Л

УДК 681.5.09

В. И. Левин
Пензенский государственный технологический университет
440039, Пенза, пр. Байдукова, 1-а

НЕПРЕРЫВНО-ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. II. РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ

V. I. Levin
Penza State Technological University
440039, Penza, Baidukova pr.

CONTINUOUS-LOGICAL METHODS OF CALCULATING OF RELIABILITY OF COMPLEX SYSTEMS. II. CALCULATION OF SOME CLASSES OF SYSTEMS

В. І. Левін
Пензенський державний технологічний університет
440039, Пенза, пр. Байдукова, 1-а

БЕЗПЕРЕРВНО-ЛОГІЧНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ СКЛАДНИХ СИСТЕМ. II. РОЗРАХУНОК ДЕЯКИХ КЛАСІВ СИСТЕМ

Описаны точные и приближенные методы анализа надежности сложных технических систем, с использованием аппарата логических определителей. Выведены аналитические расчетные соотношения для некоторых классов систем (симметрические, равновесные пороговые, неравновесные пороговые).
Ключевые слова: сложная система, переключательный процесс, надежностный процесс, динамический автомат, двоичный оператор, структура оператора, логическая теория надежности.

Precise and approximate methods of analyzing the reliability of complex technical systems are described, using the apparatus of logical determinants. Analytical calculated relations are derived for some classes of systems (symmetric, equilibrium threshold, nonequilibrium threshold).
Keywords: complex system, switching process, reliability process, dynamic automaton, binary operator, operator structure, logical reliability theory.

Описано точні і наближені методи аналізу надійності складних технічних систем, з використанням апарату логічних визначників. Виведено аналітичні розрахункові співвідношення для деяких класів систем (симетричні, рівноважні порогові, нерівноважні порогові).
Ключові слова: складна система, комутаційний процес, надійнісний процес, динамічний автомат, двійковий оператор, структура оператора, логічна теорія надійності.

Введение

В первой части работы [1] было показано, что использование в теории надежности, вместо традиционного вероятностного подхода, математической логики открывает новые возможности в исследовании надежности технических систем. В развитие этой идеи был подробно описан математический аппарат создаваемой автором логической теории надежности сложных систем. Этот аппарат так называемых логических определителей играет ту же роль укрупненного (блочного) описания изучаемых нелинейных надежностных систем, что и обычные определители при изучении линейных систем [2], [3]. В этой статье, являющейся второй частью работы, строится и детально описывается автоматная математическая модель для оценки характеристик надежности сложных систем. Подробно изложена методика исследования и расчета надежности таких систем с помощью аппарата логических определителей.

1 Надежность симметрических систем

Изучим методом эквивалентных схем ([1], § 9) надежность класса систем без памяти, у которых симметрические функции работоспособности (ФР), а надежностные процессы (НП) в блоках и на входах произвольны. *Симметричность* ФР означает, что надежностное состояние (НС) любого выхода такой системы определяется только общим числом блоков (входов), НС которых равны 0 и 1, но не зависит от того, какие именно это блоки. К этому классу принадлежат, например, параллельные и последовательные системы ([1], § 11, 12). Обратимся к общей схеме-модели надежности системы ([1], § 9). В ней без ограничения общности можно опустить ступень 1 (задержки) и внешние входы, а из r выходов оставить какой-нибудь один. В результате получим $(n,1)$-полюсник, реализующий на выходе симметрическую булеву функцию своих входов

$$y = f(a_1,...,a_n). \tag{1.1}$$

Воздействия $a_1(t),...,a_n(t)$ на его входах – НП в блоках изучаемой системы, реакция $y(t)$ – НП в системе. Найдем $y(t)$ по заданным $a_1(t),...,a_n(t)$.

Любую симметрическую функцию f от n переменных (14.1) можно конкретизировать как *симметрическую функцию* $f_n^{p_1 \dots p_r}$ с *некоторым набором индексов* $p_1,..., p_r$. По определению $f_n^{p_1 \dots p_r} = 1$, если ровно p_1 или ... или ровно p_r из n переменных (безразлично каких) равны единице. Выделим *фундаментальную симметрическую функцию* $f_n^p = 1$ *индекса* p *от* n *переменных*. По определению $f_n^p = 1$, если ровно p из n переменных (безразлично каких) равны 1. Ясно, что

$$f_n^{p_1 \dots p_r} = \bigvee_{i=1}^{r} f_n^{p_i}. \tag{1.2}$$

Согласно (1.2), $(n,1)$-полюсник – модель нашей системы – можно заменить эквивалентной двухступенчатой схемой. Ступень 1 содержит r параллельно соединенных элементов, реализующих симметрические функции $f_n^{p_i}, i = 1,...,r$, от одного и того же множества переменных $a_1,...,a_n$; ступень 2 – один дизъюнктор, входы которого – это выходы ступени 1. В качестве стандартных примем воздействия на схему вида [1], (8.2), начинающиеся и оканчивающиеся импульсами (блоки в момент $t_0 = 0$ неработоспособны, затем восстанавливаются, отказывают, ..., окончательно отказывают).

Найдем реакцию $y_n^p(t)$ любого элемента f_n^p первой ступени на указанные воздействия. В силу симметричности функции f_n^p эти воздействия можем заменить эквивалентной совокупностью M свободных импульсов

$$x^{(r)}(t) = 1(A^r, B^r), \quad r = 1,...,M, \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i\ , \tag{1.3}$$

с моментами A^r, B^r начала и окончания вида [1], (8.6), упорядоченных таким образом, что импульс с большим номером начинается (оканчивается) позже импульса с меньшим номером (см. [1], § 8). Число пересекающихся импульсов (1.3) в любой момент t совпадает с этим числом для совокупности входных процессов схемы [1], (8.2) и не превосходит n. Элемент f_n^p имеет значение выхода $y = 1$ в момент t, если в этот момент имеется ровно p единиц на n его входах, т.е. пересекаются p импульсов импульсной последовательности [1], (8.3). Причем так пересекаться может каждая пачка из p последовательных импульсов (1.3):

$$1(A^k, B^k),...,1(A^{k+p-1}, B^{k+p-1}), \quad k = 1,..., M - p + 1\,. \tag{1.4}$$

Пересечение всех p импульсов (1.4) в силу их упорядоченности происходит, если первый импульс оканчивается позже, чем начинается p-й импульс. Поэтому каждой k-й пачке импульсов (1.4), если не учитывать ее взаимодействие с другими пачками импульсов, соответствует фрагмент искомой реакции

$$y_k(t) = \begin{cases} 1(A^{k+p-1}, B^k) \text{ при } A^{k+p-1} < B^k; \\ 0 = 1(B^k, B^k) \text{ при } A^{k+p-1} \geq B^k, \end{cases}$$

или в терминах непрерывной логики (НЛ)

$$y_k(t) = 1(B^k A^{k+p-1}, B^k), \quad k = 1,..., M - p + 1. \tag{1.5}$$

Учтем взаимодействие различных пачек импульсов. Рассмотрим две соседние пачки – k-ю и $(k+1)$-ю. Если они не взаимодействуют, то соответствующие им два выходных импульса (1.5) y_k и y_{k+1} не пересекаются и реакция элемента на 2 выбранные пачки импульсов образуется парой разделенных во времени импульсов y_k и y_{k+1}. Взаимодействие этих двух пачек импульсов проявляется в пересечении импульсов y_k, y_{k+1} на некотором интервале (a,b), что означает пересечение на интервале (a,b) всех импульсов k-й и $(k+1)$-й пачек, т.е. всех $p+1$ импульсов объединенной пачки. Значит, в интервале (a,b) на $p+1$ из n входов элемента f_n^p действуют единицы, а на его выходе получается $y = 0$. Итак, эффект взаимодействия соседних k-й и $(k+1)$-й пачек импульсов (1.4) ведет к объединению их реакций y_k, y_{k+1} (1.5) в одну $y_{k,k+1}$ по правилу

$$y_{k,k+1}(t)=\begin{cases}1(B^kA^{k+p-1},B^k)0(-,-)1(B^{k+1}A^{k+p},B^{k+1}) & \text{при } B^k\le B^{k+1}A^{k+p};\\ 1(B^kA^{k+p-1},B^{k+1}A^{k+p})0(-,-)1(B^k,B^{k+1}) & \text{при } B^k> B^{k+1}A^{k+p},\end{cases}$$

или в терминах НЛ с учетом очевидного неравенства $B^k\le B^{k+1}$

$$y_{k,k+1}(t)=1(B^kA^{k+p-1},B^kA^{k+p})0(-,-)1(B^k\vee B^{k+1}A^{k+p},B^{k+1})\,. \tag{1.6}$$

Взаимодействие несоседних пачек импульсов (1.4) специально не учитываем, ибо в интервале пересечения соответствующих выходных импульсов (1.5) появляется тот же сигнал $y=0$, что и для соседних пачек, а сам интервал – часть аналогичного интервала для некоторых соседних пачек.

Итак, реакция элемента f_n^p на стандартные воздействия вида [1], (8.2) есть последовательность импульсов (1.5), сжатых (ср. (1.5) с (1.6)) согласно

$$B^k\to B^kA^{k+p},\ k=1,...,M-p;\ B^kA^{k+p-1}\to B^{k-1}\vee B^kA^{k+p-1},\ k=2,...,M-p+1, \tag{1.7}$$

и ставших в результате непересекающимися. Преобразование (1.7) есть замена момента начала каждого импульса (1.5) (кроме первого) его дизъюнкцией НЛ с моментом окончания соседнего слева импульса и момента окончания каждого импульса (1.5) (кроме последнего) его конъюнкцией НЛ с моментом начала соседнего справа импульса. Окончательно реакция элемента f_n^p на воздействия вида [1] (8.2) такова:

$$\begin{aligned}y_n^p(t)=1(B^1A^p,B^1A^{p+1})0(-,-)1(B^1\vee B^2A^{p+1},B^2A^{p+2})...1(B^{M-p-1}\vee\\ \vee B^{M-p}A^{M-1},B^{M-p}A^M)0(-,-)1(B^{M-p}\vee B^{M-p+1}A^M,B^{M-p+1}),\end{aligned} \tag{1.8}$$

где A^r и B^r – из [1], (8.6). Из (1.8) видно, что реакция – процесс того же вида, что и воздействия, и имеет до $M-p+1$ импульсов ($M-p$ пауз).

Согласно (1.2), реакцию $y_n^{p_1\cdots p_r}(t)$ на выходе схемы-модели можно вычислить как реакцию r-входового дизъюнктора (ступень 2 схемы) на воздействия, являющиеся выходными процессами элементов $f_n^{p_1},...,f_n^{p_r}$ с входными воздействиями вида [1], (8.2); последние можно определить по формуле (1.8) при $p=p_1,...,p_r$. Но реакция дизъюнктора с n входами на произвольные воздействия вида [1], (8.2), начинающиеся и оканчивающиеся импульсами, находится по формуле [1], (12.1). Теперь для получения $y_n^{p_1\cdots p_r}(t)$ осталось лишь уточнить выражение [1], (12.1), учитывая, что в данном случае дизъюнктор имеет r входов, а воздействия на него – не процессы вида [1], (8.2), а процессы (1.8) при $p=p_1,...,p_r$. Окончательно реакция n-входовой схемы-модели с симметрической функцией $f_n^{p_1\cdots p_r}$ на входные воздействия вида [1], (8.2)

$$y_n^{p_1\cdots p_r}(t)=1(\overline{A}^1,\overline{B}^1\overline{A}^2)0(-,-)1(\overline{A}^2,\overline{B}^2\overline{A}^3)...1(\overline{A}^{N-1},\overline{B}^{N-1}\overline{A}^N)0(-,-)1(\overline{A}^N,\overline{B}^N)\,. \tag{1.9}$$

Здесь $\overline{A}^s$ и $\overline{B}^s$ – логические определители (ЛО) вида

$$\begin{aligned}\overline{A}^s&=\left|\begin{array}{c}(B^1A^{p_1})(B^1\vee B^2A^{p_1+1})...(B^{M-p_1}\vee B^{M-p_1+1}A^M)\\ \hdashline (B^1A^{p_r})(B^1\vee B^2A^{p_r+1})...(B^{M-p_r}\vee B^{M-p_r+1}A^M)\end{array}\right|^{(s)},\\ \overline{B}^s&=\left|\begin{array}{c}(B^1A^{p_1+1})...(B^{M-p_1}A^M)B^{M-p_1+1}\\ \hdashline (B^1A^{p_r+1})...(B^{M-p_r}A^M)B^{M-p_r+1}\end{array}\right|^{(s)},\quad s=1,...,N,\end{aligned} \tag{1.10}$$

с логическими определителями A^r и B^r из [1], (8.6); N – количество имеющихся импульсов в r процессах (1.8) с $p = p_1,..., p_r$, т.е.

$$N = \sum_{i=1}^{r}(M - p_i + 1) = (M+1)r - \sum_{i=1}^{r} p_i . \qquad (1.11)$$

Итак, НП в произвольной системе с симметрической ФР $f_n^{p_1...p_r}$ и n блоками, имеющими НП вида [1], (8.2), в общем случае есть восстановление начальной работоспособности системы и последующая ее эксплуатация до исчерпания ресурса. Ресурс системы – N восстановлений – выражается через суммарный ресурс всех блоков $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ по (1.11); интервалы работоспособности системы $(\overline{A}^s, \overline{B}^s \overline{A}^s)$, $s = 1,..., N-1$; $(\overline{A}^N, \overline{B}^N)$. Первое изменение НС системы – восстановление в момент $\overline{A}^1$, первый отказ – в момент $\overline{B}^1\overline{A}^2$, последний (окончательный) отказ – в момент $\overline{B}^N$.

Из базовой реакции (1.9) схемы-модели на стандартные воздействия вида [1], (8.2) можно найти ее реакции на любые воздействия. Найдем, например, ее реакцию на воздействия вида [1], (12.2). Представим эти воздействия в стандартном виде [1], (12.3). Реакция на воздействия вида [1], (12.3) вычисляется согласно формулам (1.9)–(1.11) при замене $M \to M+n$ и ЛО A^r и B^r из [1], (12.4). В силу $p_1 \le n,..., p_r \le n$ элементы 1-го столбца ЛО $\overline{A}^s$ суть $-\infty$, так что $\overline{A}^1 = ... = \overline{A}^r = -\infty$ и первые r импульсов в (1.9) сливаются в один с началом $-\infty$. Выполнив нужные преобразования ([1], §§ 11, 12), найдем искомую реакцию n-входовой схемы-модели с функцией $f_n^{p_1...p_r}$ на воздействия вида [1], (12.2):

$$y_n^{p_1...p_r}(t) = 0(\overline{B}^r\overline{A}^1,-)1(\overline{A}^1, \overline{B}^{r+1}\overline{A}^2)...1(\overline{A}^{N-1}, \overline{B}^{N+r-1}\overline{A}^N)0(-,-)1(\overline{A}^N, \overline{B}^{N+r}), \qquad (1.12)$$

где $\overline{A}^s$ и $\overline{B}^s$ – ЛО вида

$$\overline{A}^s = \left|\begin{array}{c}(B^1 \vee B^2 A^{p_1-n+1})...(B^{M+n-p_1} \vee B^{M+n-p_1+1}A^M) \\ \hdashline (B^1 \vee B^2 A^{p_r-n+1})...(B^{M+n-p_r} \vee B^{M+n-p_r+1}A^M)\end{array}\right|^{(s)}, \quad s = 1,..., N;$$
$$\overline{B}^s = \left|\begin{array}{c}(B^1 A^{p_1-n+1})...(B^{M+n-p_1}A^M)B^{M+n-p_1+1} \\ \hdashline (B^1 A^{p_r-n+1})...(B^{M+n-p_r}A^M)B^{M+n-p_r+1}\end{array}\right|^{(s)}, \quad s = 1,..., N+r, \qquad (1.13)$$

с ЛО A^r из [1], (8.6), B^r из [1], (12.4) и

$$N = (M+n)r - \sum_{i=1}^{r} p_i . \qquad (1.14)$$

Итак, НП в системе с симметрической ФР $f_n^{p_1...p_r}$ и n блоками с НП вида [1], (12.2) имеет смысл потери имевшейся вначале работоспособности. При этом ресурс системы – N восстановлений – выражается формулой (1.14). Интервалы работоспособности данной системы имеют вид $(t_0, \overline{B}^r\overline{A}^1)$; $(\overline{A}^s, \overline{B}^{s+r}\overline{A}^{s+1})$, $s = 1,..., N-1$; $(\overline{A}^N, \overline{B}^{N+r})$. Первое изменение НС системы – отказ в момент $\overline{B}^r\overline{A}^1$, окончательный отказ – в момент $\overline{B}^{N+r}$.

2 Надежность равновесных пороговых систем

Симметрическая ФР (1.1), как и любая ФР, должна быть монотонно неубывающей функцией своих аргументов a_i. Наиболее часто употребляемые в надежности симметрические функции, удовлетворяющие условию монотонности, составляют равновесные пороговые функции. По определению функция $y = f(a_1,...,a_n)$ называется *пороговой*, если

$$y = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \ \sum_{i=1}^{n} T_i a_i \geq p; \\ 0 \quad \text{при} \ \sum_{i=1}^{n} T_i a_i < p. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Здесь T_i – веса аргументов a_i; p – порог. При $T_1 = ... = T_n$ пороговая функция называется *равновесной*; ее без ограничения общности запишем как

$$y = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \ \sum_{i=1}^{n} a_i \geq p; \\ 0 \quad \text{при} \ \sum_{i=1}^{n} a_i < p. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Пороговая ФР описывает системы, которые работоспособны, если общее число работоспособных блоков, взятых с учетом их весов T_i в системе, не меньше заданного порога p. В частности, ФР (2.2) описывает параллельную $(p = 1)$ и последовательную $(p = n)$ системы. Изучим НП в произвольной системе с равновесной пороговой ФР (2.2).

ФР (2.2) есть частный случай симметрической функции $f_n^{p_1...p_r}$ в случае $r = n - p + 1;$ $p_1 = p,\ p_2 = p + 1,...,\ p_r = n$. Поэтому НП в системе с ФР (2.2) и НП в блоках [1], (8.2) выражаются по (1.9)–(1.11) при указанных r, p_i; при этом $N = (n - p + 1)(M + 1 - 0{,}5(p + n))$. Аналогично, НП во всей системе с НП в блоках вида [1], (12.2) выражается формулами (1.12)–(1.14) при тех же r и p_i, причем $N = (n - p + 1)(M + 0{,}5(n - p))$.

Более обозримые выражения НП в системе с ФР (2.2) можно получить при непосредственном использовании метода, описанного в § 1. Рассмотрим *пороговый элемент* как модель системы. На его выходе реализуется функция (2.2). Воздействия $a_1(t),...,a_n(t)$ на его входах – это НП в блоках, реакция $y(t)$ на его выходе – НП в системе. Найдем $y(t)$ по заданным $a_i(t)$. За стандартные (как в § 1) примем воздействия $a_1(t),...,a_n(t)$ [1], (8.2). Так как пороговая функция (2.2) является симметрической, то воздействия вида [1], (8.2) мы можем заменить эквивалентной совокупностью свободных импульсов вида (1.3) с параметрами [1], (8.6). Пороговый элемент реализует функцию $f_n^{p,p+1,...,n}$. Он выдает на выходе единицу в момент t, если в этот момент имеется p или $p+1$ или ... или n единиц на n его входах, т.е. если в этот момент пересекается не менее p импульсов в эквивалентной воздействиям [1], (8.2) импульсной последовательности (1.3). Так пересекаться может каждая пачка импульсов вида (1.4) с p последовательными импульсами из (1.3). Повторяя рассуждения § 1, находим, что каждая такая пачка при ее изолированном рассмотрении дает вклад (1.5) в искомую реакцию $y(t)$. Учтем теперь взаимодействие пачек между собой. Рассмотрим соседние пачки – k-ю и $(k+1)$-ю. Если они не взаимодействуют, то соответствующие им выходные импульсы (1.5) y_k и y_{k+1} не пересекаются и реакция на обе пачки есть пара (y_k, y_{k+1}). Взаимодействие этих пачек проявляется в пересечении импульсов y_k, y_{k+1} на некотором интервале (a,b), что означает пересечение на (a,b) всех импульсов обеих пачек, т.е. всех $p+1$ импульсов объединенной пачки. Значит, в интервале (a,b) на $p+1$ из n входов элемента действуют единицы и потому на выходе элемента имеем $y=1$. Таким образом, взаимодействие соседних k-й и $(k+1)$-й пачек импульсов вида (1.4) требует объединения соответствующих реакций y_k и y_{k+1} (1.5) в одну $y_{k,k+1}$ согласно

$$y_{k,k+1}(t)=\begin{cases}1(B^kA^{k+p-1},B^k)0(-,-)1(B^{k+1}A^{k+p},B^{k+p}), \text{ при } B^k\le B^{k+1}A^{k+p};\\ 1(B^kA^{k+p-1},B^{k+1})=1(B^kA^{k+p-1},B^{k+1}A^{k+p})0(-,-)1(B^{k+1}A^{k+p},B^{k+1}),\\ \qquad \text{при } B^k>B^{k+1}A^{k+p},\end{cases}$$

или в терминах НЛ с учетом очевидного неравенства $B^k\le B^{k+1}$

$$y_{k,k+1}(t)=1(B^kA^{k+p-1},B^kA^{k+p})0(-,-)1(B^{k+1}A^{k+p},B^{k+1}). \tag{2.3}$$

Взаимодействие несоседних пачек импульсов здесь, как и в § 1, мы не учитываем. Итак, искомая реакция $y(t)$ есть последовательность импульсов (1.5), преобразованных (ср. (1.5) с (2.3)) согласно

$$B_k\to B^kA^{k+p},\quad k=1,\dots,M-p. \tag{2.4}$$

Окончательно реакция порогового элемента-модели на воздействия вида [1], (8.2)

$$y(t)=1(B^1A^p,B^1A^{p+1})\dots1(B^{M-p}A^{M-1},B^{M-p}A^M)0(-,-)1(B^{M-p+1}A^M,B^{M-p+1}), \tag{2.5}$$

где A^r и B^r – ЛО [1], (8.6). Итак, НП в системе с равновесной пороговой ФР (2.2) и НП вида [1], (8.2) в блоках есть начальное восстановление работоспособности системы и последующая ее эксплуатация до исчерпания ресурса, равного $M-p+1$ восстановлений, где $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ – суммарный ресурс всех блоков; p – порог ФР. Интервалы работоспособности системы

$$(B^rA^{r+p-1},B^rA^{r+p}),\ r=1,\dots,M-p;\ (B^{M-p+1}A^M,B^{M-p+1}).$$

Первое изменение НС системы – восстановление в момент B^1A^p, первый отказ системы – в момент B^1A^{p+1}, последний (окончательный) – в момент B^{M-p+1}.

Определим реакцию порогового элемента-модели на воздействие вида [1], (12.2). Представим [1], (12.2) в стандартном виде [1], (12.3). При этом реакция на воздействия вида [1], (12.3) вычисляется по формуле (2.5) при $M\to M+n$ и ЛО A^r,B^r из [1], (12.4). После нужных преобразований (см. [1], §§ 11, 12) имеем реакцию порогового элемента-модели на воздействия вида [1], (12.2):

$$y(t) = 0(B^{n-p+1}A^1,-)1(B^{n-p+2}A^1, B^{n-p+2}A^2)...1(B^{M+n-p}A^{M-1}, \\ B^{M+n-p}A^M)0(-,-)1(B^{M+n-p+1}A^M, B^{M+n-p+1}), \tag{2.6}$$

где A^r – ЛО из [1], (8.6), B^r – ЛО из [1], (12.4), т.е. НП в системе с равновесной пороговой ФР (2.2) и НП [1], (12.2) в блоках имеют смысл потери имевшейся вначале работоспособности. Ресурс системы составляет M восстановлений, интервалы ее работоспособности можно найти по формулам

$$(B^{n-p+r+1}A^r, B^{n-p+r+1}A^{r+1}),\ r = 1,...,M-1; (B^{M+n-p+1}A^M, B^{M+n-p+1}).$$

Первое изменение НС системы – отказ в момент $B^{n-p+1}A^1$, окончательный отказ системы происходит в момент $B^{M+n-p+1}$.

При $p=1$ НП (2.5), (2.6) переходят в соответствующие НП [1], (12.1) и [1], (12.5) в параллельных системах, а при $p=n$ – в соответствующие НП в последовательных системах (один из них рассмотрен в [1], (12.9)).

3 Надежность неравновесных пороговых систем

Изложим методику отыскания НП в системе с ФР в виде общей (неравновесной) пороговой функции (2.1).

1. Веса $T_1,...,T_n$ – целые, порог p – произвольный. Для определенности примем $n=4,\ T_1=T_2=T_3=1,\ T_4=2,\ p=3$. Тогда ФР (2.1)

$$y = \left\{\begin{matrix} 1, & a_1+a_2+a_3+2a_4 \ge 3 \\ 0, & a_1+a_2+a_3+2a_4 < 3 \end{matrix}\right| = \left\{\begin{matrix} 1, & \sum_{i=1}^{5} a_i \ge 3 \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} a_i < 3 \end{matrix}\right|_{a_4 \equiv a_5}. \tag{3.1}$$

Согласно (3.1) наш 4-входовый пороговый элемент-модель системы эквивалентен по реакции 5-входовому элементу с равновесной пороговой функцией (2.2) и порогом $p=3$ при $a_4(t) \equiv a_5(t)$. Найдя реакцию последнего на заданные воздействия (§ 2) и учтя дополнительное условие $a_4(t) \equiv a_5(t)$, получим реакцию 4-входового порогового элемента-модели (искомый НП в системе). Эта процедура применима при любых n, T_i и p. Ее основа – переход от данного неравновесного порогового элемента к эквивалентному пороговому элементу с равными (единичными) весами, но с большим числом входов.

2. Веса $T_1,...,T_n$ – рациональные, порог p – произвольный. Тогда

$$T_i = A_i / B_i,\quad i = 1,...,n, \tag{3.2}$$

где A_i и B_i – целые числа. Пусть число B – наименьшее общее кратное $B_i,...,B_n$. Тогда можно записать

$$T_i = C_i / B,\quad i = 1,...,n, \tag{3.3}$$

где $C_i = A_i B / B_i, i = 1,...,n$, – целые числа. При выполнении умножения всех параметров $T_1,...,T_n, p$ порогового элемента на одно и то же число R функция, реализуемая элементом, не меняется. Выберем $R = B$. Тогда, учитывая (3.3), видим, что наш элемент эквивалентен пороговому элементу с весами $T_i' = C_i,\ i = 1,...,n$ и порогом $p' = pB$. Так как теперь веса T_i' – целые числа, расчет реакции элемента можно вести по методике из п. 1. Тем самым найдем реакцию на заданные воздействия исходного порогового элемента-модели, т.е. искомый НП в системе.

Пример 1. Система с четырьмя блоками работоспособна, если общее число работоспособных блоков, с учетом их весов в системе, не меньше трех. Веса блоков следующие: $T_1 = T_2 = T_3 = 1, T_4 = 2$. Блоки в начальный момент исправны, затем отказывают, один раз восстанавливаются и переходят в состояние окончательного отказа. Найти НП в системе.

Функция работоспособности рассматриваемой системы имеет вид пороговой (3.1). Соответствующий пороговый элемент-модель системы эквивалентен 5-входовому элементу с равновесной пороговой функцией (2.2) и порогом $p = 3$. Воздействия на входах 5-входового элемента, моделирующие надежностный процесс в блоках:

$$a_1(t) = 0(b_{10},-)1(a_{11},b_{11}),$$

$$a_2(t) = 0(b_{20},-)1(a_{21},b_{21}),\ a_3(t) = 0(b_{30},-)1(a_{31},b_{31}),\ a_4(t) \equiv a_5(t) = 0(b_{40},-)1(a_{41},b_{41}).$$

Реакция элемента (НП в системе) по формуле (2.6) при $n = 5,\ p = 3$

$$y(t) = 0(B^3A^1,-)1(B^4A^1, B^4A^2)...1(B^7A^4, B^7A^5)0(-,-)1(B^8A^5, B^8). \tag{3.4}$$

Здесь $A^r = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{41} \\ a_{41} \end{vmatrix}^{(r)},\ r = 1,...,5;\quad B^r = \begin{vmatrix} b_{10}b_{11} \\ b_{40}b_{41} \\ b_{40}b_{41} \end{vmatrix}^{(r)},\ r = 1,...,10.$

Таким образом, система вначале исправна, в момент B^3A^1 впервые отказывает, в момент B^4A^1 восстанавливается и т.д. и в момент B^8 окончательно отказывает. Заметим, что число различных элементов в ЛО A^r равно 4. Поэтому в семействе ЛО $A^1,...,A^5$ есть два равных ЛО (A^r, A^{r+1}), т.е. в НП системы (3.4) какой-то один интервал работоспособности фактически вырожден. Аналогично в семействе ЛО $B^1,...,B^{10}$ есть две пары равных логических определителей (B^p, B^{p+1}) и (B^q, B^{q+1}), так что в НП (3.4) может быть вырождено до двух интервалов работоспособности.

4 Приближенный метод анализа надежности систем

Приближенный метод анализа надежности сложных систем – вариант аналогичного метода для простых систем, отличающийся тем, что в качестве структурной модели системы используется 4-ступенчатая схема, принятая в методе эквивалентных схем (см. [1], § 9). Относительная простота этой схемы делает возможным анализ весьма сложных систем. Для реализации приближенного метода нужно иметь оценки моментов начала a_y и окончания b_y реакций $y(t)$ элементов схемы через аналогичные моменты a_x, b_x в их воздействиях $x(t)$ (см. [4], § 3.8). В 4-ступенчатой схеме имеется 4 типа элементов: задержки, инверторы, n-входовые конъюнкторы, n-

входовые дизъюнкторы (см. [1], § 9). Для первых двух нужные оценки даются формулами из [4], § 3.8. Для n-входовых конъюнктора и дизъюнктора нужные оценки получаются аналогично случаю $n = 2$, который рассмотрен в [4], § 3.8.

5 Практический пример

Найдем НП в сложной системе электроснабжения, состоящей из 3 подсистем: 1) генератор Г1 (его НС обозначим a_1), распределительный щит генератора РЩ1 (его НС a_3), кабель К1 (НС a_5); 2) генератор Г2 (НС a_2), распределительный щит генератора РЩ2 с НС a_4, кабель К2 (его НС a_6); 3) общий распределительный щит РЩ (НС a_7), к которому через РЩ1 и К1 подключен Г1, а через РЩ2 и К2 – Г2; перемычка П (НС a_8), соединяющая РЩ1 с РЩ2. Система работоспособна, если работоспособны все блоки хотя бы одной из подсистем 1 или 2 и блок РЩ, либо если работоспособны все блоки одного из подмножеств (Г1, РЩ1, П, РЩ2, К2, РЩ) или (Г2, РЩ2, П, РЩ1, К1, РЩ). Данная система – автономная однофункциональная логическая. Ее ФР

$$y = a_1 a_3 a_5 a_7 \vee a_1 a_3 a_8 a_4 a_6 a_7 \vee a_2 a_4 a_6 a_7 \vee a_2 a_4 a_8 a_3 a_5 a_7 .$$

Пусть любой i-й блок начинает работу в исправном состоянии и имеет ресурс m_i восстановлений, так что НП в блоках имеют вид:

$$a_i(t) = 0(b_{i0}, -)1(a_{i1}, b_{i1})\ldots 1(a_{im_i}, b_{im_i}), \quad i = 1,\ldots,8 .$$

Для вычисления НП в системе $y(t)$ будем применять метод эквивалентных схем [1]. Сначала по [1], (12.9) вычисляем процессы на выходах конъюнкторов (1-й ступени)

$$y_1(t) = a_1(t) a_3(t) a_5(t) a_7(t) = 0(B_1^1, -)1(B_1^2 A_1^1, B_1^2)\ldots 1(B_1^{M_1+1} A_1^{M_1}, B_1^{M_1+1}) ,$$

где

$$A_1^r = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ a_{31}\ldots a_{3m_3} \\ a_{51}\ldots a_{5m_5} \\ a_{71}\ldots a_{7m_7} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad B_1^r = \begin{vmatrix} b_{10}\ldots b_{1m_1} \\ b_{30}\ldots b_{3m_3} \\ b_{50}\ldots b_{5m_5} \\ b_{70}\ldots b_{7m_7} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad r = 1,\ldots,M_1, \quad M_1 = m_1 + m_3 + m_5 + m_7 ;$$

$$y_2(t) = a_1(t) a_3(t) a_4(t) a_6(t) a_7(t) a_8(t) = 0(B_2^1, -)1(B_2^2 A_2^1, B_2^2)\ldots 1(B_2^{M_2+1} A_2^{M_2}, B_2^{M_2+1}) ,$$

где

$$A_2^r = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1m_1} \\ a_{31}\ldots a_{3m_3} \\ a_{41}\ldots a_{4m_4} \\ a_{61}\ldots a_{6m_6} \\ a_{71}\ldots a_{7m_7} \\ a_{81}\ldots a_{8m_8} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad B_2^r = \begin{vmatrix} b_{10}\ldots b_{1m_1} \\ b_{30}\ldots b_{3m_3} \\ b_{40}\ldots b_{4m_4} \\ b_{60}\ldots b_{6m_6} \\ b_{70}\ldots b_{7m_7} \\ b_{80}\ldots b_{8m_8} \end{vmatrix}^{(r)}, \quad r = 1,\ldots,M_2, \quad M_2 = m_1 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 + m_8 ;$$

$$y_3(t)=a_2(t)a_4(t)a_6(t)a_7(t)=0(B_3^1,-)1(B_3^2A_3^1,B_3^2)\ldots1(B_3^{M_3+1}A_3^{M_3},B_3^{M_3+1}),$$

где

$$A_3^r=\begin{vmatrix}a_{21}\ldots a_{2m_2}\\ a_{41}\ldots a_{4m_4}\\ a_{61}\ldots a_{6m_6}\\ a_{71}\ldots a_{7m_7}\end{vmatrix}^{(r)},\quad B_3^r=\begin{vmatrix}b_{20}\ldots b_{2m_2}\\ b_{40}\ldots b_{4m_4}\\ b_{60}\ldots b_{6m_6}\\ b_{70}\ldots b_{7m_7}\end{vmatrix}^{(r)},\ r=1,\ldots,M_3,\quad M_3=m_2+m_4+m_6+m_7;$$

$$y_4(t)=a_2(t)a_3(t)a_4(t)a_5(t)a_7(t)a_8(t)=0(B_4^1,-)1(B_4^2A_4^1,B_4^2)\ldots1(B_4^{M_4+1}A_4^{M_4},B_4^{M_4+1}),$$

где

$$A_4^r=\begin{vmatrix}a_{21}\ldots a_{2m_2}\\ a_{31}\ldots a_{3m_3}\\ a_{41}\ldots a_{4m_4}\\ a_{51}\ldots a_{5m_5}\\ a_{71}\ldots a_{7m_7}\\ a_{81}\ldots a_{8m_8}\end{vmatrix}^{(r)},\quad B_4^r=\begin{vmatrix}b_{20}\ldots b_{2m_2}\\ b_{30}\ldots b_{3m_3}\\ b_{40}\ldots b_{4m_4}\\ b_{50}\ldots b_{5m_5}\\ b_{70}\ldots b_{7m_7}\\ b_{80}\ldots b_{8m_8}\end{vmatrix}^{(r)},\ r=1,\ldots,M_4,\ M_4=m_2+m_3+m_4+m_5+m_7+m_8.$$

После этого по [1], формула (12.5) вычисляем процесс на выходе дизъюнктора (второй ступени), т.е. искомый надежностный процесс в системе

$$y(t)=y_1(t)\vee y_2(t)\vee y_3(t)\vee y_4(t)=0(B^4A^1,-)1(A^1,B^5A^2)\ldots1(A^{M-1},B^{M+3}A^M)0(-,-)1(A^M,B^{M+4}),$$

где $A^r=\begin{vmatrix}B_1^2A_1^1\ldots B_1^{M_1+1}A_1^{M_1}\\ \hdashline B_4^2A_4^1\ldots B_4^{M_4+1}A_4^{M_4}\end{vmatrix}^{(r)}$, $r=1,\ldots,M$; $B^r=\begin{vmatrix}B_1^1\ldots B_1^{M_1+1}\\ \hdashline B_4^1\ldots B_4^{M_4+1}\end{vmatrix}^{(r)}$, $r=1,\ldots,M+4$, $M=\sum_{i=1}^{4}M_i$.

Полученное аналитическое представление $y(t)$ является избыточным и при численном задании НП в блоках часть его участков оказывается вырождена. Пусть, например, наработка между отказами T, время восстановления $T_в$ и ресурс m_i для блоков i системы такие:

для генераторов $(i=1,2)$ $T=10000$ ч, $T_в=100$ ч, $m_1=m_2=2$;

для щитов $(i=3,4,7)$ $T=20000$ ч, $T_в=20$ ч, $m_3=m_4=m_7=3$;

для кабелей $(i=5,6)$ $T=30000$ ч, $T_в=50$ ч, $m_5=m_6=2$;

для перемычки $(i=8)$ $T=40000$ ч, $T_в=10$ ч, $m_8=3$.

Тогда НП в блоках конкретизируются

$$a_1(t)=a_2(t)=0(10000,-)1(10100,20100)0(-,-)1(20200,30200);a_3(t)=a_4(t)=$$
$$=a_7(t)=0(20000,-)1(20020,40020)0(-,-)1(40040,60040)0(-,-)1(60060,80060),a_5(t)=a_6(t)=$$
$$=0(30000,-)1(30050,60050)0(-,-)1(60100,\ 90100);\ a_8(t)=0(40000,-)1(40010,80010)0(-,-)\cdot$$
$$\cdot1(80020,120020)0(-,-)1(120030,\ 160030),\ M_1=10,\ M_2=16,\ M_3=10,\ M_4=16.$$

По приведенным выше формулам подсчитываем нужные ЛО:

сначала $A_1^r,\ldots,A_4^r,B_1^r,\ldots,B_4^r$, затем A^r и B^r, наконец, конъюнкции $B^{k+3}A^k$.

Подставляя все в выражение НП в $y(t)$, после исключения вырожденных участков найдем

$$y(t)=0(10000,-)1(10100,20000)0(-,-)1(20020,30100)\cdot$$
$$\cdot0(-,-)1(20200,30000)0(-,-)1(30050,30200).$$

Итак, система вначале исправна, в момент $t_1 = 10000$ впервые отказывает, в момент $t_2 = 10100$ восстанавливается, в момент $t_3 = 20000$ снова отказывает и т.д., наконец, в момент $t_5 = 30100$ окончательно отказывает.

Заключение

Содержательно использованная в настоящей работе надежностная модель сложной системы в виде логической зависимости надежностного состояния системы от надежностных состояний ее блоков аналогична рассмотренной ранее модели надежности простых систем. Поэтому она так же структурно воплощается в виде некоторого динамического автомата, входные процессы которого моделируют надежностные процессы в блоках системы, а выходной процесс – надежностный процесс в самой системе. Так что вычисление надежностных процессов в системах сводится к хорошо разработанным в теории автоматов методам вычисления выходных процессов динамических автоматов по их входным процессам. При этом использование математического аппарата логических определителей позволяет преодолеть «проклятие размерности» системы, что дает возможность выполнять вычисления в системах большой сложности. В настоящей, второй части работы с помощью аппарата логических определителей решены задачи построения аналитических формул для вычисления характеристик надежности нескольких классов сложных систем.

Работа в целом продолжает цикл исследований автора, посвященных разработке математического аппарата логической теории надежности. От опубликованных ранее работ автора [2], [3] данная работа существенно отличается использованием аппарата логических определителей.

Список литературы

1. Левин В. И. Логические методы исследования надежности сложных систем. I. Математический аппарат и модели надежности [Текст] / В. И. Левин // Системы управления, связи и безопасности. 2018. – № 3.
2. Левин В. И. Логические методы в теории надежности сложных систем. I [Текст] / В. И. Левин // Вестник Тамбовского университета. – 2011. – Т. 16, № 5. – С. 15–28.
3. Левин В. И. Логические методы в теории надежности сложных систем. II [Текст] / В. И. Левин // Вестник Тамбовского университета. – 2011. – Т. 16, № 6. – С. 25–39.
4. Левин В. И. Логическая теория надежности сложных систем [Текст] / В. И. Левин. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 129 с.
5. Левин В. И. Полиинтервалы и их применение в моделировании систем [Текст] / В. И. Левин // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2016. – № 2(3). – С. 39–47.
6. Левин В. И. Интервальные уравнения и их решение [Текст] / В. И. Левин, Е. А. Немкова // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2017. – № 3(6). – С. 12–21.
7. Левин В. И. Интервальная математика и построение прямых и обратных характеристик преобразователей информации [Текст] / В. И. Левин, Е. А. Немкова // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2018. – № 1(8). – С. 4–12.
8. Левин В. И. Непрерывная логика и ее применение к исследованию систем в условиях неопределенности [Текст] / В. И. Левин // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2018. – № 2(9). – С. 4–32.
9. Левин В. И. Непрерывно-логические методы расчета надежности сложных систем. I. Математические модели надежности [Текст] / В. И. Левин // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2018. – № 3(10). – С. 23–55.

References

1. Levin V. I. Logicheskiye metody issledovaniya nadezhnosti slozhnykh sistem. I. Matematicheskiy apparat i modeli nadezhnosti [Logic methods in the theory of reliability of complex systems. I. Mathematical apparatus and models of reliability]. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti* [Control Systems, Communications and Security], 2018, no. 3.
2. Levin V. I. Logicheskiye metody v teorii nadezhnosti slozhnykh sistem. I [Logic methods in the theory of reliability of complex systems. I]. *Vestnik Tambovskogo universiteta* [Tambov University Bulletin], 2011, T. 16, no. 5, pp. 15–28.
3. Levin V. I. Logicheskiye metody v teorii nadezhnosti slozhnykh sistem. II [Logic methods in the theory of reliability of complex systems. II]. *Vestnik Tambovskogo universiteta* [Tambov University Bulletin], 2011, T. 16, no 6, pp. 25–39.
4. Levin V. I. *Logicheskaya teoriya nadezhnosti slozhnykh sistem* [Logic methods in the theory of reliability of complex systems], M., Energoatomizdat, 1985, 129 s.
5. Levin V. I. Poliintervaly i ikh primeneniye v modelirovanii sistem [Polyintervals, and their use in system modeling]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of artificial intelligence], Donetsk, GU IPII, 2016, no. 2(3), pp. 39–47.
6. Levin V. I., Nemkova Ye. A. Interval'nyye uravneniya i ikh resheniye [Interval equations and their solution. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of artificial intelligence], Donetsk, GU IPII, 2017, no. 3(6), pp. 12–21.
7. Levin V. I., Nemkova Ye. A. Interval'naya matematika i postroyeniye pryamykh i obratnykh kharakteristik preobrazovateley informatsii [Interval mathematics and the construction of direct and inverse characteristics of information converters]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of artificial intelligence], Donetsk, GU IPII, 2018, no. 1(8), pp. 4–12.
8. Levin V. I. Nepreryvnaya logika i yeye primeneniye k issledovaniyu sistem v usloviyakh neopredelennosti [Continuous logic and its application to the study of systems in conditions of uncertainty]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of artificial intelligence], Donetsk, GU IPII, 2018, no. 2(9), pp. 4–32.
9. Levin V. I. Nepreryvno-logicheskiye metody rascheta nadezhnosti slozhnykh sistem. I. Matematicheskiye modeli nadezhnosti [Continuous-logical methods for calculating the reliability of complex systems. I. Mathematical models of reliability]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of artificial intelligence], Donetsk, GU IPII,2018, no. 3(10), pp. 23–55.

RESUME

V.I. Levin

Continuous-logical methods of calculating of reliability of complex systems.
II. Calculation of some classes of systems

Background. In recent years the increasing attention of scientists and designers of technical systems has been acquiring the issues of improving methods for assessing the reliability and safety of these systems, in connection with tasks of increasing the values of these characteristics. The purpose of the article is to develop an automata-logical model of reliability of complex technical systems and corresponding logical methods for evaluating the reliability of such systems, which, unlike known ones, use not the traditional probabilistic reliability indicators, but deterministic logical indicators.

Materials and methods. In order to achieve this goal, the article suggests using the observed moments of successive failures and recovery of the elements of the technical system as initial data, and as the reliability characteristics of the system itself the moments of successive failures and recovery of this system. In this case, the problem of estimating the reliability of a system is reduced to constructing its mathematical model in the form of automata logical functions expressing the moments of its successive failures and reconstructions through analogous moments of all its elements. This article is the second part of the work in which an automata-logical model designed to calculate the logical function of reliability of complex technical systems is developed in detail.

Results. The novelty of the work is the construction of an adequate logical model of the reliability of a complex system, which makes it possible to reduce the estimation of reliability of a complex technical system to the calculation of its logical reliability functions. In the process of calculation, the mathematical apparatus of logical determinants is used for the first time, which allows us to solve the complexity problem.

Conclusion. In the article the logical model of reliability and methods of its investigation are developed in detail, allowing to introduce new indicators of reliability of complex technical systems that do not require for their evaluation the use of probabilistic methods and initial statistical data on element failures. On the basis of the developed logical model of reliability and methods of its investigation, the problem of constructing an automata system for reliability of systems is solved, which will allow to fulfill practical calculations of complex technical systems by methods of the theory of dynamic automata using the apparatus of logical determinants.

РЕЗЮМЕ

В.И. Левин

Непрерывно-логические методы расчета надежности сложных систем. II. Расчет некоторых классов систем

История вопроса. В последние годы все большее внимание ученых и проектировщиков технических систем приобретают вопросы совершенствования методов оценки надежности и безопасности этих систем, в связи с задачами повышения значений данных характеристик. Цель статьи заключается в разработке автоматно-логической модели надежности сложных технических систем и соответствующих логических методов оценки надежности таких систем, которые в отличие от известных используют не традиционные вероятностные показатели надежности, а детерминированные логические показатели.

Материалы и методы. Для достижения поставленной цели в статье предложено использовать в качестве исходных данных наблюдаемые моменты последовательных отказов и восстановлений элементов технической системы, а в качестве характеристик надежности самой системы – моменты последовательных отказов и восстановлений этой системы. В этом случае задача оценки надежности системы сводится к построению ее математической модели в виде автоматных логических функций, выражающих моменты ее последовательных отказов и восстановлений через аналогичные моменты всех ее элементов. Данная статья представляет собой вторую часть работы, в которой детально разрабатывается автоматно-логическая модель, предназначенная для вычисления логической функции надежности сложных технических систем.

Результаты. Результат работы заключается в построении адекватной логической модели надежности сложной системы, позволяющей свести оценку надежности сложной технической системы к вычислению ее логических функций надежности. В процессе вычислений впервые используется математический аппарат логических определителей, что и позволяет решить проблему сложности.

Заключение. В статье детально разработаны логическая модель надежности и методы ее исследования, позволяющие вводить новые показатели надежности сложных технических систем, не требующие для своей оценки использования вероятностных методов и исходных статистических данных об отказах элементов. На основе разработанной логической модели надежности и методах ее исследования решена задача построения автоматной модели надежности систем, которая позволит вести практические расчеты сложных технических систем методами теории динамических автоматов с помощью аппарата логических определителей.

Статья поступила в редакцию 05.07.2018.