М

УДК 517.9

А. С. Миненко, А. П. Лёвкина
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
83015, г. Донецк, ул. Артема, 131

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ПЛОСКОСТИ

A. S. Minenko, A. V. Levkina
State Educational Institution of Higher Education «Donetsk national technical University», Donetsk city
83015, Donetsk, Artema st., 131

THE STUDY OF CONVECTIVE STEFAN PROBLEM IN THE PLANE

О. С. Міненко, А. В. Льовкіна
Державна освітня установа вищої професійної освіти «Донецький національний технічний університет», м. Донецьк
83015, м. Донецьк, вул. Артема, 131

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНВЕКТИВНОЇ ЗАДАЧІ СТЕФАНА НА ПЛОЩИНІ

Работа посвящена изучению процессов кристаллизации, которые встречаются в природе и сопровождаются конвективными перемешиваниями в жидкой фазе. Также будет рассмотрена постановка задачи, в которой конвекция будет вызвана наличием заданного вихря. Будет составлен приближенный анализ свободной границы в зависимости от интенсивности вихря.
Ключевые слова: кристаллизация, конвекция, вихрь, уравнение, вариационный метод, фазовые переходы.

The work is devoted to the study of crystallization processes, which occurs in nature and is accompanied by convective mixing in the liquid phase. We will also consider the formulation of the problem in which the convection is caused by the presence of a given vortex. An approximate analysis of the free boundary depending on the intensity of the vortex will be made.
Key words: crystallization, convection, vortex, equation, variational method, phase transition.

Робота присвячена вивченню процесів кристалізації, який зустрічаються у природі і супроводжуються конвективними перемішуваннями в рідкій фазі. Також буде розглянута постановка завдання, в якій конвекція буде викликана наявністю заданого вихору. Буде складений наближений аналіз вільного кордону в залежності від інтенсивності вихору.
Ключові слова: кристалізація, конвекція, вихор, рівняння, варіаційний метод, фазові переходи.

Введение

Основы теории затвердевания были положены более ста лет назад Стефаном. Кристаллизация слитков является одним из примеров данной теории. В ходе данного процесса кристаллизующая система включает твердую и жидкую фазы. Также интенсивность конвекции кристаллизации металла зависит от температуры и объема пространства.

Основная цель исследования состоит в приближенном анализе свободной границы в зависимости от интенсивности вихря.

В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на плоской задаче Стефана, с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе.

Постановка задачи

Будем рассматривать стационарный случай. Пусть $D=\{-1<x<1, H<y<0\}$ обозначает полосу. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой фазы D_γ^-.. Будем считать, что температурное поле монотонно убывает вместе с вертикальной координатой y. Таким образом, в нижней части полосы будет расположена твердая фаза, а в верхней – жидкая. Обе области D_γ^+ и D_γ^- предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y. Пусть $\psi(x,y)$ – функция тока, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\mu,\ \ (x,y)\in D_\gamma^+,\ \ \mu=const, \tag{1}$$

где μ считаем заданным достаточно малым численным параметром. Граничным условием для функции ψ является следующее:

$$\psi=0,\ \ (x,y)\in D_\gamma^+, \tag{2}$$

Если $\mu=0$, то соответствующая функция тока тождественно исчезает, таким образом, в жидкой фазе никакой конвекции нет. Кроме того, в жидкой фазе, температуру которой обозначим через $u^+(x,y)$, должно выполняться уравнение конвективного теплопереноса

$$\lambda_+\left(\frac{\partial^2u^+}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u^+}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\psi\partial u^+}{\partial y\partial x}+\frac{\partial\psi\partial u^+}{\partial x\partial y}=0,\ \ (x,y)\in D_\gamma^+,\ \ \lambda_+=const>0. \tag{3}$$

Будем предполагать выполненными следующие граничные условия на температуру u^+

$$u^+(x,0)=v,\ -1\le x\le 1,\ \ v=const>1. \tag{4}$$

На вертикальной части границы жидкой фазы выполняется условие третьего рода

$$u_x^+\pm\omega_0^+u^+=0,\ x=\pm1,\ \ (x,y)\in\partial D_\gamma^+ \tag{5}$$

на свободной границе γ удовлетворяется условие

$$u^+(x,y)=1,\ \ (x,y)\in\gamma. \tag{6}$$

Перейдем к описанию твердой фазы. Обозначим через u^- температуру твердой фазы. Она удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^-}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in D_\gamma^-. \tag{7}$$

На вертикальной части границы твердой фазы зададим условие третьего рода

$$u_x^- \pm \omega_0^- u^- = 0,\ x=\pm 1,\ (x,y)\in \partial D_\gamma^-. \tag{8}$$

При $y = H$ будем считать, что

$$u^-(x,H)=0, \tag{9}$$

тогда как на свободной границе

$$u^-(x,y)=1,\ (x,y)\in\gamma. \tag{10}$$

Если бы кривая γ была заданной, то выписанные соотношения корректно определяли бы задачу. В силу того, что γ подлежит определению, на ней задается еще одно условие, а, именно, закон сохранения энергии

$$\left|\nabla u^-\right|^2 - k^2\left|\nabla u^+\right|^2 = 0,\ (x,y)\in\gamma,\ k=const,\ 0\le k\le 1. \tag{11}$$

Поставленная задача (1) – (11) нелинейна, и «основное» неизвестное – это граница γ. Разрешимость подобного класса задач изложена в [1].

Далее в этом разделе предложим метод решения задачи (1) – (11), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра μ.

Линеаризация задачи по интенсивности вихря

Предположим, что неизвестные рассматриваемой задачи можно представить в виде степенного ряда по μ

$$\psi(x,y;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\psi_k(x,y), \tag{12}$$

$$\mu^+(x,y;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\mu_k^+(x,y), \tag{13}$$

$$\mu^-(x,y;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\mu_k^-(x,y), \tag{14}$$

Будем считать, что свободная граница γ допускает явное представление

$$y=y(x;\mu)\quad -1\le x\le 1, \tag{15}$$

причем
$$y(x,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k y_k(x),\ \ -1\le x\le 1. \tag{16}$$

Подставляя эти разложения в соотношения (1) – (11) и приравнивая друг другу члены при одинаковых степенях μ, получаем бесконечное число задач. Выпишем вначале нулевое приближение, соответствующее μ в нулевой степени. Прежде всего, из уравнения (1) получаем, что функция $\psi_0(x,y)$ гармонична. Так как она удовлетворяет нулевым граничным условием Дирихле, то $\psi_0(x,y)\equiv 0$ в $\bar{D}_\gamma^+$.

Выпишем условия, определяющие $\mu_0^{\pm}$

$$\frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0^{\pm}}{\partial y^2}=0,\ \ (x,y)\in D_{\gamma_0}^{\pm}. \tag{17}$$

$$\mu_0^{+}(x,0)=v,\ \ -1\le x\le 1, \tag{18}$$

$$u_{0x}^{\pm}(x,y)\pm\omega_0^{\pm}u_{0x}^{\pm}(x,y)=0,\ x=\pm 1,\ \ (x,y)\in\partial D_{\gamma_0}^{\pm}, \tag{19}$$

$$\mu_0^{\pm}(x,y)=1,\ \ (x,y)\in\gamma_0, \tag{20}$$

$$\mu_0^{-}(x,H)=0,\ \ -1\le x\le 1, \tag{21}$$

$$\left|\nabla u_0^{-}\right|^2-k^2\left|\nabla u_0^{+}\right|^2=0,\ (x,y)\in\gamma_0, \tag{22}$$

Задача (17) – (22) была рассмотрена в статьях [1], [2]. Из результатов этих работ следует, что задача имеет и притом единственное классическое решение в классе функций $\mu_{0y}^{\pm}>0$ и $\mu_{0y}^{-}>0$ в $D_{\gamma_0}^{+}$ и $D_{\gamma_0}^{-}$ соответственно. При этом граница γ_0 является аналитической кривой, монотонно возрастающей в правой половине, а функции $\mu_0^{\pm}(x,y),\ \ \mu_0^{-}(x,y)$ непрерывны в $\bar{D}_{\gamma_0}^{+}$ и $\bar{D}_{\gamma_0}^{-}$ соответственно и непрерывно дифференцируемы всюду, за исключением угловых точек.

Рассмотрим частный случай нашей задачи

$$k=1,\ \ \omega_0^{+}=\omega_0^{-}=\omega_0. \tag{23}$$

При этом первое условие всегда выполнимо, если ввести замену

$$\tilde{u}^{\pm}=\begin{cases} ku^{+}(x,y), & (x,y)\in D_{\gamma}^{+} \\ u^{-}(x,y)+k-1, & (x,y)\in D_{\gamma}^{-}, \end{cases}$$

приводящую задачу (17) – (22) к случаю $k=1$. Тогда на γ_0 будут выполнятся два условия $u_0^{+}=u_0^{-}=1,\ \left|\nabla u_0^{+}\right|=\left|\nabla u_0^{-}\right|$.

Следовательно, теперь (17) – (22) есть обычная задача о распределении температуры в области D без фазовых превращений вещества, значит можно построить функцию $\mu_0(x,y)$ по формуле

$$u_0(x,y)=\begin{cases} u_0^{+}(x,y), & (x,y)\in\bar{D}_{\gamma_0}^{+} \\ u^{-}(x,y), & (x,y)\in\bar{D}_{\gamma_0}^{-}, \end{cases} \tag{24}$$

которая является решением задачи:

$$\begin{gathered}\Delta u_0=0,\ \ (x,y)\in D;\ \ u_0(x,y)=v,\ \ 0\le x\le 1;\ \ u_{0x}(0,y)=0,\ \ H\le y\le 0;\\ u_0(x,H)=0,\ \ 0\le x\le 1;\ \ u_{0x}(1,y)+\omega_0 u_0(1,y)=0,\ \ H\le y\le 0;\end{gathered} \tag{25}$$

Функция $u_0(x,y)$ может быть эффективно найдена, например, при помощи метода Фурье. Относительно функции $u_0(x,y)$ можно заключить, что $u_{0y}(x,y)>0$ в D [3]. Следовательно, уравнение $u_0(x,y)-1=0,\ \ (x,y)\in D$ всегда разрешимо в виде некоторой функции $y=y_0(x)$, которая задает кривую γ_0, т.е. $\gamma_0: y=y_0(x),\ -1\le x\le 1.$

Справедливо утверждение [3].

Лемма 1. Пусть выполнены условия (23). Тогда функция $u_0(x,y)$ определенная соотношениями (24), (25) является нулевым приближением (по интенсивности вихря μ) задачи (1) – (11). При этом $u_{0y}(x,y)>0$ в D $u_0(x,y)$ непрерывна вместе с производными при переходе через γ_0, где $\gamma_0 : y = y_0(x),\ -1 \le x \le 1.$ – решение уравнения $u_0(x,y)-1=0.$

Первое приближение

Выпишем сейчас ту краевую задачу, соответствующую множителю μ в первой степени. Из условий (1) – (11) и из разложений (12) – (16) для функций $\psi_1(x,y)$ и $u_1^{\pm}(x,y)$ вытекает задача

$$\psi_{1_{xx}} + \psi_{1_{yy}} = 1,\ (x,y) \in D_{\gamma_0}^{+}, \tag{26}$$

$$\psi_1(x,y) = 0,\ (x,y) \in \partial D_{\gamma_0}^{+}, \tag{27}$$

$$\lambda_{+}(u_{1_{xx}}^{+} + u_{1_{yy}}^{+}) - \psi_{1_y} u_{0_x}^{+} + \psi_{1_x} u_{0_y}^{+} = 0,\ (x,y) \in D_{\gamma_0}^{+}, \tag{28}$$

$$u_1^{+}(x,0) = 0,\ -1 \le x \le 1, \tag{29}$$

$$u_{1x}^{\pm} \pm \omega_0^{\pm} u_1^{+} = 0,\ x = \pm 1,\ (x,y) \in \partial D_{\gamma_0}^{\pm}, \tag{30}$$

$$u_{0y}^{\pm} y_1(x) + u_1^{\pm}\Big|_{\gamma_0} = 0, \tag{31}$$

$$u_{1_{xx}}^{-} + u_{1_{yy}}^{-} = 0,\ (x,y) \in D_{\gamma_0}^{-}, \tag{32}$$

$$u_1^{-}(x,H) = 0,\ -1 \le x \le 1. \tag{33}$$

Кроме того, на γ_0 должно выполняться условие

$$y_1(x)\Big[(u_{0_x}^{-} u_{0_{xy}}^{-} + u_{0_y}^{-} u_{0_{yy}}^{-}) - k^2 (u_{0_x}^{+} u_{0_{xy}}^{+} + u_{0_y}^{+} u_{0_{yy}}^{+})\Big] + \Big[u_{0_x}^{-} u_{1_x}^{-} + u_{0_y}^{-} u_{1_y}^{-}\Big] - k^2 \Big[u_{0_x}^{+} u_{1_x}^{+} + u_{0_y}^{+} u_{1_y}^{+}\Big] = 0, \tag{34}$$

$$(x,y) \in \gamma_0.$$

Получившееся первое приближение имеет следующие характерные черты. Во-первых, эта задача линейна, во-вторых, ее нужно решать в известной области, соответствующей нулевому приближению. После того, когда функции $u_0^{\pm}(x,y)$ и $\psi_1(x,y)$ определены в областях $D_{\gamma_0}^{\pm}$ и $D_{\gamma_0}^{+}$, соответственно из соотношений (28) – (34) находим функции $u_1^{\pm}(x,y)$, заданные в тех же областях $D_{\gamma_0}^{\pm}$ и $y_1(x),\ -1 \le x \le 1.$

Построение нулевого приближения вариационным методом

Задача (17) – (22) эквивалентна проблеме минимума следующего интегрального функционала

$$\begin{gathered} I(u^{+},u^{-},\gamma_0) = \iint\limits_{D_{\gamma_0}^{-}} \Big[u_x^{-2} + u_y^{-2}\Big] dxdy + k^2 \iint\limits_{D_{\gamma_0}^{+}} \Big[u_x^{+2} + u_y^{+2}\Big] dxdy + \\ + k^2 \omega_0^{+} \int\limits_{\Gamma_\gamma^{+}} \Big[u^{+2} - 1\Big] dy + \omega_0^{-} \int\limits_{\Gamma_\gamma^{-}} \Big[u^{-2} - 1\Big] dy \end{gathered} \tag{35}$$

на соответствующем множестве допустимых функций [4], где $\Gamma_\gamma^+ = \partial D_\gamma^+ \cap \{x = \pm 1\}$, $\Gamma_\gamma^- = \partial D_\gamma^- \cap \{x = \pm 1\}$. Следуя методике Фридрихса [5], представим функционал (35) в классе функций $u_0^\pm > 0$ в $D_\gamma^\pm$ следующим образом [4]:

$$I_1(y_1, y_2) = \iint\limits_{\Delta_1} \frac{1 + y_{1_x}^2}{y_{1_u}} dxdu + k^2 \iint\limits_{\Delta_2} \frac{1 + y_{2_x}^2}{y_{2_u}} dxdu +$$
$$+\omega_0^+ k^2 \int_1^\nu (u^2 - 1)\left[y_{2_u}(1,u) + y_{2_u}(-1,u)\right] du + \omega_0^- \int_0^1 (u^2 - 1)\left[y_{1_u}(1,u) + y_{1_u}(-1,u)\right] du, \tag{36}$$

где $\Delta_1 = (-1 < x < 1,\ 0 < u < 1)$, $\Delta_2 = (-1 < x < 1,\ 1 < u < \nu)$, $y_1(x, y)$ и $y_2(x,u)$ – решение уравнений $u_1(x, y) - u_1 = 0$, $u_2(x, y) - u_2 = 0$ соответственно. Функционал (35) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2, \tag{37}$$

где

$$\Omega_1 = \left\{ y_1(x,u) : y_1(x,u) \in C^1(\overline{\Delta_1}),\ \min_{(x,u)\in\overline{\Delta_1}} y_{1_u} > 0,\ y_1(x,0) = H,\ y_1(x,1) = y_2(x,1) \right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{ y_2(x,u) : y_1(x,u) \in C^1(\overline{\Delta_2}),\ \min_{(x,u)\in\overline{\Delta_2}} y_{2_u} > 0,\ y_2(x,\nu) = 0,\ y_1(x,1) = y_2(x,1) \right\}.$$

Далее, пусть функции $y_1^*(x,u)$, $y_2^*(x,u)$ соответствуют классическому решению (u^+, u^-, γ) задачи (17) – (22). Справедлива лемма [6].

Лемма 2. Пара функций y_1^*, y_2^* доставляет наименьшее значение функционалу (35) на множестве (37).

Доказательство. Используя формулу Фридрихса [5], получим

$$I_1(y_1, y_2) = I_1(y_1^*, y_2^*) + \frac{d}{d\varepsilon} I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})\Big|_{\varepsilon=0} + \int_0^1 (1-\varepsilon) \frac{d^2 I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

$$\frac{d^2 I_1(y_{1\varepsilon}, y_{2\varepsilon})}{d\varepsilon^2} = 2\iint\limits_{\Delta_1} \left[\delta y_{1u}^2 + (y_{1\varepsilon u}\delta y_{1x} - y_{1\varepsilon x}\delta y_{1u})^2\right] \frac{dxdu}{y_{1\varepsilon u}^3} + 2\iint\limits_{\Delta_2} \left[\delta y_{2u}^2 + (y_{2\varepsilon u}\delta y_{2x} - y_{2\varepsilon x}\delta y_{2u})^2\right] \frac{dxdu}{y_{2\varepsilon u}^3},$$

где (y_1, y_2) – произвольный элемент из Ω, $y_{1\varepsilon} = y_1^* + \varepsilon(y_1 - y_1^*)$, $y_{2\varepsilon} = y_2^* + \varepsilon(y_2 - y_2^*)$, $0 < \varepsilon < 1$. Так как первая вариация функционала $I_1(y_1, y_2)$, вычисленная на элементе (y_1^*, y_2^*), обращается в ноль, то пара (y_1^*, y_2^*) доставляет наименьшее значение функционалу (36) на множестве (37), так как $d^2 I_1 / d\varepsilon^2$ – положительно определенный функционал на вариациях $\partial y_1 = y_1 - y_1^*$, $\partial y_2 = y_2 - y_2^*$. Лемма доказана. Минимизируем функционал (36) на множестве (37) при помощи сумм

$$y_{1n}(x,u;a_{kj}) = y_{1n}(x,u) = \sum_{j=0}^{L} \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} x^{2j} u^k + H,\ (x,u) \in \overline{\Delta_1},$$
$$y_{2n}(x,u;b_{kj}) = y_{2n}(x,u) = \frac{\nu - u}{\nu - 1} \sum_{j=0}^{L} \sum_{k=0}^{\theta_j} b_{kj} x^{2j} u^k, \tag{38}$$
$$(x,u) \in \overline{\Delta_2},\ n = \sup_{0 \le j \le L} \left\{ 2j + T_j; 2j + \theta_j \right\}.$$

Включение $(y_{1n}, y_{2n}) \in \Omega$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов $(a_{kj}; b_{kj})$ область допустимости Ω_r, где

$$r = \sum_{j=0}^{L} (T_j + \theta_j + 1), \ \Omega_r = \Omega_1 \oplus \Omega_2 \cap E^0,$$

$$\Omega_1 = \left\{ a_{kj} : \min_{(x,u)\in\overline{\Delta_1}} y_{1nu} > 0 \right\}, \ \Omega_2 = \left\{ b_{kj} : \min_{(x,u)\in\overline{\Delta_2}} y_{2nu} > 0 \right\},$$

при этом коэффициенты $(a_{kj}; b_{st})$ должны лежать в гиперплоскостях

$$E_0^0 : H + \sum_{k=1}^{T_0} a_{k0} = \sum_{k=0}^{\theta_0} b_{k0}, \ E_j^0 : \sum_{k=1}^{T_0} a_{kj} = \sum_{k=0}^{\theta_0} b_{kj}, \text{ т.е. } E^0 = E_0^0 \oplus E_1^0 \oplus ... \oplus E_L^0.$$

Неизвестные коэффициенты $(a_{kj}; b_{st})$ и множитель Лагранжа λ_t определяются из нелинейной системы Ритца

$$\begin{gathered}
\frac{\partial I_2(a_{kj}, b_{kj})}{\partial a_{pq}} + \lambda_q = 0, \ p = 1, 2..., T_q; \ q = 0, 1, ..., L, \\
\frac{\partial I_2(a_{kj}, b_{kj})}{\partial b_{st}} - \lambda_t = 0, \ s = 0, 1..., \theta_t; \ t = 0, 1, ..., L, \\
\sum_{k=1}^{T_0} a_{k0} - \sum_{k=0}^{\theta_0} b_{k0} + H = 0, \ \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} - \sum_{k=0}^{\theta j} b_{kj} = 0, \ j = 1, 2..., L, \\
I_1(a_{kj}; b_{kj}) = I_1\left(\sum_{j=0}^{L} \sum_{k=1}^{T_j} a_{kj} x^{2j} u^k + H; \frac{v-u}{v-1} \sum_{j=0}^{L} \sum_{k=0}^{\theta_j} b_{kj} x^{2j} u^k \right).
\end{gathered} \tag{39}$$

Можно установить, что функция $I_2(a_{kj}; b_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке $(a_{kj}^*; b_{kj}^*)$ множества Ω_r, лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r [7]. Следовательно, в точке $(a_{kj}^*; b_{kj}^*)$ частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в ноль. Таким образом, система уравнений (39) имеет решение.

Итак, решив систему уравнений (39) при каждом n, можно затем построить последовательность приближений (38) в виде $y_{1n}(x, u; a_{kj}^*) = y_{1n}^*$, $y_{2n}(x, u; a_{kj}^*) = y_{2n}^*$.

В заключении приведем обзор теории по данной тематике [8 – 13]. В работе смоделирован процесс кристаллизации металла. Поставленная задача нелинейная. Результаты показывают, что задача имеет классическое решение, построенное с помощью нулевого приближения вариационным методом. В дальнейшем можно построить последовательность приближений.

Список литературы

1. Базалий Б. В. Об одной стационарной задаче Стефана [Текст] / Б. В. Базалий, В. Ю. Шелепов // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1974. – № 1. – С. 5–8.
2. Базалий Б. В. Об одном обобщении стационарной задачи Стефана [Текст] / Б. В. Базалий, В. Ю. Шелепов // Мат. физика. – К. : Наукова думка. – 1975. – Вып. 27. – С. 65–80.
3. Миненко А. С. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана [Текст] / А. С. Миненко, А. И. Шевченко // Доповіді НАН України. – 2010. – № 5. – С. 36–40.

4. Миненко А. С. Об одной проблеме Стефана [Текст] / А. С. Миненко, А. И. Шевченко // Доповіді НАН України. – 2008. – № 1. – С. 26–30.
5. Friedrich K. O. Ube rein Minimumproblem fur Potentialsto – mungen mit freie Rande [Текст] / Friedrich K. O. – Math. Ann., 1933. – P. 109.
6. Миненко А. С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца [Текст] / А. С. Миненко // Укр. мат. журнал. – 2007. – № 11. – С. 1546–1556.
7. Миненко А. С. Проблема минимума со свободной границей [Текст] / А. С. Миненко // Искусственный интеллект. – 1998. – № 2. – С. 101–109.
8. Патон Б. Е. Избранные труды [Текст] / Патон Б. Е. – Киев : Институт электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.
9. Александров Д.В. К теории направленной кристаллизации с зоной фазового перехода при наличии конвекции и кинетики в расплаве [Текст] / Д. В. Александров, А. В. Нетреба, А.П. Малыгин // Расплавы. – 2011. – № 4. – С. 62–76.
10. Миненко А. С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца [Текст] / А. С. Миненко // Укр. мат. журнал. – 2006. – № 10. – С. 1385–1394.
11. Minenko A. S. Axially symmetric flow. Fifth SIAM conference on optimization [Текст] / A. S. Minenko // Victoria, British Columbia. – May 20-22, 1996. – Victoria, 1996. – P. 12.
12. Миненко А. С. Аналитичность свободной границы в одной задаче осесимметричного течения [Текст] / А. С. Миненко // Украинскому математическому журналу. – 1998. – № 12. – С.1693–1700.
13. Миненко А. С. Проблема минимума одного класса интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования [Текст] / А. С. Миненко// Мат.физика и нелинейная механика. – 1993. – Вып. 16. – С. 48–52.
14. Миненко А. С. Вариационные задачи со свободной границей [Текст] / А. С. Миненко. – Киев : Наукова думка, 2005. – 354с.
15. Миненко А. С. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана [Текст] / А. С. Миненко, А. И. Шевченко // Доповіді НАН України. – 2010. –№ 4. – С. 30–34.
16. Миненко А. С. Приближенный анализ процесса кристаллизации металла при минимизации ступенчатой функции [Текст] / А. С. Миненко, Е. В. Радевич // Проблемы искусственного интеллекта. – 2017. – № 2 (5). – С. 14–25.
17. Minenko A. S. Axially symmetric flow [Text] / A. S. Minenko // Проблемы искусственного интеллекта. – 2016. – № 1 (2). – С. 5–14.
18. Миненко А. С. Математическое моделирование процесса кристаллизации металла [Текст] / А. С. Миненко, Е. В. Радевич // Проблемы искусственного интеллекта. – 2018. – № 1 (8). – С. 13–23.

References

1. Bazaliy B. V., Shelepov V. Y. Ob odnoy statsionarnoy zadache Stefana [One stationary Stefan problem]. *Doklady an USSR* [Reports of the Ukrainian SSR Academy of Sciences. Ser. BUT], Ser. 1974, no. 1, pp. 5-8.
2. Bazaliy B. V., Shelepov V. Yu. Ob odnom obobshchenii statsionarnoy zadachi Stefana [On a generalization of the stationary Stefan problem]. *Mat. physics*, K., Naukova Dumka, 1975, Vol. 27, pp. 65-80.
3. Minenko A. S., Shevchenko A.I. Priblizhennyy analiz statsionarnoy konvektivnoy zadachi Stefana [An Approximate analysis of the stationary convective problem of Stefan]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of NAS of Ukraine], 2010, № 5, p. 36-40.
4. Minenko A. S., Shevchenko A. I. Ob odnoy probleme Stefana [On a problem of Stefan] *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of NAS of Ukraine], 2008, no. 1, pp. 26-30.
5. Friedrich K. O. Ube rein Minimumproblem fur Potentialsto – mungen mit freie Rande. *Math. Ann*., 1933, p. 109.
6. Minenko A. S. Issledovaniye odnoy konvektivnoy zadachi Stefana metodom Rittsa [Investigation of a single convective Stefan problem by the method of Ritz]. *Ukr. mat. zhurnal* [Ukr. mate. log.], 2007, no. 11, pp. 1546-1556.
7. Minenko A. S. Problema minimuma so svobodnoy granitsey [the problem of minimum with free boundary] *Iskusstvennyy intellekt* [Artificial intelligence], 1998, no. 2, pp. 101-109.
8. Paton B. E. *Izbrannyye trudy* [Selected works], Kyiv, Institute of electric them. E. O. Paton of NAS of Ukraine, 2008, 893 p.
9. Alexandrov D. V. , Netreba A. V., Malygin A. P. K teorii napravlennoy kristallizatsii s zonoy fazovogo perekhoda pri nalichii konvektsii i kinetiki v rasplave [To the theory of directional solidification with a phase transition zone in the presence of convection and kinetics in the melt]. *Rasplavy* [Melts], 2011, no. 4, pp. 62-76.

10. Minenko A. S. O minimizatsii odnogo integral'nogo funktsionala metodom Rittsa [On the minimization of one integral functional by the Ritz method]. *Ukr. mat. zhurnal* [Ukrainian mathematical journal], 2006, no. 10, pp. 1385-1394.
11. Minenko A. S. *Axially symmetric flow. Fifth SIAM conference on optimization* .Victoria, British Columbia, May 20-22, 1996, Victoria, 1996, P. 12.
12. Minenko A. S. Analitichnost' svobodnoy granitsy v odnoy zadache osesimmetrichnogo techeniya [Analyticity of the free boundary in one problem of axisymmetric flow]. *Ukrainian journal of mathematics* [Ukrainskomu matematicheskomu zhurnalu], 1998, no. 12, pp. 1693-1700.
13. Minenko A. S. Problema minimuma odnogo klassa integral'nykh funktsionalov s neizvestnoy oblast'yu integrirovaniya [the Problem of the minimum of one class of integral functionals with unknown integration]. *Mat.fizika i nelineynaya mekhanika* [Mathematical physics and nonlinear mechanics, 1993, Vol. 16, pp. 48-52.
14. Minenko A. S. *Variatsionnyye zadachi so svobodnoy granitsey* [Variational problems with free boundary]. Kyiv , Naukova Dumka, 2005, 354 p.
15. Minenko A. S., Shevchenko A. S. Priblizhennyy analiz mnogomernoy konvektivnoy zadachi Stefana [Approximate analysis of multidimensional convective Stefan problem]. *Dopovidi NAN Ukrayiny* [Reports of NAS of Ukraine], 2010,no. 4, pp. 30-34.
16. Minenko A.S., Radevich E. V. Numerical Simulation of the Process Crystallization. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2017, no. 2 (5), pp. 14–25.
17. Minenko A. S. Axially symmetric flow. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2016, no. 1 (2), pp. 5–14.
18. Minenko A.S., Radevich E. V. Matematicheskoye modelirovaniye protsessa kristallizatsii metalla *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2018, no. 1 (8), pp. 13–23.

RESUME

A. S. Minenko, A. M. Levkina

Investigation of the convective Stefan problem on the plane

Background: The foundations of the theory of solidification were laid more than. The foundations of the theory of solidification were laid more than a hundred years ago by Stefan. Crystallization of ingots is one of the examples of this theory. During this process, the crystallizing system comprises a solid and a liquid phase. Also, the intensity of convection crystallization of the metal depends on the temperature and volume of space.

Materials and methods: The main objective of the study is to approximate the analysis of the free boundary depending on the intensity of the vortex. As a source of information, we study a mathematical model based on the Stefan spatial problem, taking into account the convective motion and impurities in the liquid phase.

Results: The work is devoted to the study of crystallization processes that occur in nature and are accompanied by convective mixing in the liquid phase. We will also consider the formulation of the problem in which the convection is caused by the presence of a given vortex. An approximate analysis of the free boundary depending on the intensity of the vortex will be made

Conclusion: In conclusion, we give an overview of the theory on this topic [8-13]. The process of metal crystallization is simulated in the work. The problem is nonlinear. The results show that the problem has a classical solution constructed using the zero approximation by the variational method. In the future, you can build a sequence of approximations.

РЕЗЮМЕ

А. С. Миненко, А. В. Лёвкина

Исследование конвективной задачи Стефана на плоскости

История вопроса, исходные данные: Статья посвящена исследованию конвективной задачи Стефана на плоскости. Основы теории затвердевания были положены более ста лет назад Стефаном. Кристаллизация слитков является одним из примеров

данной теории. В ходе данного процесса кристаллизующая система включает твердую и жидкую фазы. Также интенсивность конвекции кристаллизации металла зависит от температуры и объема пространства.

Материалы и методы: Основная цель исследования состоит в приближенном анализе свободной границы в зависимости от интенсивности вихря. В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на пространственной задаче Стефана, с учетом конвективного движения и примесей в жидкой фазе.

Результаты: Работа посвящена изучению процессов кристаллизации, которые встречаются в природе и сопровождаются конвективными перемешиваниями в жидкой фазе. Также рассмотрена постановка задачи, в которой конвекция будет вызвана наличием заданного вихря. Составлен приближенный анализ свободной границы в зависимости от интенсивности вихря.

Заключение: В заключении приведен обзор теории по данной тематике [8 – 13]. В работе смоделирован процесс кристаллизации металла. Авторы приходят к выводу, что задача нелинейная. Результаты показывают, что задача имеет классическое решение, построенное с помощью нулевого приближения вариационным методом. Делается предположение о дальнейшем построении последовательности приближений.

Статья поступила в редакцию 13.08.2018.