассмотрены в работе [2]. Наши результаты согласуются с результатами этих работ. На частном случае пучка Гаусса показано, что групповая скорость этого пучка не совпадает полностью со скоростью света, но стремится к ней при удалении от узкой его части. Приведен пример решения обратной задачи – нахождения параметров пучка при известном распределении излучения в пространстве.

Теоретическая модель

Среда, в которой распространяется электромагнитная волна, рассматривается как линейная и изотропная без источников и поглощения. Таким образом, для описания распределения электрического поля этой волны применимо волновое уравнение. Для начала рассмотрим однородную среду, то есть такую, в которой фазовая скорость плоской волны не зависит от координат. Предполагая, что волна является монохроматической, получаем уравнение Гельмгольца: $\Delta\vec{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}=0$, где c – фазовая скорость плоской волны в рассматриваемой среде. Разделяя в уравнении Гельмгольца амплитудную и фазовую составляющие комплексной амплитуды колебаний электрического поля волны $\vec{E}=\vec{A}(\vec{r})\exp(i\varphi(\vec{r}))$, получаем следующую систему уравнений [5], [6]:

$$\begin{cases} \Delta\vec{A}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}-\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2\right]\vec{A}=0 \\ \vec{A}\Delta\varphi+2\left(\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}=0 \end{cases}, \qquad (1)$$

где $\vec{A}$ и φ – распределение соответственно амплитуд и фаз колебаний поля в пространстве.

Согласно определению, групповая скорость вычисляется по уравнению [6]: $\vec{V} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}$. Однако, по физическому смыслу, рассматривая какую-либо интерференцию, мы работаем не с волновым вектором, который строго равен $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$, а с градиентом фазы, который в лучевом приближении и рассмотрении плоских волн равен $-\vec{\nabla}\varphi = \frac{\omega}{c}\vec{n}$, но не в общем случае. С такой точки зрения корректнее использовать определение волнового вектора, связанное непосредственно с градиентом фазы, а не с частотой или скоростью света в среде. Поэтому далее, исходя из физического смысла, под волновым вектором будет подразумеваться именно $\vec{k} = -\vec{\nabla}\varphi$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{cases} \Delta\vec{A} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right]\vec{A} = 0 \\ \vec{A}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{k}\right) + 2\left(\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Из первого уравнения системы (2) получаем:

$$\vec{V} = \pm\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \tag{3}$$

где знаки «$+$» и «$-$» указывают на параллельность и антипараллельность групповой скорости и волнового вектора соответственно. Используя полученное выражение для групповой скорости (3) и уравнения (2) получаем:

$$\begin{cases} \Delta\vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}\right)\vec{A} = 0 \\ \vec{A}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) + 2\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = 0 \\ \vec{\nabla}\varphi \pm \frac{\omega}{c^2}\vec{V} = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Система уравнений (4) описывает связь параметров электрического поля волны (распределения амплитуд и фаз колебаний поля) с распределением групповой скорости волны в пространстве.

Для оптически неоднородной среды уравнение (3) примет вид:

$$\vec{V} = \pm\frac{c^2\vec{k}}{n^2\omega}. \tag{5}$$

где n – показатель преломления среды, являющийся функцией координат.

В таком случае получим:
$$\begin{cases} \Delta\vec{A} + n^2\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - n^2\frac{\vec{V}^2}{c^2}\right)\vec{A} = 0 \\ n\vec{A}\vec{\nabla}\cdot\vec{V} + 2\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(n\vec{A}\right) = 0 \\ \vec{\nabla}\varphi \pm n^2\frac{\omega}{c^2}\vec{V} = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что второе уравнение системы (4) является следствием закона сохранения энергии. Это можно показать, воспользовавшись тем фактом, что групповая скорость распространения волны является также скоростью переноса энергии этой волной. В таком случае, плотность потока энергии можно записать в виде: $\vec{j} = \rho_E \vec{V}$, где ρ_E – плотность энергии поля волны, которую можно выразить как $\rho_E = \alpha \vec{A}^2$, где α – коэффициент пропорциональности.

Так как в рассматриваемой среде нет ни поглощения, ни источников излучения, то для плотности потока энергии применимо уравнение непрерывности в виде $div\left(\vec{j}\right) = 0$. Отсюда следует, что: $\vec{A}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right) + 2\left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} = 0$.

Таким образом, второе уравнение системы (4) действительно является следствием закона сохранения энергии. Следствием этого является тот факт, что решение обратной задачи, полученное решением системы уравнений (4) всегда удовлетворяет закону сохранения энергии.

Полученные в работе уравнение (3) и система уравнений (4) применимы для решения как прямой, так и обратной задачи в формировании пучков с соответствующей групповой скоростью. То есть для вычисления групповой скорости пучка при известных его характеристиках, а именно распределении амплитуд и фаз колебаний поля волны в пространстве, необходимо использовать уравнение (3). При решении обратной задачи (если необходимо выяснить характеристики пучка при заданном распределении в пространстве групповой скорости волны) достаточно решить систему уравнений (4) относительно распределений в пространстве амплитуд и фаз колебаний поля волны, при условии, что задаваемое распределение групповой скорости является физически возможным.

Результаты и обсуждение

В рамках данного раздела уравнение (3), связывающее распределение фаз и групповой скорости пучка в пространстве, подвергается проверке на основе теоретических и экспериментальных данных, полученных в других теоретических и экспериментальных работах при исследовании групповой скорости распространения пучков Бесселя [1] и Лагерра-Гаусса [2].

В работе [1] указывается, что скорость распространения пучка Гаусса равна скорости света. В данном разделе на частном случае показано, что это не так – групповая скорость этого пучка стремится к скорости света лишь при удалении от узкой части вдоль его оси.

Далее продемонстрируем пример решения обратной задачи с помощью системы уравнений (4), связывающей параметры поля волны с ее групповой скоростью.

Проверка пучком Бесселя

Согласно работе [1], в которой проводится сравнение групповых скоростей пучков Бесселя и Гаусса, распределение фаз в пучке Бесселя можно описать уравнением: $\vec{\nabla}\varphi\left(r, z\right) = -k_0 \hat{z} \cos(\alpha)$, где $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\alpha = 0.0045$ рад. В этом случае $k_z = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = k_0 \cos\left(\alpha\right)$, что приводит к $V_z = c\cos(\alpha)$.

В рамках работы [1] оценка сравнения групповых скоростей пучков проводилась как разность хода, то есть предполагалось, что оба луча распространяются со скоростью света, но один из них проходит немного другой оптический путь. Поэтому для проверки полученных в приведенной работе результатов, применима та же технология. Легко показать, например, в случае $\alpha_1 = 4.5\times10^{-3}$ рад., соответствующая этому углу разность хода будет приблизительно равна 10 мкм, что соответствует данным работы [1].

Проверка пучком Лагерра-Гаусса

В работе [2] проводилось нахождение групповой скорости пучка Лагерра-Гаусса и ее сравнение со скоростью света.

Фазовая составляющая поля волны в пучке Лагерра-Гаусса может быть записана в виде [7]:

$$\varphi(r,\alpha,z;l,p)=\left(|l|+2p+1\right)\arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)-l\alpha-\frac{2\pi}{\lambda}\left(z+\frac{r^2}{2z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]}\right), \quad (7)$$

где l и p – орбитальный и угловой параметры пучка Лагерра-Гаусса, w_0 – радиус пучка, в этом случае равный 2 мкм. Система координат выбрана цилиндрической с осью OZ, совпадающей с осью пучка. Применяя к данному распределению фаз уравнение (3) и рассматривая групповую скорость вдоль оси OZ при $r, z \to 0$, имеем распределение групповой скорости по параметрам l и p (рис. 1).

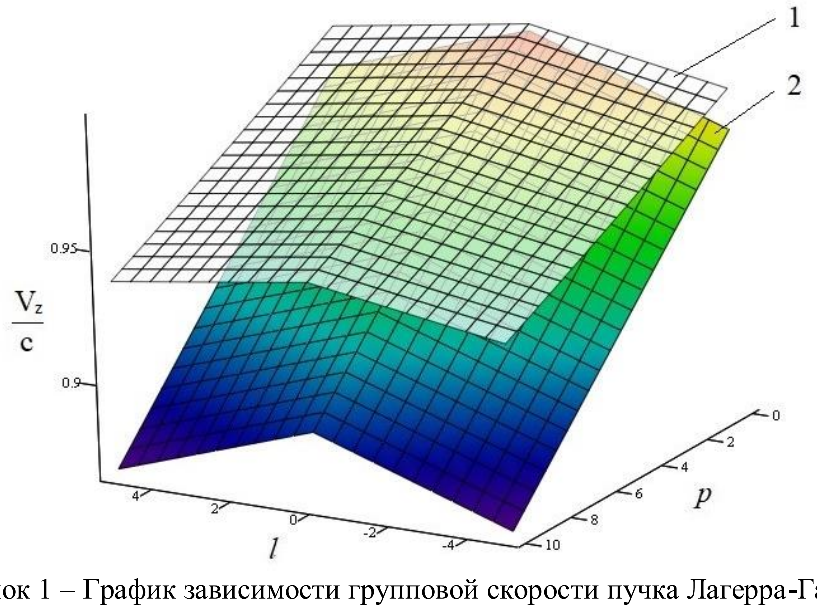

Рисунок 1 – График зависимости групповой скорости пучка Лагерра-Гаусса от его параметров l и p : 1 – полученный в работе [2], 2 – полученный в нашей работе

Из сравнения графиков на рис. 1 хорошо видно, что полученные в нашей работе результаты согласуются с результатами работы [2]. Отличия можно объяснить тем, что в настоящей работе не применялось параксиальное приближение и использовалось более точное описание фазовой составляющей поля волны.

Сравнение результатов данной статьи с результатами других работ, посвященных изучению зависимости групповой скорости различных пучков от их параметров, показывает, что полученные в работе результаты хорошо согласуются с экспериментальными и теоретическими данными других работ, при этом полученное здесь уравнение (3) обладает большей общностью, так как оно универсально для любых волновых процессов, в линейных, изотропных, континуальных средах.

Профиль групповой скорости для пучка Гаусса

Пусть для определенности пучок распространяется вдоль оси OZ. Распределение фаз колебаний поля для пучка Гаусса запишем в виде:

$$\varphi(r,z) = -k_0 z + \frac{k_0 r^2}{2z\left(1+\left(\frac{\pi w_0^2}{z\lambda}\right)^2\right)} - \arctan\left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2}\right) \quad (8)$$

Здесь радиус пучка полагаем так же, как и в предыдущем случае, равным 2 мкм. Подставляя данное распределение фаз в пространстве для пучка Гаусса в уравнение (3) и рассматривая проекцию групповой скорости на ось OZ, имеем следующее распределение групповой скорости в пространстве:

$$V_Z(r,z) = c\left(1 - \frac{r^2(z^2 - z_R^2)}{2(z^2+z_R^2)^2} - \frac{\lambda z_R}{2\pi(z^2+z_R^2)}\right). \quad (9)$$

График зависимости проекции групповой скорости на ось OZ от координат показан на рис. 2. Начало координат выбрано в середине узкой части пучка.

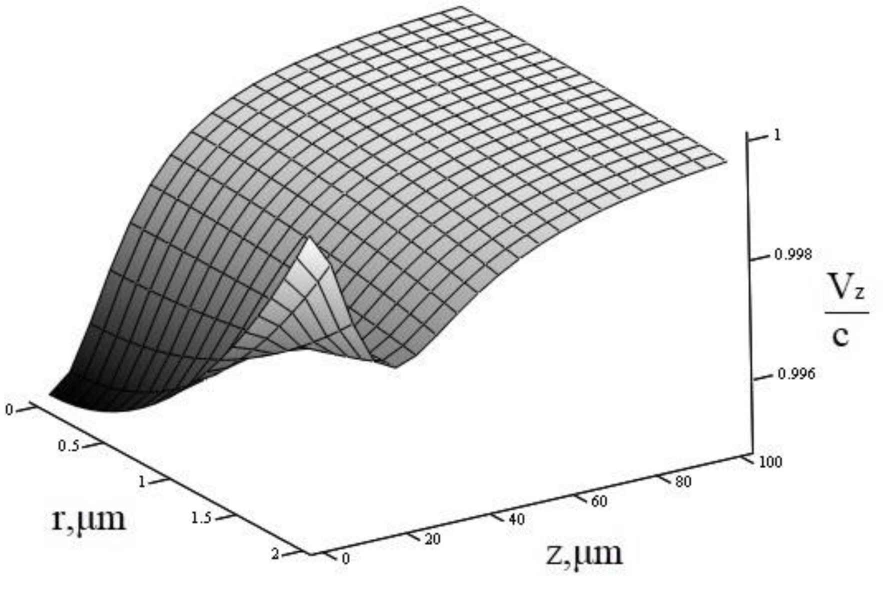

Рисунок 2 – Распределение проекции групповой скорости на ось OZ в пространстве

Численный расчет показывает, что в середине узкой части пучка групповая скорость данного пучка меньше световой приблизительно на 0.5%. Однако, как видно на рис. 2 и рис. 3, далее групповая скорость в пределе стремится к световой при удалении от узкой части пучка.

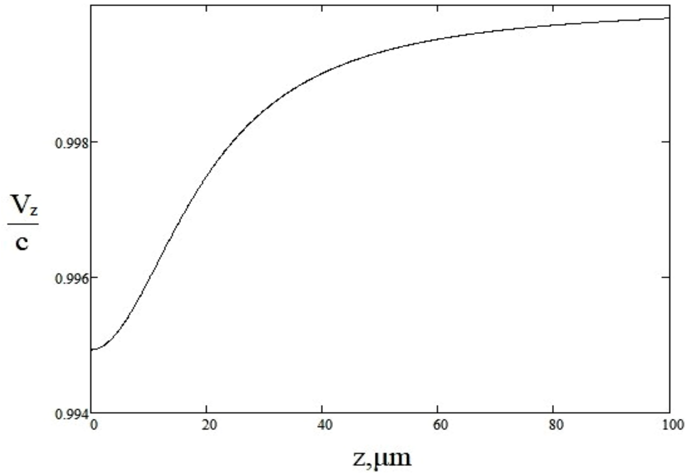

Рисунок 3 – Распределение групповой скорости вдоль оси OZ.
Видно, что при удалении от узкой части пучка групповая скорость стремится к световой

Следовательно, как показывает численный расчет, групповая скорость пучка Гаусса не равна скорости света во всем пространстве, но стремится к ней при удалении от узкой части пучка.

Пример решения обратной задачи

Использование системы уравнений (4) более удобно при решении обратной задачи, чем прямой. Для иллюстрации данного утверждения рассмотрим следующий пример – пусть групповая скорость пучка в любой его точке постоянна по направлению и абсолютной величине. Пусть для определенности групповая скорость направлена вдоль оси OZ. Тогда из второго уравнения системы (4) следует, что и распределение амплитуд колебаний поля постоянно вдоль оси OZ. В таком случае первое уравнение системы (4), при использовании цилиндрической системы координат в случае аксиальной симметрии, принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{A}}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\vec{V}^2}{c^2}\right)\vec{A} = 0. \tag{10}$$

После умножения полученного равенства на r^2, получим частный случай дифференциального уравнения Бесселя нулевого порядка. Иными словами, оговоренным требованиям соответствует пучок Бесселя первого рода.

Результаты приведенных выше расчетов частных случаев пучков наглядно демонстрируют, что полученные в данной статье уравнения позволяют находить как распределение в пространстве групповой скорости пучка, так и решать обратную задачу – находить параметры пучка с задаваемым распределением групповой скорости в пространстве.

Выводы

В работе получены уравнения, связывающие распределение групповой скорости световой волны в линейной изотропной среде с параметрами этой волны – система уравнений (4) для оптически однородной среды и система уравнений (5) для оптически неоднородной среды. Получено уравнение, связывающее распределение в пространстве фаз колебаний поля волны и групповую скорость этой волны – уравнение (3) для оптически однородной среды и уравнение (6) для оптически неоднородной среды. Проведено сравнение результатов применения этих уравнений к пучкам Бесселя и Лагерра-Гаусса, с экспериментальными и теоретическими результатами других исследований. Полученные в статье уравнения обладают широкой общностью – они применимы не только к пучкам Бесселя и Лагерра-Гаусса, но и к пучкам произвольной конфигурации, при этом они не ограничены параксиальным приближением. Кроме того, эти уравнения позволяют не только находить распределение в пространстве групповой скорости пучка, но и решать обратную задачу – находить параметры пучка с задаваемым распределением групповой скорости в пространстве. Результаты работы могут найти свое применение в информационных технологиях.

Список литературы

1. Giovannini D. Spatially structured photons that travel in free space slower than the speed of light [Текст] / D. Giovannini, J. Romero, V. Potoček, G. Ferenczi, F. Speirits, S.M. Barnett, D. Faccio, M.J. Padgett // Science – 2015. – V. 347. – P. 857.
2. Bareza N. D. Subluminal group velocity and dispersion of Laguerre Gauss beams in free space [Текст] / N.D. Bareza, N. Hermosa // Sci. Rep. – V. 6. – P. 26842.
3. Bigelow M. S. Observation of Ultraslow Light Propagation in a Ruby Crystal at Room Temperature [Текст] / M.S. Bigelow, N.N. Lepeshkin, R.W. Boyd // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V. 90. – P. 113903.
4. Rumyantsev V. V. Dispersion characteristics of electromagnetic excitations in a disordered one-dimensional lattice of coupled microresonators / V. V. Rumyantsev, S. A. Fedorov, K. V. Gumennyk, M. V. Sychanova // Physica B: Condensed matter. – 2015. – V. 461. – P. 32.
5. Vázquez L. The wave equation: From eikonal to anti-eikonal approximation / L. Vázquez, S. Jiménez, A.B. Shvartsburg // Modern Electronic Materials. – 2016. – V. 2. – P. 51.
6. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учебное пособие: Для вузов. В 5 т. Т. IV. Оптика. [Текст] / Д. В. Сивухин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005.
7. Allen L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. Spreeuw, J. P. Woerdman // Physical review A. – 1992. – V. 45. – P. 8185.
8. Румянцев В. В. К вопросу об иерархии интеллектуальных систем [Текст] / В. В. Румянцев // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк, 2017. – № 3 (6). – С. 50–57.
9. Численное моделирование рассеяния электромагнитных возбуждений в неидеальной решетке микрорезонаторов [Текст] / Румянцев В. В., Федоров С. А., Гуменник К. В., Гуров Д. А. // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк, 2017. – № 4 (7). – С. 59–68.

References

1. Giovannini D., Romero J., Potoček V., Ferenczi G., Speirits F., Barnett S.M., Faccio D., Padgett M. J. Spatially structured photons that travel in free space slower than the speed of light. *Science*, 2015, V. 347, P. 857.
2. Bareza N.D., Hermosa N. Subluminal group velocity and dispersion of Laguerre Gauss beams in free space. *Sci. Rep.*, V. 6, P. 26842.
3. Bigelow M. S., Lepeshkin N. N., Boyd R. W. Observation of Ultraslow Light Propagation in a Ruby Crystal at Room Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, V. 90, P. 113903.
4. Rumyantsev V.V, Fedorov S.A., Gumennyk K.V., Sychanova M.V. Dispersion characteristics of electromagnetic excitations in a disordered one-dimensional lattice of coupled microresonators. *Physica B: Condensed matter*, 2015, V. 461, P. 32.
5. Vázquez L., Jiménez S., Shvartsburg A. B. The wave equation: From eikonal to anti-eikonal approximation. *Modern Electronic Materials*, 2016, V. 2, P. 51.
6. Sivukhin D.V. *Obshchiy kurs fiziki*. *Uchebnoye posobiye* [General course of physics. Tutorial. V IV. Optics[, Moscow, PhisMath Publishing, 2005.
7. Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J., Woerdman J.P. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical review A*, 1992, V. 45, P. 8185.
8. Rumyantse V. V. Towards problem of intelligent systems hierarchy. *Problems of Artificial Intelligence* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2017, no. 3(6), pp. 50-57.
9. Rumyantsev V. V., , Fedorov S.A, Gumennyk K.V., Gurov D.A. Numerical modelling of dispersion of electromagnetic excitations in a nonideal lattice of microresonators. *Problems of Artificial Intelligence* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2017, no. 4(7), pp. 59-68.

RESUME

M. K. Galinsky, V. V. Rumyantsev
Group Velocity of Light In Linear Isotropic Optical Medium

Background: The study of fundamental connection between group velocity distribution in space and parameters of the beam, using mathematical and numerical modeling. Solving of direct problem – calculation the distribution of group velocity, using known parameters of the beam, and inverse problem – searching parameters of the beam, using necessary distribution of group velocity. The study is illustrated by the specific examples of Bessel, Gaussian and Laguerre-Gaussian beams.

Materials and methods: Mathematical and numerical modeling.

Results: Equations, connecting amplitude, phase and group velocity distribution in space, in analytical form. Examples of numerical and analytical calculations of partial cases for different beams.

Conclusion: In this work the equations were obtained, connecting parameters of the beam with distribution of group velocity of the beam, propagating in isotropic medium with parameters of the beam for homogeneous medium – system of equations (4) and for inhomogeneous medium – system of equations (5). The equations were obtained, connecting distribution of phase and group velocity of the beam for optical isotropic and homogeneous medium – equation (3) and inhomogeneous medium – equation (6). Results of applying of these equations to Bessel's and Lequerre-Gaussian beams were compared with experimental and theoretical results of other works. The equations were obtained, are of great generality – they are applicable for any type of beam, not only Bessel and Laguerre-Gaussian beams, and they were obtained without using paraxial approximations. Besides these equations can be used not just for calculating the distribution of group velocity of the beam, using beam parameters, but also solving inverse problem – calculating parameters of the beam, using previously known necessary distribution of group velocity.

РЕЗЮМЕ

М. К. Галинский, В. В. Румянцев
Групповая скорость света в оптически линейной и изотропной среде

Предыстория: Изучение фундаментальной связи между распределением групповой скорости в пространстве и параметрами пучка с использованием математического и численного моделирования. Решение прямой задачи – вычисление распределения групповой скорости с использованием известных параметров пучка и обратных проблемно-поисковых параметров пучка с использованием необходимого распределения групповой скорости. Исследование иллюстрируется конкретными примерами бесселевых, гауссовских и лагерро-гауссовых пучков.

Материалы и методы: Математическое и численное моделирование.

Результаты: Уравнения, связывающие амплитуду, распределение фазовых и групповых скоростей в пространстве, в аналитической форме. Примеры численных и аналитических расчетов частичных случаев для разных пучков.

Заключение. В этой работе получены уравнения, связывающие параметры пучка с распределением групповой скорости пучка, распространяющиеся в изотропной среде с параметрами пучка для однородной среды – системы уравнений (4) и для неоднородной среды – системы уравнения (5). Получены уравнения, связывающие распределение фазовой и групповой скоростей пучка для оптического изотропного и однородного уравнения среды (3) и неоднородного уравнения среды (6). Результаты применения этих уравнений к пучкам Бесселя и Лекера-Гаусса были сопоставлены с экспериментальными и теоретическими результатами других работ. Уравнения были получены, имеют большую общность – они применимы для любого типа пучка, а не только для бесселевых и лагерровских гауссовых пучков, и они были получены без использования параксиальных приближений. Кроме того, эти уравнения могут быть использованы не только для расчета распределения групповой скорости пучка с использованием параметров пучка, но и для решения обратной задачи – расчета параметров пучка с использованием ранее известного необходимого распределения групповой скорости.

Статья поступила в редакцию 21.05.2018.