Л

УДК 681.5.09

В. И. Левин
Пензенский государственный технологический университет, Россия
440039, Пенза, пр. Байдукова, 1-а

НЕПРЕРЫВНО-ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

V. I. Levin
Penza State Technological University, Russia
440039, Penza, Baidukova pr.

CONTINUOUS-LOGICAL METHODS OF CALCULATING OF RELIABILITY OF COMPLEX SYSTEMS. I. MATHEMATIC MODELS OF RELIABILITY

В. И. Левин
Пензенський державний технологічний університет, Росія
440039, Пенза, пр. Байдукова, 1-а

БЕЗПЕРЕРВНО-ЛОГІЧНИ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ СКЛАДНИХ СИСТЕМ. I. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НАДІЙНОСТІ

В статье описан математический аппарат порядковой логики и логических определителей, являющийся адекватным средством для моделирования надежности сложных систем. Сформулирована проблема анализа надежности сложных систем. Дана классификация сложных систем. Изложена общая методика построения модели надежности сложной системы на основе аппарата логических определителей.
Ключевые слова: логические определители, проблема размерности, классы сложных систем, формальное моделирование надежности, метод эквивалентных схем, надежностный процесс, логическая теория надежности.

The article describes the mathematical apparatus of ordinal logic and logical determinants, which is an adequate tool for modeling the reliability of complex systems. The problem of reliability analysis of complex systems is formulated. Classification of complex systems is given. The general methodology for constructing the reliability model of a complex system based on the apparatus of logical determinants is outlined.
Keywords: logical determinants, dimensionality problem, classes of complex systems, formal reliability modeling, equivalent circuit method, reliability process, logical theory of reliability.

У статті описаний математичний апарат порядкової логіки і логічних визначників, що є адекватним засобом для моделювання надійності складних систем. Сформульовано проблема аналізу надійності складних систем. Дана класифікація складних систем. Викладена загальна методика побудови моделі надійності складної системи на основі апарату логічних визначників.
Ключові слова: логічні визначники, проблема розмірності, класи складних систем, формальне моделювання надійності, метод еквівалентних схем, надійнісний процес, логічна теорія надійності.

Введение

Имеется огромное число публикаций по классической, вероятностной теории надежности [1–4]. Значительно меньше публикаций по постклассической, детерминистской теории надежности. Начало последней было положено работами автора [5–7], в которых была открыта возможность моделирования надежностных процессов автоматно-логическими методами. Затем последовали различные реализации этой возможности.

В работах [8], [9] были предложены автоматно-логические модели и методы анализа надежности технических систем, основанные на математическом аппарате двузначной (булевой) и бесконечнозначной (непрерывной) логики (НЛ). Было показано, что предложенные модели и методы позволяют анализировать надежность в принципе любых систем в аналитической форме, что имеет большое теоретическое и практическое значение. Затем эти модели и методы были усовершенствованы в работах [10], [11]. Но попытки непосредственного применения предложенного подхода к сложным системам, у которых логические схемы-модели сложны, а их входные процессы имеют большое число последовательных изменений сигнала (что является следствием многоразового восстановления блоков системы), наталкиваются на очень большие трудности. Эти трудности обусловлены необозримостью получаемых аналитических выражений и большой сложностью их вычисления. В связи с этим в настоящей работе предложен другой подход к анализу надежности сложных систем, основанный на математическом аппарате логических определителей (ЛО), вводимых как числовые характеристики некоторых квазиматриц, вычисляемые по соответствующим формулам алгебры НЛ [12], [13]. В целом квазиматрицы и ЛО в рассматриваемой нами области играют ту же роль параметров укрупненного (блочного) описания изучаемых, существенно нелинейных систем, что и обычные матрицы и определители в области линейных систем, т.е. способствуют лучшей обозримости и вычислимости различных характеристик изучаемых технических систем. В нашем случае это характеристики надежности.

Настоящая работа публикуется в двух частях. В первой части излагается математический аппарат логических определителей и другие математические заготовки, необходимые для исследования надежности сложных систем (типовые модели, методы и т.д.). Этот материал уже публиковался ранее [12], [13]. Для настоящей статьи его изложение усовершенствовано. Во второй части подробно изложена собственно методика исследования надежности сложных систем с помощью указанной математики. Работа в целом может рассматриваться как минимонография по логической теории надежности сложных систем, подробно описывающая нетрадиционный подход к изучению надежности таких систем.

1 Порядковая логика и логические определители

1. Рассмотрим множество $X=\{x_1,...,x_n\}$ из n элементов x_i, $x_i \in [A,B]$. Расположим элементы в порядке неубывания:

$$x^{(1)} \le x^{(2)} \le ... \le x^{(n)},\ \ x^{(r)} \in X\ . \tag{1.1}$$

Введем над множеством X операцию выделения произвольного порядкового элемента $x^{(r)}$ этого множества (r -*операцию*):

$$y \equiv f^{(r)}(x_1,...,x_n) = x^{(r)}, \quad r=1,...,n \tag{1.2}$$

Здесь r называется *рангом* операции. Легко видеть, что r-операция обобщает операции конъюнкции $\wedge = \min$ и дизъюнкции $\vee = \max$ непрерывной логики (НЛ) [1], переходя в них соответственно при $r = 1$ и $r = n$. Результатом r-операции над элементами множества является один из элементов этого же множества. Назовем произвольную функцию, аргументы которой $x_1, ..., x_n$ взяты из множества X и которая представляется в виде суперпозиции r-операций над X с различными значениями ранга r, *функцией порядковой логики.* Простейший пример такой функции – это сама r-функция (1.2). Более сложный пример – функция $y = f^{(2)}[f^{(2)}(x_1, x_2, x_3), f^{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4)]$. Любая функция порядковой логики $y = f(x_1, ..., x_n)$ на любом наборе аргументов $(x_1, ..., x_n)$ принимает значение одного из аргументов. Это связано с тем, что r-операции, суперпозицией которых представляется выражение y, всегда имеют своим результатом одну из переменных, участвующих в операциях.

Задать функцию порядковой логики $y = f(x_1, ..., x_n)$ можно, перечислив все $n!$ вариантов упорядочения аргументов $x_1, ..., x_n$ и указав для каждого варианта аргумент x_i, значение которого принимает функция. Такое задание функции порядковой логики есть частный случай первичного задания любой функции непрерывной логики [1]. Поэтому от такого первичного задания функции порядковой логики можно перейти к ее аналитическому представлению с помощью суперпозиции операций НЛ – конъюнкции и дизъюнкции (отрицание здесь не участвует, так как r-операция всегда имеет своим результатом значение одной из переменных, но не ее отрицания]. Методика перехода та же, что и для функций НЛ.

Пример 1. Функция порядковой логики $y = f^{(2)}(x_1, x_2, x_3)$ – медиана – задана табл. 1. Найти ее представление с помощью НЛ.

Таблица 1

Упорядочение аргументов	Значение функции	Упорядочение аргументов	Значение функции
$x_1 \le x_2 \le x_3$	x_2	$x_2 \le x_3 \le x_1$	x_3
$x_1 \le x_3 \le x_2$	x_3	$x_3 \le x_1 \le x_2$	x_1
$x_2 \le x_1 \le x_3$	x_1	$x_3 \le x_2 \le x_1$	x_2

Согласно табл. 1, искомую функцию можно представить так:

$$y = \begin{cases} x_1 \text{ при } x_2 \le x_1 \le x_3 \text{ или } x_3 \le x_1 \le x_2; \\ x_2 \text{ при } x_1 \le x_2 \le x_3 \text{ или } x_3 \le x_2 \le x_1; \\ x_3 \text{ при } x_1 \le x_3 \le x_2 \text{ или } x_2 \le x_3 \le x_1. \end{cases}$$

Объединим при помощи конъюнкции НЛ 1-ю строку при 2-м условии со 2-й строкой при 2-м условии, 1-ю строку при 1-м условии с 3-й строкой при 2-м условии и 2-ю строку при 1-м условии с 3-й строкой при 1-м условии:

$$y = \begin{cases} x_1 x_2 \text{ при } x_1 x_2 \ge x_3 \text{ (т.е. при } x_1 x_2 \ge x_1 x_3, x_2 x_3); \\ x_1 x_3 \text{ при } x_1 x_3 \ge x_2 \text{ (т.е. при } x_1 x_3 \ge x_1 x_2, x_2 x_3); \\ x_2 x_3 \text{ при } x_2 x_3 \ge x_1 \text{ (т.е. при } x_2 x_3 \ge x_1 x_2, x_1 x_3). \end{cases}$$

Объединяя теперь три строки в одну с помощью операции дизъюнкции НЛ, получаем искомое представление $y = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$.

Из сказанного следует, что функции порядковой логики – отдельный класс функций НЛ. Поэтому выражения функций порядковой логики можно подвергать эквивалентным преобразованиям (с целью их упрощения) с помощью законов НЛ [1]. Однако некоторые законы присущи лишь порядковой логике:

тавтология

$$f^{(r)}(x,...,x) = x; \tag{1.3}$$

переместительный

$$f^{(r)}(x_1,...,x_n) = f^{(r)}(x_{i_1},...,x_{i_n}) \tag{1.4}$$

(здесь $x_{i_1},...,x_{i_n}$ – любая перестановка аргументов $x_1,...,x_n$);

распределительный

$$f^{(r)}[\varphi^{(q_1)}(x_1,...,x_n), \varphi^{(q_2)}(x_1,...,x_n),...,\varphi^{(q_p)}(x_1,...,x_n)] = \varphi^{(q_r)}(x_1,...,x_n) \tag{1.5}$$

(здесь $q_1 < q_2 < ... < q_p$; $1 \le r \le p$)

и его частные случаи

$$\bigwedge_{i=1}^{n} f^{(r_i)}(x_1,...,x_n) = f^{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} r_i\right)}(x_1,...,x_n); \quad \bigvee_{i=1}^{n} f^{(r_i)}(x_1,...,x_n) = f^{\left(\bigvee_{i=1}^{n} r_i\right)}(x_1,...,x_n). \tag{1.6}$$

При помощи этих законов можно преобразовывать представления функций порядковой логики, не являющиеся выражениями НЛ.

2. Рассмотрим множество X_q, состоящее из q непересекающихся подмножеств $(x_{i_1},...,x_{im_i})$, $i = 1,...,q$, с элементами $x_{ij} \in [A, B]$, упорядоченными согласно

$$x_{i_1} \le x_{i_2} \le ... \le x_{im_i}, \quad i = 1,...,q. \tag{1.7}$$

Число элементов этого множества $n = \sum_{i=1}^{q} m_i$. Множество X_q частично упорядоченное; его удобно записывать в виде *квазиматрицы* q-го порядка со строками – упорядоченными подмножествами

$$\boldsymbol{X}_q = \left\| \begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix} \right\| = \|x_{ij}\|, \quad i = 1,...,q; \ j = 1,...,m_i. \tag{1.8}$$

Квазиматрица (1.8) отличается от обычной матрицы неодинаковым числом элементов в различных строках и упорядоченностью элементов в строках согласно (1.7). Рассмотренное выше неупорядоченное множество $X = (x_1,...,x_n)$ есть частный случай множества (1.8) при n строках из одного элемента каждая. Поэтому неупорядоченное множество X можно записать в следующем виде *матрицы-столбца*

$$\boldsymbol{X}_n = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{matrix} \right\|. \tag{1.9}$$

В другом частном случае, когда множество X_q полностью упорядочено, оно содержит лишь одно упорядоченное подмножество (одну строку в (1.8)). В этом случае матричная запись множества X_q имеет вид *матрицы-строки*

$$\boldsymbol{X}_n = \|x_1,...,x_n\|. \tag{1.10}$$

Для частично упорядоченного множества X_q, заданного своей квазиматрицей (1.8), как и для упорядоченного множества X, вводится r-операция (1.2) в виде функции

$$y \equiv f^{(r)}(x_{11},...,x_{qm_q}) = x^{(r)}, \quad r = 1,...,n, \tag{1.11}$$

выделяющей нужный порядковый элемент $x^{(r)}$ из X_q. Эта функция называется *логическим определителем* (ЛО) r-го ранга q-го порядка от квазиматрицы $X_q = \|x_{ij}\|$ и обозначается

$$X_{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{r}} = \left|\begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} = \left|x_{ij}\right|^{(r)}, \quad r = 1,...,n. \tag{1.12}$$

Специально отметим частные случаи – *определитель-столбец*

$$X_n^r = \left|\begin{matrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{matrix}\right|^{(r)}, r = 1,...,n. \tag{1.13}$$

соответствующий матрице-столбцу (1.9) и совпадающий с обычной r-функцией вида (1.2), и *определитель-строку*

$$X_1^r = \left|x_1,...,x_n\right|^{(r)} = x_r, \quad r = 1,...,n, \tag{1.14}$$

соответствующий матрице-строке (1.10). Логический определитель X_q^r от квазиматрицы X_q является числовой характеристикой этой квазиматрицы, как обычный определитель (детерминант) есть характеристика квадратной матрицы. Формально ЛО – это обобщение обычной r-функции (1.2) на случай частично упорядоченного множества аргументов, сохраняющее все основные черты r-функции. Так, любой ЛО $X_q^r = \left|x_{ij}\right|^{(r)}$ на любом наборе элементов $x_{11},...,x_{qm_q}$ принимает значение одного из элементов. Далее, любая функция, аргументы которой – элементы $x_{11},...,x_{qm_q}$ квазиматрицы X_q и которая представлена в виде суперпозиции ЛО X_q^r различных рангов r от X_q есть функция порядковой логики. Так что ЛО и суперпозицию ЛО можно задать, указав для каждого варианта упорядочения элементов $x_{11},...,x_{qm_q}$ элемент x_{ij}, значение которого принимает функция. От такого задания ЛО можно перейти к их аналитическому представлению с помощью операций НЛ (пример 1). Значит, ЛО и их суперпозиции образуют специальный класс функций НЛ. Их можно подвергать эквивалентным преобразованиям с помощью законов непрерывной логики [1] и порядковой логики (1.3)–(1.6).

2 Свойства логических определителей

Свойство 1. ЛО является монотонно неубывающей функцией ранга

$$X_q^r \geq X_q^p, \quad \text{если } r > p, \tag{2.1}$$

Свойство 2. Перестановка любых 2 строк ЛО X_q^r не меняет его значения.

Доказательства свойств 1, 2 вытекают из определения X_q^r.

Свойство 3. Общее для всех элементов определителя слагаемое можно вынести за знак ЛО:

$$\left| x_{ij} + c \right|^{(r)} = \left| x_{ij} \right|^{(r)} + c . \tag{2.2}$$

Доказательство: прибавление общего слагаемого ко всем элементам x_{ij} не меняет их взаимной упорядоченности согласно (1.7).

Свойство 4. Общий для всех элементов дизъюнктивный (конъюнктивный) член можно вынести за знак ЛО:

$$\left| x_{ij} \vee c \right|^{(r)} = \left| x_{ij} \right|^{(r)} \vee c; \quad \left| x_{ij} \wedge c \right|^{(r)} = \left| x_{ij} \right|^{(r)} \wedge c . \tag{2.3}$$

Доказательство следует из того, что введение общего для всех элементов дизъюнктивного (конъюнктивного) члена c не вменяет взаимной упорядоченности элементов, а лишь приводит с замене на c тех из них, которые вначале были меньше (больше) c.

Свойство 5. Общий для всех элементов сомножитель c можно вынести за знак ЛО с сохранением первоначального ранга r, если $c>0$, и с заменой его на дополнительный ранг $n-r+1$ при $c<0$:

$$\left| x_{ij} c \right|^{(r)} = \begin{cases} c\left| x_{ij} \right|^{(r)}, & c>0 \\ c\left| x_{ij} \right|^{(n-r+1)}, & c<0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Доказательство. При $c>0$ упорядоченность значений $x_{ij}c$ и x_{ij} ($i=1,...,q$; $j=1,...,m_i$) одинаковая, а при $c<0$ – обратная (максимальному x_{ij} соответствует минимальное $x_{ij}c$ и т.д.).

Свойство 6. Если $c > x_{im_i}$ $(i=1,...,q)$, то значение ЛО не меняется при добавлении к нему справа столбца из элементов c:

$$\left| \begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} & c \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} & c \end{matrix} \right|^{(r)} = \begin{cases} \left| \begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)}, & r=1,...,n; \\ c, & r=n+1,...,n+q. \end{cases} \tag{2.5}$$

Свойство 7. При добавлении к ЛО столбца из c; при $c < x_{i1}$ $(i=1,...,q)$ значение ЛО не изменится, если его ранг уменьшить на число строк:

$$\left| \begin{matrix} c & x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline c & x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)} = \begin{cases} c, & r=1,...,q; \\ \left| \begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r-q)}, & r=q+1,...,q+n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Свойство 8. Значение ЛО не меняется при исключении элемента ∞ (бесконечность) в конце какой-либо строки:

$$\left| \begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} & \infty \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} & \end{matrix} \right|^{(r)} = \begin{cases} \left| \begin{matrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{matrix} \right|^{(r)}, & r=1,...,n; \\ \infty, & r=n+1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Свойство 9. Значение ЛО не меняется, если из него исключить, элемент $-\infty$ в начале какой-либо строки, а ранг уменьшить на единицу:

$$\begin{vmatrix} -\infty\, x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{cases} -\infty \quad , & r = 1,\dots,q; \\ \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_i} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r-1)}, & r = q+1,\dots,q+n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательства свойств 6–9 вытекают из определения ЛО.

Свойство 10. Значение ЛО не изменится, если любую совокупность строк заменить ЛО, образованными этой совокупностью и расположенными в одной строке в порядке возрастания ранга:

$$X_q^r = \begin{vmatrix} X_{q\backslash i\dots k} \\ \hdashline X_{i\dots k}^1 X_{i\dots k}^2 \dots X_{i\dots k}^N \end{vmatrix}^{(r)}. \tag{2.9}$$

Здесь $X_{q\backslash i\dots k}$ – квазиматрица, полученная из квазиматрицы X_q исключением строк $i,\dots,k$; $X_{i\dots k}^p = \begin{vmatrix} i \\ \hdashline k \end{vmatrix}^p$ – ЛО p-го ранга из строк.

Доказательство. Указанная замена означает совместное упорядочение элементов строк $i,\dots,k$ и не влияет на значение порядкового элемента $x^{(r)}$ множества X_q следовательно, и на значение X_q^r.

Свойство 11. ЛО q-го порядка с двумя одинаковыми строками представим как ЛО $(q-1)$-го порядка с различными строками:

$$\begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q-1,1} \dots x_{q-1,m_{q-1}} \\ x_{q-1,1} \dots x_{q-1,m_{q-1}} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q-1,1} x_{q-1,1} \dots x_{q-1,m_{q-1}} x_{q-1,m_{q-1}} \end{vmatrix}^{(r)}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Такая перестановка удовлетворяет условию упорядоченности элементов в строках (1.7), т.е. снова дает логический определитель, причем не меняет его значения.

Свойство 12. Конечный ЛО можно представить как бесконечный:

$$\begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \ \infty\infty \dots \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \ \infty\infty \dots \end{vmatrix}^{(r)}. \tag{2.11}$$

Доказательство этого свойства получается повторным применением формулы (2.7).

Бесконечности в (2.11) можно заменить конечными элементами $x_{ik}, k > m_i$, такими, чтобы сохранилась упорядоченность (1.7) элементов в строках и выполнялись неравенства $x_{ik} \ge \bigvee_{i=1}^{q} x_{im_i}$, $i = 1,\dots,q$.

Свойство 13. Значение ЛО r-го ранга не изменится, если в любой i-й строке исключить элементы $x_{i,r+1}; x_{i,r+2} \dots$:

$$\begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{1r_1} \\ \hdashline x_{q1} \dots x_{qr_q} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad \text{где } r_i = r \wedge m_i \tag{2.12}$$

Доказательство. Действительно, r-м порядковым элементом $x^{(r)}$ квазиматрицы X_q может быть только один из r первых элементов какой-либо ее строки.

Свойство 14 *(закон тавтологии)*:

$$\begin{vmatrix} x \dots x \\ x \dots x \end{vmatrix}^{(r)} = x, \quad r = 1, \dots, n. \tag{2.13}$$

Доказательство следует из определения ЛО.

Свойство 15 *(распределительный закон)*:

$$\begin{vmatrix} X_q^{p_{11}} \dots X_q^{p_{1m_1}} \\ X_q^{p_{s1}} \dots X_q^{p_{sm_s}} \end{vmatrix}^{(r)} = X_q^{P_s^r}, \quad \text{где } P_s^r = \begin{vmatrix} p_{11} \cdots p_{1m_1} \\ p_{s1} \cdots p_{sm_s} \end{vmatrix}^{(r)}. \tag{2.14}$$

Здесь $p_{i_1} < p_{i_2} < \dots < p_{im_i}$, $r = 1, 2, \dots, n$, $n = \sum_{i=1}^{s} m_i$.

Свойство 16 *(частный случай распределительного закона)*:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} X_q^{p_i} = X_q^{\bigwedge_{i=1}^{n} p_i}. \tag{2.15}$$

Свойство 17 *(частный случай распределительного закона):*

$$\bigvee_{i=1}^{n} X_q^{p_i} = X_q^{\bigvee_{i=1}^{n} p_i}. \tag{2.16}$$

Доказательство свойств 15–17 вытекает из свойства 1. По нему упорядочение множества ЛО X_q^r различных рангов r от одной квазиматрицы X_q можно заменить упорядочением множества рангов.

3 Раскрытие логического определителя

Раскрыть ЛО – значит указать аналитическое представление функции НЛ, выражающей значение ЛО через значения его элементов. В § 1 был предложен прямой метод раскрытия ЛО. Однако этот метод громоздок и не работает в случае больших ЛО. Удобнее раскрывать ЛО по готовым формулам, дающим аналитическое представление функции НЛ, выражающей значения целого класса ЛО.

1. ЛО-столбец r-го ранга с n элементами выражается ДНФ

$$X_n^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_n \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{i_1 \neq \dots \neq i_{n-r+1}} (x_{i_1} \dots x_{i_{n-r+1}}), \; x_{i_k} \in \{x_1, \dots, x_n\} \tag{3.1}$$

или такой КНФ:

$$X_n^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_n \end{vmatrix}^{(r)} = \bigwedge_{i_1 \neq \dots \neq i_r} (x_{i_1} \vee \dots \vee x_{i_r}), \; x_{i_k} \in \{x_1, \dots, x_n\}. \tag{3.2}$$

Доказательство (3.1). Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ – упорядоченные согласно (1.1) элементы $x_1, \dots, x_n$. Каждая конъюнкция состоит из $n - r + 1$ различных элементов. Одна конъюнкция вида $b = x^{(r)} x^{(r+1)} \dots x^{(n)}$, остальные вида $b_i = x^{(s)} b_i'$, где $s < r$, т.е. $b = x^{(r)}$, $b_i \le x^{(r)}$ и правая часть выражения (3.1) равна $x^{(r)}$, т.е. левой части. Формула (3.2) доказывается аналогично.

2. Общий бесконечный ЛО r-го ранга q-порядка выражается ДНФ:

$$X_q^r = \left| \begin{array}{l} x_{11} \ldots x_{1i_1} \ldots \\ \hline x_{21} \ldots x_{qi_q} \ldots \end{array} \right|^{(r)} = \bigvee_{\sum\limits_{s=1}^{q} i_s = r+q-1} (x_{1i_1} \ldots x_{qi_q}). \quad (3.3)$$

Доказательство. Сначала докажем частный случай (3.3) при $q = 2$.

$$X_2^r = \left| \begin{array}{l} x_{11} \ldots x_{1i_1} \ldots \\ \hline x_{21} \ldots x_{2i_2} \ldots \end{array} \right|^{(r)} = \bigvee_{k=1}^{r} (x_{1k} x_{2,r+1-k}). \quad (3.4)$$

Согласно свойству 13 логический определитель X_2^r можно представить как конечный ЛО:

$$X_2^r = \left| \begin{array}{l} x_{11} \ldots x_{1r} \\ \hline x_{21} \ldots x_{2r} \end{array} \right|^{(r)}, \quad (3.5)$$

который, не учитывая упорядоченности элементов в строках, представим в виде ЛО-столбца

$$X_2^r = \left| \begin{array}{l} x_{11} \\ \hline x_{1r} \\ x_{21} \\ \hline x_{2r} \end{array} \right|^{(r)}. \quad (3.6)$$

Раскроем ЛО (3.6) по формуле (3.1). Каждая конъюнкция в (3.1) включает $r+1$ различных элементов. Из этих элементов хотя бы один вида x_{1i} и хотя бы один вида x_{2j}. Пусть B_{ks} – s-я из конъюнкций, включающих k элементов вида x_{2j} и $r+1-k$ элементов вида x_{1i}. Тогда согласно (3.1) $X_2^r = \bigvee\limits_{k=1}^{r} \bigvee\limits_{s} B_{ks}$. При фиксированном k по условию (1.7) максимальна та конъюнкция B_{ks} ($s = 1,2,\ldots$), в которую входят элементы $x_{1k},\ldots,x_{1r}$; $x_{2,r+1-k},\ldots,x_{2r}$: она равна $x_{1k} x_{2,r+1-k}$. Отсюда $\bigvee\limits_{s} B_{ks} = x_{1k} x_{2,r+1-k}$. Подставив это в выражение X_2^r, получим (3.4).

Теперь формулу (2.19) докажем индукцией по q. При $q = 1$ (3.3) переходит в установленное ранее (см. (1.14)) равенство $X_1^r = \left| x_{11} \ldots x_{1i_1} \ldots \right|^{(r)} = x_{1r}$, а при $q = 2$ – в доказанное соотношение (3.4). Допустим, что формула (3.3) верна для некоторого $q = p$. Докажем, что тогда она верна и при $q = p+1$. Представим X_{p+1}^r по правилу (2.9) в виде блочного определителя 2-го порядка:

$$X_{p+1}^r = \left| \begin{array}{l} x_{11} \ldots x_{1i_1} \ldots \\ \hline x_{p1} \ldots x_{pi_p} \ldots \\ x_{p+1,1} \ldots x_{p+1,i_{p+1}} \ldots \end{array} \right|^{(r)} = \left| \begin{array}{l} X_p^1 \ldots X_p^{i_1} \ldots \\ x_{p+1,1} \ldots x_{p+1,i_{p+1}} \ldots \end{array} \right|^{(r)}.$$

Раскроем последний по формуле (3.4) $X_{p+1}^{r}=\bigvee_{k=1}^{r}X_{p}^{k}x_{p+1,r+1-k}$. Согласно вышеуказанному допущению, ЛО X_{p}^{k} можно выразить в виде (3.3). Отсюда следует

$$X_{p+1}^{r}=\bigvee_{k=1}^{r}\left(\bigvee_{\sum_{s=1}^{p}i_s=k+p-1}x_{1i_1}\ldots x_{pi_p}\right)x_{p+1,r+1-k}=\bigvee_{k=1}^{r}\bigvee_{\sum_{s=1}^{p+1}i_s=r+p}x_{1i_1}\ldots x_{pi_p}x_{p+1,r+1-k}=\bigvee_{\substack{\sum_{s=1}^{p+1}i_s=r+p,\\ 1\le i_{p+1}\le r}}a_{1i_1}\ldots a_{p+1,i_{p+1}}.$$

В последнем выражении по свойству 13 можно опустить условие $1\le i_{p+1}\le r$, не изменив значение ЛО. Получим $X_{p+1}^{r}=\bigvee_{\sum_{s=1}^{p+1}i_s=r+p}x_{1i_1}\ldots x_{p+1,i_{p+1}}$, что и требовалось доказать.

3. Общий конечный ЛО r-го ранга q-го порядка выражается такой ДНФ:

$$X_{q}^{r}=\begin{vmatrix}x_{11}\ldots x_{1m_1}\\ \hdashline x_{q1}\ldots x_{qm_q}\end{vmatrix}^{(r)}=\bigvee_{\sum_{s=1}^{q}i_s=r+q-1}\left(\overset{m_1}{\breve{x}_{1i_1}}\ldots\overset{m_q}{\breve{x}_{qi_q}}\right). \tag{3.7}$$

Здесь и ниже запись $\overset{m_1}{\breve{x}_{1i_1}}$ означает, что элемент x_{ki_k} исключается из тех конъюнкций, для которых из условия на $\sum i_s$ формально получается $i_k>m_k$.

Доказательство формулы (3.7) получается, если в соответствии с (2.11) представить конечный ЛО X_{q}^{r} как бесконечный и применить к последнему правило раскрытия (3.3), учитывая, что $x\wedge\infty=x$.

Пример 2. По формуле (3.1) раскроем ЛО-столбец

$$X_{3}^{r}=\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}^{(r)}=\begin{cases}x_1x_2x_3, & r=1,\\ x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3, & r=2,\\ x_1\vee x_2x_3, & r=3.\end{cases}$$

Второе из выписанных выражений было получено более сложным путем – с использованием прямого метода в примере 1.

Пример 3. По формуле (3.7) раскроем общий ЛО 2-го порядка

$$X_{3}^{r}=\begin{vmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{vmatrix}^{(r)}=\begin{cases}x_{11}x_{21}, & r=1,\\ x_{11}x_{22}\vee x_{12}x_{21}, & r=2,\\ x_{12}x_{22}\vee x_{11}x_{21}, & r=3,\\ x_{12}x_{22}, & r=4.\end{cases}$$

4 Раскрытие больших логических определителей

1. Раскрытие больших ЛО (т.е. ЛО с большим числом элементов) по явным формулам § 3 слишком трудоемко. В таких случаях целесообразнее применять *разложения* ЛО на ЛО меньших размеров. Простейшее такое разложение – (2.9).

Пример 4. Раскроем ЛО 4-го порядка

$$X_4^4 = \begin{vmatrix} x_{11}x_{12} \\ x_{21}x_{22} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{vmatrix}^{(4)}.$$

Запишем данный ЛО как блочный ЛО 2-го порядка, объединив 1-ю строку со 2-й и 3-ю с 4-й:

$$X_2^4 = \begin{vmatrix} B_2^1 & B_2^2 & B_2^3 & B_2^4 \\ C_2^1 & C_2^2 & & \end{vmatrix}^{(4)}; \quad \text{где} \quad B_2^r = \begin{vmatrix} x_{11}x_{12} \\ x_{21}x_{22} \end{vmatrix}^{(r)}, r = 1,...,4; \quad C_2^r = \begin{vmatrix} x_{31} \\ x_{41} \end{vmatrix}^{(r)}, r = 1,2..$$

Раскроем теперь ЛО X_2^4 по (3.7): $X_2^4 = B_2^2 \vee B_2^3 C_2^2 \vee B_2^4 C_2^1$. Остается подставить сюда выражения B_2^r из примера 3 и значение определителя C_2^r:

$$C_2^r = \begin{cases} x_{31}x_{41}, & r = 1; \\ x_{31} \vee x_{41}, & r = 2. \end{cases}$$

Окончательно получаем выражение ЛО, сложность которого – 13 двухместных операций $\vee$ и $\wedge$ НЛ:

$$X_2^4 = x_{11}x_{22} \vee x_{12}x_{21} \vee (x_{12}x_{22} \vee x_{11} \vee x_{21}) \wedge (x_{31} \vee x_{41}) \vee (x_{12} \vee x_{22}) x_{31}x_{41}.$$

Раскрытие этого ЛО по (3.7) дает выражение

$$X_2^4 = x_{11}x_{22} \vee x_{12}x_{21} \vee x_{11}x_{31} \vee x_{11}x_{41} \vee x_{21}x_{31} \vee x_{21}x_{41} \vee$$
$$\vee x_{12}x_{22}x_{31} \vee x_{12}x_{22}x_{41} \vee x_{12}x_{31}x_{41} \vee x_{22}x_{31}x_{41},$$

сложность которого – 23 операции.

Более конкретные правила разложения ЛО, когда однозначно указываются блоки, на которые разлагается ЛО, изложены ниже.

2. Назовем *логическим дополнением* элемента x_{ij} в ЛО X_q^r ЛО, полученный из X_q^r исключением элемента x_{ij}. Обозначим его $X_q^r \setminus x_{ij}$. ЛО-столбец r-го ранга с n элементами можно разложить поэлементно по такой ДНФ:

$$X_n^r = \begin{vmatrix} x_1 \\ \text{-}\,\text{-} \\ x_n \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{i=1}^{n} x_i X_n^r \setminus x_i. \quad (4.1)$$

Доказательство. Раскрыв ЛО $X_n^r \setminus x_i$ в правой части по правилу (2.17), получим раскрытый по этому правилу ЛО левой части X_n^r.

Общий ЛО r-го ранга q-го порядка можно разложить поэлементно по ДНФ:

$$X_q^r = \begin{vmatrix} x_{11} \ldots x_{1m_1} \\ \text{-}\,\text{-}\,\text{-}\,\text{-}\,\text{-}\,\text{-} \\ x_{q1} \ldots x_{qm_q} \end{vmatrix}^{(r)} = \bigvee_{i.j} x_{ij} X_q^r \setminus x_{ij}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Рассматривая ЛО X_q^r без учета упорядоченности элементов в строках (т.е. как ЛО-столбец), применяем к нему формулу (4.1).

Формулы (4.1), (4.2) задают разложения ЛО по элементам.

3. Пусть $X_q^r = \left| \begin{array}{l} x_{11}\ldots x_{1i_1}\ldots \\ \hline x_{q1}\ldots x_{qi_q}\ldots \end{array} \right|^{(r)}$ – общий бесконечный ЛО r-го ранга q-го порядка, а $X_{d,b}^s$ – это блок-ЛО s-го ранга, составленный из строк $d, d+1,\ldots,b$ ЛО X_q^r. Справедливо разложение ЛО по блокам:

$$X_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} s_i = r+p-1} X_{1,k_1}^{s_1} X_{k_1+1,k_2}^{s_2} \ldots X_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Представим X_q^r в блочном виде (2.9):

$$X_q^r = \left| \begin{array}{l} X_{1,k_1}^{1} \ldots X_{1,k_1}^{i_1} \ldots \\ X_{k_1+1,k_2}^{1} \ldots X_{k_1+1,k_2}^{i_2} \ldots \\ \hline X_{k_{p-1}+1,q}^{1} \ldots X_{k_{p-1}+1,q}^{i_p} \ldots \end{array} \right|^{(r)}.$$

Рассматривая блоки $X_{d,b}^s$ как элементы ЛО X_q^r, раскроем его по (3.3). Получим (4.3).

Пусть $X_q^r = \left| \begin{array}{l} x_{11}\ldots x_{1m_1} \\ \hline x_{q1}\ldots x_{qm_q} \end{array} \right|^{(r)}$ – общий конечный ЛО r-го ранга q-го порядка, а $X_{d,b}^s$ – то же, что и выше. Тогда справедливо разложение ЛО по блокам:

$$X_q^r = \bigvee_{\sum_{i=1}^{p} s_i = r+p-1} \overset{M_1}{\breve{X}}{}_{1,k_1}^{s_1} \overset{M_2}{\breve{X}}{}_{k_1+1,k_2}^{s_2} \ldots \overset{M_p}{\breve{X}}{}_{k_{p-1}+1,q}^{s_p}. \tag{4.4}$$

Здесь M_i – это число элементов в соответствующем блок-ЛО $X_{d,b}^{s_i}$, а запись $\overset{M_i}{\breve{X}}{}_{d,b}^{s_i}$ означает, что ЛО $X_{d,b}^{s_i}$ не входит в те конъюнкции, для которых из условия на $\sum s_i$ получается $s_i > M_i$. Доказательство повторяет доказательство разложения (4.3), но с раскрытием ЛО по (3.7).

4. Разложения (2.9), (4.1)–(4.4) составляют основу *иерархических процедур раскрытия ЛО*. В такой процедуре 1-й шаг – это разложение вычисляемого ЛО $X_q^r = | X_{ij} |_q^r$ по одной из формул (2.9), (4.1)–(4.4) на блоки-ЛО низшего порядка; 2-й шаг – разложение получившихся ЛО на ЛО еще более низкого порядка и т.д., пока не придем к выражению исходного ЛО через ЛО 1-го порядка, т.е. элементы x_{ij}. Иерархическая процедура раскрытия ЛО показана выше в примере 4.

Трудоемкость такой процедуры и сложность получаемого выражения ЛО зависят от формулы разложения ЛО и способа его разделения на блоки. Наибольший эффект достигается при использовании поблочных разложений с делением на каждом шаге имеющихся ЛО на два равновеликих. При этом формулы разложения бесконечного (4.3) и конечного (4.4) ЛО принимают соответственно вид:

$$X_q^r = \bigvee_{i+j=r+1} X_{1,]q/2[}^{i} X_{]q/2[+1,q}^{j}, \tag{4.5}$$

$$X_q^r = \bigvee_{i+j=r+1} \overset{M_1}{\breve{X}}{}_{1,]q/2[}^{i} \overset{M_2}{\breve{X}}{}_{]q/2[+1,q}^{j} \quad (\,]a[\, - \text{целая часть } a). \tag{4.6}$$

Получаемые по ним выражения ЛО обладают соответственно сложностью

$$\widetilde{N}_q^r = r^2(q-1) + 2r - 1, \tag{4.7}$$

$$N_q^r = krn, \quad k \le 2 \;\; (k - const). \tag{4.8}$$

Оценка (4.8) получена в предположении одинакового числа элементов m во всех q строках ЛО; в ней n – общее число элементов $(n = mq)$. Использование дихотомических блочных разложений (4.5), (4.6) обеспечивает раскрытие достаточно больших ЛО с приемлемой сложностью вычислений.

5. При раскрытии особенно больших ЛО получаемые с помощью разложений (4.5), (4.6) выражения ЛО могут оказаться недопустимо сложными. В таких случаях целесообразно приближенное раскрытие ЛО, основанное на получении двусторонних аналитических оценок величины ЛО. Эти оценки имеют следующий вид: для ЛО-столбца

$$(x_1 ... x_{n-r+1}) \vee (x_{n-r+2} ... x_{2(n-r+1)}) \vee ... \vee (x_{(M_1-1)(n-r+1)} ... x_{M_1(n-r+1)}) \vee (x_r ... x_n) \le \left|\begin{matrix} x_1 \\ \hdashline x_n \end{matrix}\right|^{(r)} \le$$
$$\le (x_1 \vee ... \vee x_r) \wedge (x_{r+1} \vee ... \vee x_{2r}) \wedge ... \wedge (x_{(M_2-1)r+1} \vee ... \vee x_{M_2 r}) \wedge (x_{n-r+1} \vee ... \vee x_n), \tag{4.9}$$

где $M_1 =]n/(n-r+1)[,\; M_2 =]n/r[$; для общего бесконечного ЛО

$$x_{1l} \wedge ... \wedge x_{ql} \le \left|\begin{matrix} x_{11} ... x_{1i_1} ... \\ \hdashline x_{q1} ... x_{qi_q} ... \end{matrix}\right|^{(r)} \le x_{1l} \vee ... \vee x_{ql}, \tag{4.10}$$

где $l = [r/q]$ и $[\cdot]$ – символ округления до ближайшего большего целого числа; для общего конечного ЛО

$$\overset{m_1}{\breve{x}}_{1d_1} \wedge ... \wedge \overset{m_q}{\breve{x}}_{qd_q} \le \left|\begin{matrix} x_{11} ... x_{1m_1} \\ \hdashline x_{q1} ... x_{qm_q} \end{matrix}\right|^{(r)} \le x_{1l_1} \vee ... \vee x_{ql_q}, \tag{4.11}$$

где $d_p = \left]\dfrac{(q+r-1)m_p}{\sum\limits_{i=1}^{q} m_i}\right[, \quad l_p = \left[\dfrac{rm_p}{\sum\limits_{i=1}^{q} m_i}\right], \quad p = 1,...,q$.

Приведенные оценки позволяют получать приближенные выражения ЛО со сложностью, пропорциональной размерам ЛО, что делает возможным вычисление ЛО практически неограниченных размеров.

Пример 5. Оценим ЛО X_4^4 из примера 4. Имеем $d_1 = d_2 =]7 \cdot 2/6[= 2,\, d_3 = d_4 = $ $=]7 \cdot 1/6[= 1,\; l_1 = l_2 = [4 \cdot 2/6] = 2,\; l_3 = l_4 =]4 \cdot 1/6] = 1$, и искомые оценки имеют вид:

$$x_{12}x_{22}x_{31}x_{41} \le X_4^4 \le x_{12} \vee x_{22} \vee x_{31} \vee x_{41}.$$

Сложность их совместного вычисления – в наличии шести операций, а точность зависит от численных значений x_{ij}. Например, если $x_{12} = x_{22} = 10, x_{31} = x_{41} = 11$, то имеем оценки $10 \le X_4^4 \le 11$, погрешность которых 10%.

5 Проблема анализа надежности сложных систем

Анализ надежности простых систем без памяти [6–11] несложен, что обусловлено простотой логических схем, моделирующих такие системы. Однако попытки применить соответствующие методы к сложным системам (чьи логические схемы-модели сложны) обычно неэффективны и приводят к необозримым выражениям, трудоемкость вычисления которых слишком велика. Проблема обостряется тем, что блоки системы могут многократно восстанавливаться после отказов. Это означает, что надежностные процессы (НП) в блоках, служащие входными воздействиями схемы-модели, могут иметь большую длину. Ниже излагается другой подход к анализу надежности сложных систем, использующий аппарат логических определителей (ЛО) [12], [13]. При этом, во-первых, вместо двухблочных систем в качестве элементарных выбираются более крупные, многоблочные системы; во-вторых, вместо отдельных моментов отказов и восстановлений блоков рассматриваются определенные совокупности моментов, порождающие соответствующие квазиматрицы и ЛО [12], р13]. Такое укрупнение элементарных параметров системы дает возможность блочного описания системы, что создает обозримость анализируемых НП в системе, несмотря на сложность ее самой и НП в блоках. Данный подход подобен матричному анализу линейных систем, однако здесь он применяется к другим, надежностным системам, которые существенно нелинейны.

6 Классы сложных систем и методы анализа их надежности

Исследуемые системы, учитывая специфику анализа их надежности, можно разбить на три класса: 1) *простые системы со сложными (длинными) входными процессами и НП в блоках*; 2) *сложные системы с простыми (короткими) входными процессами и НП в блоках*; 3) *сложные системы со сложными входными процессами и НП в блоках.* Анализ надежности систем 1-го класса целесообразно выполнять методом подстановок [8–11]. Для этого надо иметь соотношения «входные процессы – выходной процесс» одно- и двухвходовых элементов логической схемы-модели системы при сложных входных процессах. Эти соотношения находятся в процессе анализа надежности элементарных одноблочных [8–11] и двухблочных систем с многократным восстановлением блоков и, возможно, многократно изменяющимися входными воздействиями (§ 11). Анализ надежности систем второго класса выполняется с помощью *метода эквивалентных схем* – варианта метода подстановок, отличающегося более простой логической схемой-моделью, но включающей более сложные элементы (§ 9). Реализация данного метода требует отыскания соотношений «входы – выход» для сложных (многовходовых) элементов при сложных входных процессах, т.е. анализа надежности элементарных многоблочных систем с многократным восстановлением их блоков и изменяющимися входными воздействиями (§ 12). Анализ надежности систем 3-го класса выполняется *численным* или *приближенным методом*. Численный метод основан на выделении интервалов постоянства выходного процесса схемы-модели и вычислении значений процесса в каждом интервале с помощью функции работоспособности (ФР) схемы. Приближенный метод – вариант аналогичного метода для простых систем (см. [8–11]); его отличие – в более простой схеме-модели, состоящей, однако, из более сложных элементов (§ 9).

Заметим, что менее сложные системы (с меньшим номером класса) могут анализироваться методами, предназначенными для более сложных (но не наоборот). Так, системы 1-го класса можно анализировать методами эквивалентных схем, численным и приближенным, системы 2-го класса – численным и приближенным методами. Но такое использование более сильных методов имеет свои издержки. Например, анализ систем 1-го и 2-го классов численным (приближенным) методом дает лишь численный (приближенный) результат, в то время как их анализ методами подстановок (для систем 1-го класса) и эквивалентных схем (для систем 2-го класса) дает аналитический точный результат.

Анализ надежности любой системы означает отыскание как НП в системе, так и ее показателей надежности (ПН). Но вторые выражаются через первые соотношениями, не зависящими от сложности системы (см. [6–11]). Таким образом, сложность системы влияет непосредственно на форму ее НП и лишь через нее на ПН системы. Поэтому в данной работе анализ надежности сложной системы понимается прежде всего как отыскание НП в системе.

7 Построение математической модели надежности системы

Шаг 1. Первым шагом при анализе надежности некоторой системы является составление ее математической модели, т.е. отыскание ФР, связывающих надежностные состояния (НС) системы с НС ее блоков и состояниями ее входов. Для простых систем ФР можно получить непосредственно из первичного описания надежности системы [8–11]. Для сложных систем это обычно не удается, и для отыскания их ФР приходится применять *формальные методы,* основанные на том, что каждой однофункциональной автономной системе без памяти соответствует свой эквивалентный двухполюсник, звенья которого соответствуют блокам системы [8–11]. Связность двухполюсника (наличие путей между входным и выходным его полюсами) означает работоспособность, а несвязность – отказ системы. Аналогично присутствие (обрыв) звена означает работоспособность (отказ) соответствующего блока. Таким образом, отыскание ФР системы сводится к 1) переходу от первичного описания надежности системы к ее эквивалентному двухполюснику и 2) отысканию всех минимальных (без повторения звеньев) путей между входным и выходным полюсами двухполюсника. Функция работоспособности записывается в ДНФ, элементарные конъюнкции которой соответствуют найденным путям (одна буква конъюнкции означает присутствие одного звена цепи). Изложенная процедура выполняется без труда.

Шаг 2. Обозначим входной и выходной узлы двухполюсника A и B и пронумеруем в произвольном порядке остальные узлы. Выберем какой-либо узел i_1, отличный от A, но смежный с ним, затем узел i_2, отличный от A и i_1 и смежный с i_1, и т.д. Таким образом, найдем первый минимальный путь $S = Ai_1i_2...i_kB$ из A в B, не имеющий одинаковых узлов. Следующий путь определим, исходя из найденного: от предпоследнего узла i_k найдем новое продолжение $i_ki_{k+1}...i_{k+p}B$, где новые узлы $i_{k+1},...,i_{k+p}$ отличны от пройденных $A, i_1,..., i_k$. Продолжений может быть несколько, так мы получим целую группу путей. Следующую группу путей получим, исходя из предпредпоследнего узла i_{k-1} найденного пути S, строя продолжения $i_{k-1}i'_ki_{k+1}...i_{k+p}B$, где опять новые узлы $i'_k, i_{k+1},..., i_{k+p}$ отличны от пройденных узлов $A, i_1,..., i_{k-1}$ и, кроме того, $i'_k \neq i_k$. Дальнейший ход процедуры аналогичен. Для ускорения процедуры надо всегда выбирать новый узел так, чтобы приближаться к B (удаляться от A).

Пример 6. Найдем ФР системы электропитания переменным током в самолете. Ток создается с помощью силовой установки C и генератора переменного тока $Г_1$

или с помощью C, генератора постоянного тока Γ_2 и преобразователя Π, а в аварийной ситуации – с помощью батарей $Б$ и Π. Обозначим НС блоков $C, \Gamma_1, Б, \Pi, \Gamma_2$ соответственно a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Тогда системе соответствует эквивалентный двухполюсник (рис. 1), в котором ребро a_5 ориентировано от 1 к 2. Зададим двухполюсник таблицей смежности

$$\begin{array}{c|l} A & 1,2 \\ 1 & 2, B \\ 2 & B. \end{array}$$

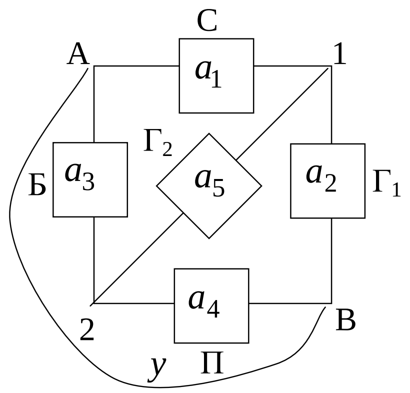

Рисунок 1

Поиск пути в двухполюснике начнем в строке A. Найдем узел 1, смежный с узлом A. В строке 1 ищем узел, смежный узлу 1. Найдем узел 2. В строке 2 находим единственный узел, смежный 2 (узел B). В итоге получаем 1-й путь $A12B$. Ищем следующий путь, отыскивая новое продолжение от предпоследнего узла 2 найденного пути. Такого продолжения нет. Ищем новый путь, отыскивая новое продолжение от предпредпоследнего узла 1. По таблице смежности это продолжение $1B$. Новый путь $A1B$. Наконец, от 1-го узла A находим новое продолжение $A2, 2B$, что дает еще один путь $A2B$. Найденным трем путям из A в B соответствует ФР системы $y = a_1 a_4 a_5 \vee a_1 a_2 \vee a_3 a_4$.

Описанная процедура поиска путей в эквивалентном двухполюснике системы не нужна, если изучаемая система – каноническая, т.е. последовательная или параллельная, или последовательно-параллельная, или параллельно-последовательная. В этих случаях, независимо от сложности системы, ее ФР выписывается сразу по соответствующему 2-полюснику. Это связано с тем, что экономию вычислений при отыскании ФР сложных систем можно получить, если система *декомпозируется в последовательное или параллельное объединение подсистем.* В первом случае ФР всей системы y выражается через ФР подсистем y_i в виде

$$y = \bigwedge_i y_i, \tag{7.1}$$

во втором случае – в виде

$$y = \bigvee_i y_i. \tag{7.2}$$

8 Упорядочение процессов

Рассмотрим логический $(n,1)$-полюсник – модель надежности некоторой однофункциональной логической системы. На входы схемы поступают процессы $x_1(t),...,x_n(t)$ (НП в блоках системы и ее входные воздействия), а с выхода снимается процесс $y(t)$ (искомый НП на выходе изучаемой системы). Пусть булева функция $y = f(x_1,...,x_n)$, реализуемая $(n,1)$-полюсником (ФР изучаемой системы) является *симметрической,* т.е. не меняется при перенумерации аргументов

$$f(x_1,...,x_n) = f(x_{i_1},...,x_{i_n}) \tag{8.1}$$

Здесь $(x_{i_1},...,x_{i_n})$ – любая перестановка аргументов $(x_1,...,x_n)$. Значение симметрической функции определяется числом аргументов, равных 0 и 1, но не зависит от того, какие это аргументы. Например, $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ ($y = 1$, если любые два из трех аргументов равны 1). Пусть входные процессы $(n,1)$-полюсника начинаются и оканчиваются импульсами

$$\left.\begin{array}{c} x_1(t) = 1(a_{11},b_{11})0(-.-)1(a_{12},b_{12})...1(a_{1m_1},b_{1m_1}) \\ \hdashline x_n(t) = 1(a_{n1},b_{n1})0(-.-)1(a_{n2},b_{n2})...1(a_{nm_n},b_{nm_n}) \end{array}\right\}. \tag{8.2}$$

Ниже мы убедимся, что это не ограничивает общности (см. § 11, 12). Исходя из симметричности функции, реализуемой $(n,1)$-полюсником, совокупность его входных процессов (8.2) можно трактовать просто как набор $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ импульсов из (8.2), не указывая входов, по которым они подаются. При этом некоторые импульсы, принадлежавшие различным входам, станут пересекающимися. Преобразуем этот набор импульсов так, чтобы: 1) для любой пары импульсов начинающийся позднее импульс оканчивался тоже позднее (*условие упорядоченности*); 2) реакция $(n,1)$-полюсника не изменилась (*условие эквивалентности*). Пусть $x_{ir}(t) = 1(a_{ir},b_{ir})$ и $x_{js}(t) = 1(a_{js},b_{js})$ – пара импульсов, взятых из процессов на i-м и j-м входах, Если $i = j$, т.е. импульсы действуют на одном входе, условие упорядоченности уже выполнено и преобразования не требуется. Преобразование не нужно и в случае, если импульсы действуют на различных входах $(i \neq j)$ и не пересекаются. Пусть импульсы принадлежат к различным входам и пересекаются. Пусть также импульс $x_{js}(t)$ начинается позднее, чем $x_{ir}(t)$, т.е. $a_{ir} \le a_{js}$. Тогда, если $x_{js}(t)$ и оканчивается позднее $x_{ir}(t)$, условие упорядоченности выполнено. Если $x_{js}(t)$ оканчивается раньше $x_{ir}(t)$, т.е. $b_{js} < b_{ir}$, упорядоченность отсутствует. В этом случае нужное преобразование состоит в изъятии «лишнего» участка (b_{js},b_{ir}) импульса $x_{ir}(t)$ и присоединении его к импульсу $x_{js}(t)$. Новая пара импульсов $x'_{ir}(t) = 1(a_{ir},b_{js}),\ x'_{js}(t) = 1(a_{js},b_{ir})$ удовлетворяет условию упорядоченности. А так как перенос импульсов с одного входа схемы, реализующей симметрическую функцию входов, на другой не меняет реакции схемы, то выполненное преобразование – эквивалентное.

В результате указанного преобразования всех неупорядоченных пар импульсов, подаваемых на различных входах, получим эквивалентную воздействию (8.2) совокупность $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ импульсов:

$$x^{(r)}(t)=1(a^{(r)},b^{(r)}),\ r=1,...,M\ , \tag{8.3}$$

действие которых уже не зависит от входов, по которым они подаются (*свободные импульсы*). Импульсы (8.3) упорядочены по условию

$$a^{(1)}\le a^{(2)}\le...\le a^{(M)},\ b^{(1)}\le b^{(2)}\le...\le b^{(M)}. \tag{8.4}$$

Операция переноса, упорядочивая импульсы, не меняет множеств моментов начала и моментов окончания импульсов. Поэтому в (8.4) моменты начал (окончаний) импульсов остались в совокупности прежними, т.е.

$$a^{(r)}\in\{a_{11},...,a_{1m_1};...;a_{n1},...,a_{nm_n}\},\ b^{(r)}\in\{b_{11},...,b_{1m_1};...;b_{n1},...,b_{nm_n}\},\ r=1,..,M\ . \tag{8.5}$$

Из (8.4), (8.5) с учетом упорядоченности моментов изменений a_{ij},b_{ij} в (8.2) следует, что моменты начала (окончания) импульсов в полученной совокупности импульсов (8.3) выражаются через моменты начала (окончания) импульсов в исходном воздействии (8.2) с помощью ЛО n-го порядка:

$$a^{(r)}=A^r\equiv\left|\begin{matrix}a_{11}...a_{1m_1}\\ \hdashline a_{n1}...a_{nm_n}\end{matrix}\right|^{(r)},\quad b^{(r)}=B^r\equiv\left|\begin{matrix}b_{11}...b_{1m_1}\\ \hdashline b_{n1}...b_{nm_n}\end{matrix}\right|^{(r)},\quad r=1,...,M\ . \tag{8.6}$$

Полученный результат таков: *совокупность процессов (8.2), действующих на входах схемы, реализующей симметрическую булеву функцию, можно всегда заменить эквивалентной совокупностью из* $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ *свободных импульсов* $x^{(r)}(t)=1(a^{(r)},b^{(r)}),\ r=1,...,M$, *интервалы существования которых выражаются через параметры процессов (8.2) с помощью ЛО (8.6) и которые упорядочены так, что импульс с большим номером начинается (оканчивается) позже, чем импульс с меньшим номером.* Число $k(t)$ импульсов, действующих в произвольный момент времени t в совокупности процессов (8.2) и эквивалентной ей совокупности импульсов, одинаково и не превышает числа n процессов.

9 Метод эквивалентных схем

Как известно [8–11], любая система без памяти имеет модель надежности в виде двухступенчатой временной логической схемы. На входы этой схемы подаются процессы $x_1(t),...,x_n(t)$ (внешние воздействия на систему) и $a_1(t),...,a_N(t)$ (НП в блоках системы), а с выходов схемы снимаются процессы $y_1(t),...,y_r(t)$ (искомые НП в системе). Первая ступень схемы – чисто временная, построенная из операторов задержки и реализующая временной сдвиг входных процессов, вторая ступень схемы – чисто логическая, реализующая булевы ФР системы $y_k=f_k(...,x_i,...,a_j,...)$. Опишем теперь *метод эквивалентных схем.*

Представим ФР $f_1,...,f_r$ в ДНФ. В соответствии с этим вторая ступень схемы-модели заменится эквивалентной 3-ступенчатой схемой, где ступень 1 образована инверторами, ступень 2 – многовходовыми конъюнкторами, ступень 3 – многовходовыми дизъюнкторами, а схема-модель в целом станет четырехступенчатой. *n-входовый конъюнктор* – это n-местный элементарный логический оператор, преобразующий воздействия $a_1(t),...,a_n(t)$ в реакцию $y(t)$ в соответствии с элементарной n-местной конъюнкцией [8–11]

$$y = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n ; \tag{9.1}$$

n-входовый дизъюнктор – это n-местный элементарный логический оператор, преобразующий воздействия $a_1(t),...,a_n(t)$ в реакцию $y(t)$ согласно булевой функции – элементарной n-местной дизъюнкции [8–11]

$$y = a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n . \tag{9.2}$$

Значения входов $a_1,...,a_n$ и выхода y элемента в (9.1), (9.2) относятся к одному и тому же моменту времени t. Пусть нам известны соотношения «входные процессы – выходной процесс» для каждого типа элемента схемы. Тогда, применяя принцип подстановок [8–11], можно последовательно определить процессы на выходах ступени 1, затем процессы на выходах ступеней 2, 3 и, наконец, процессы на выходах схемы. Последние и есть искомые НП $y_1(t),..., y_r(t)$ в изучаемой системе.

Таким образом, анализ надежности системы без памяти сводится к отысканию реакции логической схемы-модели системы на заданные входные воздействия, что, в свою очередь, сводится к отысканию реакций типовых элементов схемы на различные входные процессы. Для одновходовых элементов – задержки и инвертора – данная задача проста и решена в [8–11]. Для многовходовых элементов – конъюнктора и дизъюнктора – эта задача решается в § 12. В отличие от метода подстановок метод эквивалентных схем характерен ограниченным числом ступеней схемы-модели (четыре), не зависящим от сложности изучаемой системы. Благодаря этому становится возможным анализировать надежность достаточно сложных систем. При сравнении (9.1), (9.2) с (7.1), (7.2), видим, что n-входовый конъюнктор является моделью надежности системы n последовательно соединенных блоков, а n-входовый дизъюнктор – моделью надежности системы n параллельно соединенных блоков. Таким образом, метод эквивалентных схем сводит анализ надежности произвольной системы без памяти к анализу надежности элементарных систем без памяти, но последние оказываются более сложными, чем в методе подстановок.

В основу метода эквивалентных схем можно также положить представление ФР системы в КНФ. В этом случае в схеме-модели ступень 2 образуется многовходовыми дизъюнкторами, а ступень 3 – многовходовыми конъюнкторами. Возможны и другие варианты данного метода. Метод эквивалентных схем наиболее приспособлен для анализа последовательных, параллельных, последовательно-параллельных и параллельно-последо-вательных систем, когда ФР представлена в нужной форме – ДНФ или КНФ. Применение метода эквивалентных схем не отличается от применения метода подстановок, но позволяет анализировать сразу целые классы систем.

10 Метод анализа надежности элементарных систем с длинными надежностными процессами в блоках

Рассмотрим метод нахождения соотношений «входы–выход» для n-входовых элементов – конъюнктора и дизъюнктора $(n \geq 2)$ при длинных входных процессах. Поскольку n-входовый конъюнктор – модель надежности системы из n последовательно соединенных блоков, а n-входовый дизъюнктор – системы из n параллельно соединенных блоков, данный метод, по существу, есть метод анализа надежности элементарных – параллельных и последовательных систем при многократном восстановлении блоков. Получаемые при этом соотношения «входы–выход» элементов нужны при анализе методом подстановок надежности систем класса 1 и методом эквивалентных схем – класса 2. Для отыскания реакции n-входовых конъюнктора и дизъюнктора на произвольные входные процессы $a_1(t),...,a_n(t)$ поступаем так.

1. Учитывая симметричность функции, реализуемой конъюнктором или дизъюнктором, на основании § 8 заменим процессы на входах элемента эквивалентной совокупностью свободных упорядоченных импульсов.

2. В полученной совокупности выделим несколько произвольных соседних импульсов и прямым методом [8–11] найдем соответствующий фрагмент реакции элемента, считая, что выделенные импульсы не взаимодействуют с остальными из совокупности.

3. Устанавливаем, какое преобразование над выделенными импульсами воздействий пришлось совершить, чтобы получить соответствующий фрагмент реакции элемента. На основании этого суммируем отдельные фрагменты реакции, учитывая, в случае необходимости, их взаимодействие между собой. В итоге находим искомую реакцию элемента.

При использовании данной методики надо начинать с определения реакции конъюнктора или дизъюнктора на стандартные входные процессы. В качестве стандартных выбираем процессы, реакция на которые определяется наиболее просто. Реакция на нестандартные процессы находится сведением к реакции на стандартные процессы. При этом проводится стандартизация процессов, т.е. представление процессов в необходимой форме – с начальным (конечным) импульсом или паузой (см. § 11, 12).

11 Анализ надежности элементарных двухблочных систем с произвольными надежностными процессами в блоках

Рассмотрим 2-входовые логические элементы: конъюнктор и дизъюнктор, получающие входные воздействия $a_1(t), a_2(t)$ любой длины. Методом § 10 найдем для этих элементов выходной процесс $y(t)$ – реакцию на заданные воздействия. Эта задача содержательно означает отыскание НП $y(t)$ на выходе системы из 2 последовательно (параллельно) соединенных блоков, НП в которых $a_1(t), a_2(t)$.

В качестве стандартных выберем пару входных процессов

$$\left.\begin{array}{l} a_1(t) = 1(a_{11}, b_{11})0(-,-)1(a_{12}, b_{12})...1(a_{1m}, b_{1m}) \\ a_2(t) = 1(a_{21}, b_{21})0(-,-)1(a_{22}, b_{22})...1(a_{2p}, b_{2p}) \end{array}\right\}, \qquad (11.1)$$

которые начинаются и оканчиваются импульсами. Таким образом, блоки в начальный момент находятся в состоянии отказа, затем восстанавливаются, снова отказывают и т.д. и, наконец, переходят в состояние невосстанавливаемого отказа; ресурсы блоков равны m и p восстановлений соответственно.

Дизъюнктор. Найдем реакцию дизъюнктора на стандартные воздействия ви-да (11.1). В силу симметричности дизъюнкции заменим воздействия (11.1) эквивалентной совокупностью свободных импульсов (см. § 8)

$$x^{(r)}(t) = 1(A^r, B^r), \quad r = 1,2,...,m+p, \qquad (11.2)$$

упорядоченных так: импульс с большим номером r начинается (оканчивается) позже импульса с меньшим номером. Моменты начала и окончания импульсов выражаются через аналогичные моменты в (11.1) с помощью ЛО:

$$A^r = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1m} \\ a_{21}...a_{2p} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad B^r = \begin{vmatrix} b_{11}...b_{1m} \\ b_{21}...b_{2p} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad r = 1,2,...,m+p. \tag{11.3}$$

Из § 8 следует, что число пересекающихся импульсов (11.2) в любой момент не превосходит 2. Это и условие упорядоченности импульсов показывают, что пересекаться могут лишь соседние импульсы (их номера r отличаются на единицу). Дизъюнктор выдает единицу в момент t, если в этот момент есть единица хотя бы на одном из его входов, т.е. действует хотя бы один из импульсов (11.2). Поэтому каждой паре соседних (r-го и $(r+1)$-го) импульсов, если учитывать лишь их взаимодействие между собой, соответствует фрагмент реакции элемента

$$y_r(t) = \begin{cases} 1(A^r, B^r)0(-,-)1(A^{r+1}, B^{r+1}), \; B^r < A^{r+1}; \\ 1(A^r, B^{r+1}) \equiv 1(A^r, A^{r+1})0(-,-)1(A^{r+1}, B^{r+1}), \; B^r \geq A^{r+1}, \end{cases}$$

или в терминах непрерывной логики (НЛ)

$$y_r(t) = 1(A^r, B^r A^{r+1})0(-,-)1(A^{r+1}, B^{r+1}). \tag{11.4}$$

Согласно (11.4) искомая реакция есть последовательность импульсов (11.2), подвергшихся преобразованию (сжатию) справа:

$$B^r \to B^r A^{r+1}, \quad r = 1,2,...,m+p, \tag{11.5}$$

и потому уже не пересекающихся во времени. Преобразование (11.5) есть замена момента окончания каждого импульса (11.2) его конъюнкцией НЛ с моментом начала соседнего справа импульса. Итак, реакция двухвходового дизъюнктора на воздействия (11.1)

$$y(t) = 1(A^1, B^1A^2)0(-,-)1(A^2, B^2A^3)...1(A^{m+p-1}, B^{m+p-1}A^{m+p})0(-,-)1(A^{m+p}, B^{m+p}), \tag{11.6}$$

где A^r и B^r определяются из (11.3).

Формула (11.6) означает, что система с двумя параллельно соединенными блоками, имеющими ресурс m и p восстановлений и НП вида (11.1), имеет ресурс $m+p$ восстановлений и интервалы работоспособности $(A^r, B^rA^{r+1}),\; r = 1,...,m+p-1$ и (A^{m+p}, B^{m+p}). При этом первое изменение НС системы есть ее восстановление в момент A^1, первый отказ системы наступает в момент B^1A^2, последний (окончательный) – в момент B^{m+p}. Содержание НП (11.6) – восстановление отсутствовавшей вначале работоспособности системы и последующая ее эксплуатация до исчерпания ресурса. Используя базовую реакцию вида (11.6), можно анализировать случаи нестандартных (отличных от (11.1)) воздействий. Найдем, например, реакцию дизъюнктора на воздействия

$$\left.\begin{aligned} a_1(t) &= 0(b_{10},-)1(a_{11},b_{11})...1(a_{1m},b_{1m}) \\ a_2(t) &= 0(b_{20},-)1(a_{21},b_{21})...1(a_{2p},b_{2p}) \end{aligned}\right\}, \tag{11.7}$$

отличающиеся от (11.1) тем, что начинаются паузами. Этот случай представляет наибольший практический интерес: здесь блоки в начальный момент исправны, затем отказывают, восстанавливаются и т.д., вплоть до невосстанавливаемого отказа. Ресурсы блоков равны m и p восстановлений.

Начальные изменения $0'_{b_{10}}$ и $0'_{b_{20}}$ в процессах (11.7) можно рассматривать как импульсы $1(-\infty, b_{10})$ и $1(-\infty, b_{20})$ (см. [8–11]). Это позволяет представить воздействия (11.7) в стандартном виде (11.1):

$$\left.\begin{aligned} a_1(t) &= 1(-\infty, b_{10})0(-,-)1(a_{11}, b_{11})...1(a_{1m}, b_{1m}) \\ a_2(t) &= 1(-\infty, b_{20})0(-,-)1(a_{21}, b_{21})...1(a_{2p}, b_{2p}) \end{aligned}\right\}. \quad (11.8)$$

Реакцию на воздействия (11.8) можно вычислить по (11.6):

$$y(t) = 1(\tilde{A}^1, B^1\tilde{A}^2)0(-,-)1(\tilde{A}^2, B^2\tilde{A}^3)...1(\tilde{A}^{m+p+1}, B^{m+p+1}\tilde{A}^{m+p+2})0(-,-)1(\tilde{A}^{m+p+2}, B^{m+p+2}),$$

где

$$\tilde{A}^r = \begin{vmatrix} -\infty a_{11}...a_{1m} \\ -\infty a_{21}...a_{2p} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad B^r = \begin{vmatrix} b_{10}...b_{1m} \\ b_{20}...b_{2p} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad r = 1,2,...,m+p+2. \quad (11.9)$$

Согласно свойству 9 ЛО (см. (2.8)):

$$\tilde{A}^r = \begin{cases} -\infty, & r = 1,2; \\ A^{r-2}, & r \ge 3, \end{cases}$$

где A^r – ЛО из (11.3). Так, 1-й импульс вырождается, последующие конкретизируются и реакция двухвходового дизъюнктора на воздействия (11.7) имеет вид:

$$y(t) = 0(B^2A^1, -)1(A^1, B^3A^2)...1(A^{m+p-1}, B^{m+p+1}A^{m+p})0(-,-)1(A^{m+p}, B^{m+p+2}), \quad (11.10)$$

где A^r определяется из (11.3), B^r – из (11.9). Видим, что система с двумя параллельными блоками, имеющими ресурсы m и p восстановлений и НП (11.7), имеет ресурс $m+p$ восстановлений и интервалы работоспособности (t_0, B^2A^1); $(A^r, B^{r+2}A^{r+1}), r = 1,...,m+p-1$; (A^{m+p}, B^{m+p+2}), причем первый отказ системы происходит в момент времени B^2A^1, последний (окончательный) – в момент B^{m+p+2}. Смысл НП (11.10) – потеря имеющейся вначале работоспособности системы.

Конъюнктор. Начнем со случая стандартных воздействий (11.1). Учитывая симметричность функции, реализуемой конъюнктором, заменим исходные воздействия (11.1) эквивалентной совокупностью свободных импульсов (11.2). Конъюнктор выдает единицу в момент времени t, если в этот момент имеются единицы на обоих его входах. Поэтому изолированной паре взаимодействующих между собой соседних r-го и $(r+1)$-го импульсов совокупности (11.2) соответствует фрагмент реакции элемента

$$y_r(t) = \begin{cases} 1(A^{r+1}, B^r), & B^r > A^{r+1}; \\ 0 \equiv 1(B^r, B^r), & B^r \le A^{r+1}, \end{cases}$$

или в терминах НЛ

$$y_r(t) = 1(B^rA^{r+1}, B^r). \quad (11.11)$$

Иначе говоря, каждая r-я пара соседних импульсов (11.2), действующих на элемент, дает вклад в его реакцию в виде отдельного импульса (11.11), а последние для различных r не пересекаются. Итак, реакция двухвходового конъюнктора на воздействия (11.1)

$$y(t) = 1(B^1A^2, B^1)0(-,-)1(B^2A^3, B^2)...1(B^{m+p-1}A^{m+p}, B^{m+p-1}), \quad (11.12)$$

где A^r и B^r определяются из (11.3). Согласно (11.12) система с двумя последовательно соединенными блоками, имеющими ресурс m и p восстановлений и НП вида (11.1), имеет ресурс $m+p-1$ восстановлений и интервалы работоспособности (B^rA^{r+1}, B^r),

$r = 1,...,m + p - 1$. При этом первое изменение НС системы – ее восстановление в момент B^1A^2, первый отказ системы наступает в момент B^1, а последний (окончательный) – в момент B^{m+p-1}. Смысл НП (11.12) тот же, что и НП (11.6).

Используя реакцию (11.12) как базовую, можно анализировать случаи нестандартных воздействий. Так, реакция двухвходового конъюнктора на воздействия (11.7) имеет вид:

$$y(t) = 0(B^1,-)1(B^2A^1, B^2)...1(B^{m+p+1}A^{m+p}, B^{m+p+1}). \tag{11.13}$$

Видим, что система с двумя последовательными блоками, имеющими ресурс m и p восстановлений и НП вида (11.7), имеет ресурс $m+p$ восстановлений и интервалы работоспособности (t_0, B^1); $(B^{r+1}A^r, B^{r+1})$, $r = 1,...,m + p$.

Первый отказ системы происходит в момент B^1, а последний (окончательный) – в момент B^{m+p+1}. Смысл НП (11.13) тот же, что и НП (11.10).

Выше найдены НП в двухблочных параллельных (последовательных) системах при некоторых длинных НП в блоках. Случаи остальных НП в блоках изучаются аналогично.

12 Анализ надежности элементарных многоблочных систем с произвольными надежностными процессами в блоках

Найдем методом § 10 реакции $y(t)$ n-входовых конъюнктора и дизъюнктора на воздействия $a_1(t),...,a_n(t)$ произвольной длины. Смысл этой задачи – отыскание НП $y(t)$ на выходе системы n последовательно (параллельно) соединенных блоков с НП $a_1(t),...,a_n(t)$.

Дизъюнктор. В качестве стандартных входных воздействий $a_1(t),...,a_n(t)$ выберем воздействия (8.2), начинающиеся и оканчивающиеся импульсами (т.е. блоки в начальный момент $t_0 = 0$ неработоспособны, затем восстанавливаются, отказывают и т.д., пока не перейдут в состояние окончательного отказа). Найдем реакцию на воздействия (8.2). В силу симметричности функции, реализуемой элементом, мы можем заменить воздействия (8.2) эквивалентной им совокупностью M свободных импульсов (8.3), имеющих моменты начала и окончания (8.6) и упорядоченных так, что импульс с большим номером начинается (оканчивается) позже импульса с меньшим номером (§ 8). При наличии n входов элемента количество пересекающихся импульсов может доходить до n. Поэтому при $n > 2$ пересекаться могут не только соседние r-й и $(r+1)$-й, но и любые из имеющихся импульсов, отстоящие друг от друга не более чем на $n-1$ импульс. Однако достаточно учитывать пересечение лишь соседних импульсов, так как: 1) именно пересечение (непересечение) соседних импульсов определяет отсутствие наличие) очередной промежуточной паузы в реакции элемента; 2) совокупность пересечений всех пар соседних импульсов однозначно определяет картину пересечений всех M импульсов. Повторив те же рассуждения, что и для двухвходового дизъюнктора (см. § 11), получим реакцию n-входового дизъюнктора на воздействия (8.2) в виде

$$y(t) = 1(A^1, B^1A^2)0(-,-)1(A^2, B^2A^3)...1(A^{M-1}, B^{M-1}A^M)0(-,-)1(A^M, B^M), \tag{12.1}$$

где A^r и B^r – из (8.6).

Формула (12.1) обобщает аналогичную (11.6) для двухвходового дизъюнктора и имеет тот же смысл. А именно, в общем случае реакция дизъюнктора на входные процессы, начинающиеся и оканчивающиеся импульсами, – процесс того же вида, содержащий число импульсов, равное (или меньшее) сумме чисел импульсов для входных процессов. Формула (12.1) означает, что система с n параллельными блоками, имеющими ресурсы $m_1,...,m_n$ восстановлений и НП (8.2), имеет ресурс $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$ восстановлений и интервалы работоспособности в виде $(A^r, B^r A^{r+1}),\ r=1,...,M-1;\ (A^M, B^M)$. Первое изменение НС системы – ее восстановление в момент A^1, первый отказ системы – в момент $B^1 A^2$, последний (окончательный) – в момент B^M.

Используя реакцию (12.1) как базовую, можно находить реакцию дизъюнктора на любые воздействия. Найдем его реакцию на воздействия

$$\left.\begin{array}{l} a_1(t)=0(b_{10},-)1(a_{11},b_{11})...1(a_{1m_1},b_{1m_1}) \\ \hdashline a_n(t)=0(b_{n0},-)1(a_{n1},b_{n1})...1(a_{nm_n},b_{nm_n}) \end{array}\right\}, \tag{12.2}$$

начинающиеся паузами и оканчивающиеся импульсами. Эти воздействия наиболее интересны; они означают, что блоки в начальный момент исправны, затем отказывают, восстанавливаются и т.д. до состояния окончательного отказа; ресурсы блоков равны $m_1,...,m_n$ восстановлений. Представим воздействия (12.2) в стандартном виде (8.2):

$$\left.\begin{array}{l} a_1(t)=1(-\infty,b_{10})0(-,-)1(a_{11},b_{11})...1(a_{1m_1},b_{1m_1}) \\ \hdashline a_n(t)=1(-\infty,b_{n0})0(-,-)1(a_{n1},b_{n1})...1(a_{nm_n},b_{nm_n}) \end{array}\right\}. \tag{12.3}$$

Реакцию на воздействия (12.3) вычислим по (12.1):

$$y(t)=1(\tilde{A}^1, B^1\tilde{A}^2)0(-,-)1(\tilde{A}^2, B^2\tilde{A}^3)...1(\tilde{A}^{M+n-1}, B^{M+n-1}\tilde{A}^{M+n})0(-,-)1(\tilde{A}^{M+n}, B^{M+n}),$$

где

$$\tilde{A}^r=\left|\begin{array}{l} -\infty a_{11}...a_{1m_1} \\ \hdashline -\infty a_{n1}...a_{nm_n} \end{array}\right|^{(r)},\quad B^r=\left|\begin{array}{l} b_{10}...b_{1m_1} \\ \hdashline b_{n0}...b_{nm_n} \end{array}\right|^{(r)},\quad r=1,...,M+n. \tag{12.4}$$

По свойству 9 ЛО (см. [2])

$$\tilde{A}^r=\begin{cases} -\infty, & r=1,...,n; \\ A^{r-n}, & r=n+1,...,M+n, \end{cases}$$

где A^r – ЛО (8.6). Итак, реакция n-входового дизъюнктора на воздействия (12.2) после тех же преобразований, что и в случае $n=2$ (см. § 11):

$$y(t)=0(B^n A^1,-)1(A^1, B^{n+1}A^2)...1(A^{M-1}, B^{M+n-1}A^M)0(-,-)1(A^M, B^{M+n}), \tag{12.5}$$

где A^r – из (8.6), B^r – из (12.4). Итак, система с n параллельными блоками, имеющими ресурсы $m_1,...,m_n$ восстановлений и НП в блоках вида (12.2), имеет ресурс $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$ восстановлений и интервалы работоспособности $(t_0, B^n A^1);\ (A^r, B^{r+n}A^{r+1}),\ r=1,...,M-1;$ (A^M, B^{M+n}), причем первый отказ системы происходит в момент времени $B^n A^1$, а последний (окончательный) отказ – в момент B^{M+n}. Формула (12.5) об обобщает формулу (11.10) для двухвходового дизъюнктора и имеет тот же смысл.

Случаи других нестандартных НП в блоках рассматриваются аналогично.

Конъюнктор. В качестве стандартных выберем входные воздействия

$$\left.\begin{array}{l} a_1(t) = 0(b_{10},-)1(a_{11},b_{11})\ldots 1(a_{1m_1},b_{1m_1})0(-,a_{1,m_1+1}) \\ \hdashline a_n(t) = 1(-\infty,b_{n0})0(-,-)1(a_{n1},b_{n1})\ldots 1(a_{nm_n},b_{nm_n}) \end{array}\right\} \tag{12.6}$$

начинающиеся и оканчивающиеся паузами. Реакцию конъюнктора $y_{\text{к}}(t)$ на воздействия (12.6) можно найти из реакции $y_{\text{д}}(t)$ (12.1) дизъюнктора на воздействия (8.2), начинающиеся и оканчивающиеся импульсами, с помощью закона де Моргана [8–11]:

$$y_{\text{к},a_i}(t) = \overline{\overline{\bigwedge_{i=1}^{n} a_i(t)}} = \overline{\bigvee_{i=1}^{n} \overline{a}_i(t)} = \overline{y_{\text{д},a_i}(t)}\,.$$

Отсюда находим реакцию конъюнктора на воздействия (12.6) в виде

$$y(t) = 0(B^1,-)1(B^2A^1,B^2)\ldots 1(B^{M+n}A^{M+n-1},B^{M+n})0(-,A^{M+n})\,, \tag{12.7}$$

где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$; B^r – из (12.4);

$$A^r = \left|\begin{array}{l} a_{11}\ldots a_{1,m_1+1} \\ \hdashline a_{n1}\ldots a_{n,m_n+1} \end{array}\right|^{(r)}, \quad r = 1,\ldots,M+n\,. \tag{12.8}$$

Формула (12.7) показывает, что система с n последовательными блоками, имеющими ресурсы $m_1+1,\ldots,m_n+1$ восстановлений и НП в блоках (12.6), имеет ресурс $M+n$ восстановлений и интервалы работоспособности (t_0,B^1); $(B^{r+1}A^r,B^{r+1})$, $r=1,\ldots,M+n-1$; (A^{M+n},∞). Смысл НП (12.7) – восстановление начальной работоспособности системы.

Из реакции (12.7) можно найти реакции конъюнктора на воздействия, отличные от стандартных (12.6). Найдем реакцию на воздействия (12.2). Так как (12.2) есть частный случай (12.6) при $a_{1,m_1+1} = \ldots = a_{n,m_n+1} = \infty$, то согласно (12.7):

$$\begin{aligned} y(t) = 0(B^1,-)1(B^2\tilde{A}^1,B^2)\ldots 1(B^{M+1}\tilde{A}^M,B^{M+1})0(-,-)\underline{1(B^{M+2}\tilde{A}^{M+1},B^{M+2})}\ldots \\ \ldots\underline{1(B^{M+n}\tilde{A}^{M+n-1},B^{M+n})0(-,\tilde{A}^{M+n})}. \end{aligned}$$

Здесь B^r – из (12.4), а $\tilde{A}^r = \left|\begin{array}{l} a_{11}\ldots a_{1,m_1}\infty \\ \hdashline a_{n1}\ldots a_{n,m_n}\infty \end{array}\right|^{(r)}, \quad r=1,\ldots,M+n\,.$

По свойству 8 ЛО (см. [12], [13]) $\tilde{A}^r = \begin{cases} A^r, & r=1,\ldots,M; \\ \infty, & r=M+1,\ldots,M+n, \end{cases}$

где A^r – ЛО (8.6), так что подчеркнутые участки выражения $y(t)$ вырождаются.

Реакция n-входового конъюнктора на воздействия (12.2)

$$y(t) = 0(B^1,-)1(B^2A^1,B^2)\ldots 1(B^{M+1}A^M,B^{M+1})\,, \tag{12.9}$$

где A^r – из (8.6), B^r – из (12.4), т.е. система с n последовательными блоками с ресурсами $m_1,\ldots,m_n$ восстановлений и НП в блоках (12.2) имеет ресурс $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

восстановлений и интервалы работоспособности $(t_0, B^1); (B^{r+1}A^r, B^{r+1}), r = 1,...,M$. 1-й отказ наступает в момент B^1, последний (окончательный) – в момент B^{M+1}. Формула (12.9) обобщает (11.13) для 2-входового конъюнктора и имеет тот же смысл. Системы с другими нестандартными НП в блоках анализируются аналогично этому.

13 Надежность систем с элементарными надежностными процессами в блоках и произвольными функциями работоспособности

Проанализируем методом эквивалентных схем надежность класса систем без памяти, у которых НП в блоках и на входах имеют одну из элементарных форм: тождественные 0 или 1; $1'_a; 0'_a$, а ФР произвольны. Иначе говоря, в течение изучаемого времени входы системы и ее блоки меняют состояние не более одного раза (блоки, начав работу в исправном состоянии, не отказывают или отказывают один раз, а начав ее в отказовом состоянии, не восстанавливаются или восстанавливаются один раз).

Представим схему-модель системы в виде 4-ступенчатой схемы: ступени 1 (задержек), 2 (инверторов), 3 (многовходовых конъюнкторов), 4 (многовходовых дизъюнкторов). Воздействия на входах этой схемы известны – это заданные НП в блоках системы и процессы на ее входах. По этим воздействиям мы должны найти последовательно процессы на выходах ступеней 1–4. Процессы на выходах ступени 4 (выходах схемы) есть искомые НП в системе. Для задержек и инверторов преобразование входных процессов в выходные выполняются согласно [8–11] и потому анализ ступеней 1 и 2 можно считать решенной задачей. Ограничимся изучением одной выходной функции схемы (подсхемы для реализации различных функций анализируются одинаково). Без ограничения общности можно считать, что изучаемая система автономна, т.е. не имеет (внешних) входов, а содержит лишь (внутренние) блоки. Действительно, входные процессы системы и НП в ее блоках выступают на равных правах в качестве воздействий на входах схемы-модели.

В соответствии с изложенным будем анализировать двухступенчатую логическую схему-модель этой системы (ступень 1 – многовходовые конъюнкторы, ступень 2 – многовходовый дизъюнктор), реализующую ФР системы в ДНФ. Воздействия на входах схемы – это заданные НП в блоках системы. Реакция $y(t)$ на выходе схемы – это искомый НП в системе. Наша задача – найти процесс $y(t)$. Разобьем все конъюнкторы i на три группы, в соответствии с типом их входных воздействий $a_{i1}(t),...,a_{in_i}(t)$. Здесь $a_{ij}(t)$ – воздействие на j-м входе, n_i – число входов i-го конъюнктора.

1) Конъюнкторы первой группы $(i \in S_1 = \{1,...,N\})$. Воздействия на их входы могут быть 2 сортов: $a_{ij}(t) = 1'_{a_{ij}}$ при $j \in P_i$ и $a_{ij}(t) = 0'_{b_{ij}}$ при $j \in D_i$.

2) Конъюнкторы второй группы $(i \in S_1 = \{N+1,...,N+P\})$. Воздействия на их входы $a_{ij}(t) = 1'_{a_{ij}}$ где $j \in P_i$.

3) Конъюнкторы 3-й группы $(i \in S_3 = = \{N+P+1,...,N+P+Q\})$. Воздействия на их входы $a_{ij}(t) = 0'_{b_{ij}}$, где $j \in D_i$. Здесь P_i, D_i – подмножества входов i-го конъюнктора с указанными воздействиями.

В схему не включены конъюнкторы i, в которых а) хотя бы один вход $a_{ij}(t) \equiv 0$ (в этом случае выход конъюнктора $y_i(t) \equiv 0$ и потому не влияет на выход схемы); б) часть входов $a_{ij}(t) \equiv 1$ (эти входы можно оборвать, не изменив выхода конъюнктора); в) все входы $a_{ij}(t) \equiv 1$ (здесь $y(t) \equiv y_i(t) \equiv 1$ и поставленная задача тривиальна).

Найдем сначала реакции $y_i(t)$ конъюнкторов (ступени 1) схемы. Для конъюнкторов первой группы согласно [8–11]

$$y_i(t) = \left(\bigvee_{j \in P_i} 1'_{a_{ij}} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in D_i} 0'_{b_{ij}} \right) = 1'_{a_i} \wedge 0'_{\overline{b_i}} = 1(a_i, b_i),\ i \in S_1, \tag{13.1}$$

где

$$a_i = \bigvee_{j \in P_i} a_{ij}, \quad \overline{b_i} = \bigwedge_{j \in D_i} b_{ij}, \quad b_i = a_i \vee \overline{b_i}. \tag{13.2}$$

Аналогично для конъюнкторов второй группы

$$y_i(t) = \bigwedge_{j \in P_i} 1'_{a_{ij}} = 1'_{a_i}, \quad i \in S_2, \tag{13.3}$$

и конъюнкторов третьей группы

$$y_i(t) = \bigwedge_{j \in D_i} 0'_{b_{ij}} = 0'_{\overline{b_i}}, \quad i \in S_3. \tag{13.4}$$

Так как выходы конъюнкторов поступают на входы дизъюнктора, все конъюнкторы второй группы можно заменить одним с реакцией $Y_2(t)$ вида

$$Y_2(t) = \bigvee_{i \in S_2} y_i(t) = \bigvee_{i \in S_2} 1'_{a_i} = 1'_{a_{N+1}}, \tag{13.5}$$

где

$$a_{N+1} = \bigwedge_{i \in S_2} a_i = \bigwedge_{i \in S_2} \bigvee_{j \in P_i} a_{ij}, \tag{13.6}$$

а все конъюнкторы третьей группы – одним с реакцией $Y_3(t)$ вида

$$Y_3(t) = \bigvee_{i \in S_3} y_i(t) = \bigvee_{i \in S_3} 0'_{\overline{b_i}} = 0'_{b_{N+1}}, \tag{13.7}$$

где

$$b_{N+1} = \bigvee_{i \in S_3} \overline{b_i} = \bigvee_{i \in S_3} \bigwedge_{j \in D_i} b_{ij}. \tag{13.8}$$

Итак, дизъюнктор имеет $N+2$ входа, из которых N получают воздействия в виде одиночных импульсов (13.1) с параметрами (13.2), один – воздействие в виде изменения (13.5) в момент (13.6) и еще один – воздействие в виде изменения (13.7) в момент (13.8). Но оба указанных изменения можно представить как импульсы (см. [8–11]):

$$Y_2(t) = 1'_{a_{N+1}} = 1(a_{N+1}, \infty), \quad Y_3(t) = 0'_{b_{N+1}} = 1(-\infty, b_{N+1}). \tag{13.9}$$

Итак, на входах дизъюнктора действуют только одиночные импульсы: на первых N входах – вида (13.1), на последних двух – вида (13.9).

Согласно (12.1) реакция n-входового дизъюнктора на воздействия в форме одиночных импульсов $1(a_i, b_i),\ i = 1,\dots,n$, имеет вид:

$$y(t) = 1(A^1, B^1 A^2) 0(-,-) 1(A^2, B^2 A^3) \dots 1(A^{n-1}, B^{n-1} A^n) 0(-,-) 1(A^n, B^n), \tag{13.10}$$

где A^r и B^r – ЛО-столбцы:

$$A^r = \left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{(r)}, \quad B^r = \left|\frac{b_1}{b_n}\right|^{(r)}, \quad r = 1,\dots,n. \qquad (13.11)$$

Использовав (13.10), (13.11), можно записать реакцию изучаемой схемы

$$y(t) = 1(\widetilde{A}^1, \widetilde{B}^1\widetilde{A}^2)0(-,-)1(\widetilde{A}^2, \widetilde{B}^2\widetilde{A}^3)\dots1(\widetilde{A}^{N+1}, \widetilde{B}^{N+1}\widetilde{A}^{N+2})0(-,-)1(\widetilde{A}^{N+2}, \widetilde{B}^{N+2}),$$

где A^r и B^r – ЛО-столбцы:

$$\widetilde{A}^r = \left|\begin{matrix} a_1 \\ a_{N+1} \\ -\infty \end{matrix}\right|^{(r)}, \quad \widetilde{B}^r = \left|\begin{matrix} b_1 \\ b_{N+1} \\ \infty \end{matrix}\right|^{(r)}, \quad r = 1,\dots,N+2.$$

По свойствам 8 и 9 ЛО (см. [12], [13])

$$\widetilde{A}^r = \begin{cases} -\infty, & r = 1; \\ A^{r-1}, & r = 2,\dots,n+2; \end{cases} \qquad \widetilde{B}^r = \begin{cases} B^r, & r = 1,\dots,N+1; \\ \infty, & r = N+2, \end{cases}$$

где
$$A^r = \left|\frac{a_1}{a_{N+1}}\right|^{(r)}, \quad B^r = \left|\frac{b_1}{b_{N+1}}\right|^{(r)}, \quad r = 1,\dots,N+1. \qquad (13.12)$$

Окончательно реакция схемы-модели на воздействия типов $1, 0, 1'_{a_{ij}}$ и $0'_{b_{ij}}$

$$y(t) = 0(A^1B^1,-)1(A^1, A^2B^2)\dots1(A^N, A^{N+1}B^{N+1})0(-, A^{N+1}), \qquad (13.13)$$

временные параметры которого определяются формулами (13.2), (13.6), (13.8), (13.12). Ясно, что A^r в (13.13) – момент r-го по времени изменения вида $1'_{a_i}$ на входах ступени 2 схемы-модели, B^r – момент r-го по времени изменения вида $0'_{b_i}$ на этих входах. Итак, НП в произвольной системе с НП в блоках одного из 4 элементарных типов: $1, 0, 1'_{a_{ij}}, 0'_{b_{ij}}$ – в общем случае носит характер восстановления начальной работоспособности системы, имеет ресурс $N+1$ восстановление и интервалы работоспособности $(t_0, A^1B^1); (A^r, A^{r+1}B^{r+1})$, $r = 1,\dots,N$, (A^{N+1}, ∞); Здесь N – число конъюнкторов с воздействиями двух типов: $1'_{a_{ij}}$ и $0'_{b_{ij}}$ в двухступенчатой схеме-модели системы. Рассмотрим ряд частных случаев.

1. В схеме-модели системы есть только конъюнкторы первой группы (с воздействиями двух типов: $1'_{a_{ij}}$ и $0'_{b_{ij}}$). В этом случае на выходах ступени 1 схемы нет изменений $1'_{a_{N+1}}$ и $0'_{b_{N+1}}$, а есть лишь N одиночных импульсов (13.1). Реакция схемы определится по (13.10), где n заменено на N. В этом случае НП в системе имеет смысл потери работоспособности; ресурс всей системы – N восстановлений, а интервалы работоспособности (A^r, B^rA^{r+1}), $r = 1,\dots,N-1$; (A^N, B^N); первое изменение НС системы – восстановление в момент A^1, первый отказ системы наступает в момент B^1A^2, а последний (окончательный) – в момент B^N. Аналогично интерпретируются последующие случаи.

2. В схеме-модели есть лишь конъюнкторы второй группы (их воздействия $1'_{a_{ij}}$ – модели одноразового восстановления блоков). На единственном выходе ступени 1 действует процесс (13.5), без изменения проходя на выход схемы. Реакция схемы $y(t) = 1'_{a_{N+1}}$, т.е. содержание НП в системе – одноразовое восстановление в момент a_{N+1} (13.6).

3. В схеме-модели есть лишь конъюнкторы третьей группы (получающие воздействия $0'_{b_{ij}}$ – модели невосстанавливаемых отказов блоков). Поэтому на единственном выходе ступени 1 действует процесс (13.7) – он и проходит на выход схемы, т.е. реакция схемы $y(t) = 0'_{b_{N+1}}$, и содержание НП в системе – невосстанавливаемый отказ в момент времени b_{N+1} (13.8).

4. В схеме-модели есть только конъюнкторы первой и второй групп. Тогда на выходах ступени 1 нет изменения $0'_{b_{N+1}}$. Это можно рассматривать, не меняя реакции схемы, как наличие изменения $0'_{b_{N+1}}$ при $b_{N+1} = -\infty$. Значит, общее выражение (13.13) реакции схемы конкретизируется:

$$B^1 = -\infty, \quad B^r = \overline{B}^{r-1}, \quad r = 2,\dots, N+1, \tag{13.14}$$

где $\overline{B}^r = \left| \begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_N \end{array} \right|^{(r)}$, $r = 1,\dots, N$ и реакция приобретает вид

$$y(t) = 1(A^1, \overline{B}^1 A^2)\dots 1(A^N, \overline{B}^N A^{N+1}) 0(-, A^{N+1}), \tag{13.15}$$

где A^r – из (13.12), $\overline{B}^r$ – из (13.14). Итак, в данном случае НП в системе имеет смысл восстановления первоначально отсутствовавшей работоспособности, причем ресурс системы $N+1$ восстановление, интервалы работоспособности $(A^r, \overline{B}^r A^{r+1}),\ r = 1,\dots, N;\ (A^{N+1}, \infty)$.

5. В схеме-модели есть только конъюнкторы первой и третьей групп. Тогда на выходах ступени 1 нет изменения $1'_{a_{N+1}}$. Это можно трактовать как наличие $1'_{a_{N+1}}$ с $a_{N+1} = \infty$. Выражение (13.13) конкретизируется:

$$A^r = \overline{A}^r = \left| \begin{array}{c} a_1 \\ \hline a_N \end{array} \right|^{(r)} \quad r = 1,\dots, N; \quad A^{N+1} = \infty, \tag{13.16}$$

и реакция схемы принимает вид

$$y(t) = 0(\overline{A}^1 B^1, -) 1(\overline{A}^1, \overline{A}^2 B^2) \dots 1(\overline{A}^{N-1}, \overline{A}^N B^N) 0(-,-) 1(\overline{A}^N, B^{N+1}), \tag{13.17}$$

где $\overline{A}^r$ – из (13.16), B^r – из (13.12). Здесь НП в системе имеет смысл потери первоначально имевшейся работоспособности; ресурс системы – N восстановлений, интервалы работоспособности $(\overline{A}^r, \overline{A}^{r+1} B^{r+1}),\ r = 1,\dots, N-1;\ (\overline{A}^N, B^{N+1})$; первый отказ системы происходит в момент времени $\overline{A}^1 B^1$, а последний (окончательный) – в момент B^{N+1}.

6. В схеме-модели есть лишь конъюнкторы 2-й и 3-й групп. Тогда на выходах ступени 1 присутствуют только два изменения: $1'_{a_{N+1}}$ и $0'_{b_{N+1}}$ и реакция схемы (см. [8–11])

$$y(t) = 1'_{a_{N+1}} \vee 0'_{b_{N+1}} = 0(b_{N+1}, a_{N+1} \vee b_{N+1}), \tag{13.18}$$

где a_{N+1} – из (13.6), b_{N+1} – из (13.8). Здесь НП в системе – это ее кратковременное (в интервале $(b_{N+1}, a_{N+1} \vee b_{N+1})$) отказовое состояние.

Методом эквивалентных схем можно также анализировать надежность класса систем без памяти, у которых надежностные процессы в блоках произвольно сложны. Однако при этом получаются громоздкие выражения надежностных процессов в системе.

Заключение

Настоящая работа публикуется в двух частях. В данной статье – первой части работы описан математический аппарат создаваемой автором логической теории надежности сложных систем, так называемые логические определители. Изложена также общая методика и конкретные методы использования указанного аппарата для вычисления характеристик надежности сложных систем, сопровождаемые содержательными примерами. Во второй части работы на основе разработанного математического аппарата логической теории надежности решены задачи построения аналитических формул для вычисления характеристик надежности нескольких классов сложных систем произвольно высокой размерности.

Данная работа продолжает цикл исследований автора, посвященный разработке математического аппарата логической теории надежности. От опубликованных ранее работ автора [6–13] данная работа существенно отличается использованием нового оригинального математического аппарата логических определителей. Это позволило принципиально упростить как вычисление характеристик надежности сложных систем, так и анализ их надежностного поведения. Причем эти операции оказались применимы в равной степени как к низкоразмерным, так и к высокоразмерным системам.

Список литературы

1. Ллойд Д. К. Надежность: организация, исследования, методы, математический аппарат [Текст] / Д. К. Ллойд, М. Липов. – М. : Советское радио, 1964. – 350 с.
2. Барлоу Р. Математическая теория надежности [Текст] / Р. Барлоу, Ф.Прошан. – М. : Советское радио, 1969. – 410 с.
3. Райншке К. Модели надежности и чувствительности систем [Текст] / К. Райншке. – М. : Мир, 1979. – 454 с.
4. Левин Б. Р. Теория надежности радиотехнических систем [Текст] / Б. Р. Левин. – М. : Советское радио, 1978. – 264 с.
5. Левин В. И. Динамика конечных автоматов и надежность сложных систем [Текст] / В. И. Левин // Автоматика и вычислительная техника. – 1976. – № 6. – С. 17–24.
6. Левин В. И. Динамические автоматы и надежность технических систем. I [Текст] / В. И. Левин // Электронное моделирование. – 1980. – № 4. – С. 12–17.
7. Левин В. И. Динамические автоматы и надежность технических систем. II [Текст] / В. И. Левин // Электронное моделирование. – 1980. – № 5. – С. 63–72.
8. Левин В. И. Логические методы в теории надежности. I [Текст] / В. И. Левин // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 873–884.
9. Левин В. И. Логические методы в теории надежности. II [Текст] / В. И. Левин // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 119–132.
10. Левин В. И. Логические методы расчета надежности систем. I [Текст] / В. И. Левин // Системы управления, связи и безопасности. – 2017. – № 2. – С. 182–195.
11. Левин В. И. Логические методы расчета надежности систем. II [Текст] / В. И. Левин // Системы управления, связи и безопасности. – 2017. – № 3. – С. 84–97.
12. Левин В. И. Логические методы в теории надежности сложных систем. I [Текст] / В. И. Левин // Вестник Тамбовского университета. – 2011. – Т. 16, № 5. – С. 15–28.
13. Левин В.И. Логические методы в теории надежности сложных систем. II [Текст] / В. И. Левин // Вестник Тамбовского университета. – 2011. – Т. 16, № 6. – С. 25–39.
14. Левин В. И. Полиинтервалы и их применение в моделировании систем [Текст] / В. И. Левин // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2016. – № 2(3). – С. 39–47.
15. Левин В. И. Интервальные уравнения и их решение [Текст] / В. И. Левин, Е. А. Немкова // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2017. – № 3(6). – С. 12–21.
16. Левин В. И. Интервальная математика и построение прямых и обратных характеристик преобразователей информации [Текст] / В. И. Левин, Е. А. Немкова // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2018. – № 1(8). – С. 4–12.
17. Левин В. И. Непрерывная логика и ее применение к исследованию систем в условиях неопределенности [Текст] / В. И. Левин // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2018. – № 2(9). – С. 4–32.

References

1. Lloyd D.K., Lipov M. *Nadezhnost': organizatsiya, issledovaniya, metody, matematicheskiy apparat* [Reliability: organization, research, methods, mathematical apparatus], M., Sovetskoye radio, 1964, 350 s.
2. Barlou R., Proshan F. *Matematicheskaya teoriya nadezhnosti* [Mathematical theory of reliability]. M.: Sovetskoye radio, 1969, 410 s.
3. Raynshke K. *Modeli nadezhnosti i chuvstvitel'nosti* sistem [Models of reliability and sensitivity of systems], M., Mir, 1979, 454 s.
4. Levin B.R. *Teoriya nadezhnosti radiotekhnicheskikh sistem* [Theory of reliability of radio systems], M., Sovetskoye radio, 1978, 264 s.
5. Levin V.I. Dinamika konechnykh avtomatov i nadezhnost' slozhnykh sistem [Dynamics of finite automata and reliability of complex systems]. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika* [Automation and computer technology], 1976, no. 6, pp. 17–24.
6. Levin V.I. Dinamicheskiye avtomaty i nadezhnost' tekhnicheskikh sistem. I [Dynamic automata and reliability of technical systems. I]. *Elektronnoye modelirovaniye* [Electronic Modeling], 1980, no. 4. pp. 12–17.
7. Levin V.I. Dinamicheskiye avtomaty i nadezhnost' tekhnicheskikh sistem. II [Dynamic automata and reliability of technical systems. II]. *Elektronnoye modelirovaniye* [Electronic Modeling], 1980, no. 5, pp. 63–72.
8. Levin V.I. Logicheskiye metody v teorii nadezhnosti. I [Logical methods in the theory of reliability. I]. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tambov University]. 2009. T. 15. no. 4. pp. 873–884.
9. Levin V.I. Logicheskiye metody v teorii nadezhnosti. II [Logical methods in the theory of reliability. II]. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Tambov State Technical University], 2010, T. 16, no. 1, pp. 119–132.
10. Levin V.I. Logicheskiye metody rascheta nadezhnosti sistem. I [Logical methods for calculating the reliability of systems. I]. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti* [Control, communication and security systems]. 2017. no. 2. pp. 182–195.
11. Levin V.I. Logicheskiye metody rascheta nadezhnosti sistem. II [Logical methods for calculating the reliability of systems. II]. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti* [Control, communication and security systems]. 2017. no. 3. pp. 84–97.
12. Levin V.I. Logicheskiye metody v teorii nadezhnosti slozhnykh sistem. I [Logical methods in the theory of reliability of complex systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta* [Bulletin of Tambov State Technical University]. 2011. T. 16. no. 5. pp. 15–28.
13. Levin V.I. Logicheskiye metody v teorii nadezhnosti slozhnykh sistem. II [Logical methods in the theory of reliability of complex systems. II]. *Vestnik Tambovskogo universiteta* [Bulletin of Tambov State Technical University]. 2011. T. 16. no. 6. pp. 25–39.
14. Levin V. I. Poliintervaly i ikh primeneniye v modelirovanii sistem [Polyintervals and their application in system modeling]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2016, no. 2(3), pp. 39-47.
15. Levin V. I., Nemkova E. A. Interval'nyye uravneniya i ikh resheniye [Interval Equations and Their Solution]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2017, no. 3(6), pp. 12-21.
16. Levin V. I., Nemkova E. A. Interval'naya matematika i postroyeniye pryamykh i obratnykh elementov preobrazovateley informatsii [Interval mathematics and construction of direct and reverse characteristics of information converters]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2018, no. 1(8), pp. 4-12.
17. Levin V. I. Nepreryvnaya logika i yeye primeneniye k issledovaniyu sistem v usloviyakh neopredelennosti [Continuous logic and its application to the study of systems in conditions of uncertainty]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2018, no. 2(9), pp. 4-32.

RESUME

V.I. Levin
Continuous-Logical Methods of Calculating of Reliability of Complex Systems.
I. Mathematic Models of Reliability

Background. In recent years the increasing attention of scientists and designers of technical systems has been acquiring the issues of improving methods for assessing the reliability and safety of these systems, in connection with tasks of increasing the values of these characteristics. The purpose of the article is to develop an automata-logical model of reliability of complex technical systems and corresponding logical methods for evaluating the reliability of such systems, which, unlike known ones, use not the traditional probabilistic reliability indicators, but deterministic logical indicators.

Matherials and methods. In order to achieve this goal, the article suggests using the observed moments of successive failures and recovery of the elements of the technical system as initial data, and as the reliability characteristics of the system itself the moments of successive failures and recovery of this system. In this case, the problem of estimating the reliability of a system is reduced to constructing its mathematical model in the form of automata logical functions expressing the moments of its successive failures and reconstructions through analogous moments of all its elements. This article is the first part of the work in which an automata-logical model designed to calculate the logical function of reliability of complex technical systems is developed in detail.

Results of the work is the construction of an adequate logical model of the reliability of a complex system, which makes it possible to reduce the estimation of reliability of a complex technical system to the calculation of its logical reliability functions. In the process of calculation, the mathematical apparatus of logical determinants is used for the first time, which allows us to solve the complexity problem. **Conclusion.** In the article the logical model of reliability and methods of its investigation are developed in detail, allowing to introduce new indicators of reliability of complex technical systems that do not require for their evaluation the use of probabilistic methods and initial statistical data on element failures. On the basis of the developed logical model of reliability and methods of its investigation, the problem of constructing an automata system for reliability of systems is solved, which will allow to fulfill practical calculations of complex technical systems by methods of the theory of dynamic automata using the apparatus of logical determinants.

РЕЗЮМЕ

В.И. Левин
Непрерывно-логические методы расчета надежности сложных систем.
I. Математические модели надежности

История вопроса. В последние годы все большее внимание ученых и проектировщиков технических систем приобретают вопросы совершенствования методов оценки надежности и безопасности этих систем, в связи с задачами повышения значений этих характеристик. Цель статьи заключается в разработке автоматно-логической модели надежности сложных технических систем и соответствующих логических методов оценки надежности таких систем, которые в отличие от известных используют не традиционные вероятностные показатели надежности, а детерминированные логические показатели.

Материалы и методы. Для достижения поставленной цели в статье предложено использовать в качестве исходных данных наблюдаемые моменты последовательных отказов и восстановлений элементов технической системы, а в качестве характеристик надежности самой системы – моменты последовательных отказов и восстановлений этой системы. В этом случае задача оценки надежности системы сводится к построению ее математической модели в виде автоматных логических функций, выражающих моменты ее последовательных отказов и восстановлений через аналогичные моменты всех ее элементов. Данная статья представляет собой первую часть работы, в которой детально разрабатывается автоматно-логическая модель, предназначенная для вычисления логической функции надежности сложных технических систем.

Результаты. Результат работы заключается в построении адекватной логической модели надежности сложной системы, позволяющей свести оценку надежности сложной технической системы к вычислению ее логических функций надежности. В процессе вычислений впервые используется математический аппарат логических определителей, что и позволяет решить проблему сложности.

Заключение. В статье детально разработаны логическая модель надежности и методы ее исследования, позволяющие вводить новые показатели надежности сложных технических систем, не требующие для своей оценки использования вероятностных методов и исходных статистических данных об отказах элементов. На основе разработанной логической модели надежности и методах ее исследования решена задача построения автоматной модели надежности систем, которая позволит вести практические расчеты сложных технических систем методами теории динамических автоматов с помощью аппарата логических определителей.

Статья поступила в редакцию 05.07.2018.