A

УДК 519.21

О. В. Александрова
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры (ДонНАСА), г. Макеевка
Донецкая обл., г. Макеевка-23, ул. Державина, 2

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ И ЭРГОДИЧНОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

O. V. Aleksandrova
Donbas National Academy of Engineering and Architecture (DonNASA), Makeevka
Donetsk area, Makeevka-23 of, st. Derzhavina, 2

GROUP ANALYSIS AND ERGODICITY OF STOCHASTIC PROCESSES

О. В. Александрова
Донбаська національна академія будівництва і архітектури (ДонНАСА), м. Макіївка
Донецька обл., м. Макіївка-23, вул. Державіна, 2

ГРУПОВИЙ АНАЛІЗ І ЕРГОДИЧНІСТЬ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

В статье рассматривается применение методов группового анализа стохастических дифференциальных уравнений Ито. Показано, что методы группового анализа стохастических дифференциальных уравнений Ито позволяют строить инвариантные вероятностные меры процессов, которые не обладают стационарными распределениями или приводить их к таковым.
Ключевые слова: случайный процесс, групповой анализ, симметрии, инвариантная мера.

In the paper the application of group analysis methods for stochastic differential Ito equations is considered. It is shown that the methods of group analysis of stochastic differential Ito equations make it possible to construct invariant probability measures of processes that do not have stationary distributions. Or lead to such for that one an invariant measure exists for it.
Keywords: stochastic process, group analysis, symmetry, invariant measure.

У статті розглядається застосування методів групового аналізу стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Показано, що методи групового аналізу стохастичних диференціальних рівнянь Іто дозволяють будувати інваріантні імовірнісні міри процесів, які не володіють стаціонарними розподілами, або приводити їх до таких.
Ключові слова: випадковий процес, груповий аналіз, симетрії, інваріантна міра.

Введение

В современном мире решение многих фундаментальных проблем требует построения и решения математических моделей исследуемых процессов [1]. Во многих случаях математическая модель процесса – это некоторые определенные дифференциальные уравнения, решения которых позволяют с некоторой точностью описать этот процесс. Некоторому приближению реального процесса соответствует нелинейная математическая модель, для решения которой исследователи имеют довольно ограниченный математический аппарат. Эта ситуация существенно меняется, если нелинейное дифференциальное уравнение, соответствующее некоторой модели, имеет нетривиальные симметрийные свойства. На сегодняшний день изучены симметрийные свойства многих известных обыкновенных дифференциальных уравнений: таких, как уравнения механики, газовой динамики, квантовой физики [1]. Методы симметрийного анализа были разработаны С. Ли и Л. В. Овсянниковым еще в прошлом веке и являются традиционными методами исследования дифференциальных уравнений. Применение этих методов позволяет вычислять интегрирующий множитель, исследовать свойства решений дифференциальных уравнений, строить инвариантные множества, вычислять первые интегралы, классифицировать уравнения по их общим симметрийным свойствам.

Оксендаль [2] представляет вышеупомянутые модели как стохастические дифференциальные уравнения, их решения, в свою очередь, являются Марковскими процессами (при определенных условиях). В связи с этим основная идея нашего исследования основана на том факте, что Марковский процесс является процессом без последействия. Если мы знаем характеристики процесса до определенного момента времени, мы можем с определенной степенью вероятности прогнозировать характеристики этого процесса в будущем. Поскольку стохастические модели включают в себя определенные параметры, такая комбинация этих параметров может быть выбрана так, что решение стохастического дифференциального уравнения (далее – СДУ) является стационарным или со временем будет стационарным, то есть эргодическим процессом [3].

Одним из существенных отличий таких уравнений является то, что их решения не имеют производных в классическом смысле. Таким образом, теория Ли – Овсянникова не может быть непосредственно применена к изучению симметрийных свойств СДУ Ито. Это делает актуальной задачу расширения теории Ли – Овсянникова на СДУ Ито.

Пионерами в разработке теории группового анализа СДУ являются Ю. Л. Далецкий и Я. И. Белопольская. Они ввели понятие инвариантности СДУ Ито относительно однопараметрической группы преобразований фазовой переменной и доказали критерий инвариантности СДУ относительно таких преобразований [4, с. 265]. Однако, в рамках такого определения допускаются только преобразования фазовой переменной и такие преобразования должны быть неслучайными функциями, не зависящими от времени. Переменная времени при этом не преобразовывается.

Вводя понятие инвариантности СДУ, авторы монографии [4] предполагают, что эти преобразования действуют только на фазовую переменную и изменяют только начальное состояние процесса. В нашем подходе предполагается, что преобразования группы действуют как на фазовую переменную, так и на переменную времени. При этом винеровский процесс не обязан сохраняться, а может быть преобразован в некоторый диффузионный процесс. В 2002 году С. А. Мельником в статье [5] было дано определение однопараметрической локальной группы преобразований для уравнения (1), но при этом не учитывалась зависимость координат инфинитезимального оператора допустимой группы от винеровского процесса, входящего в уравнение. В 2004 году итальянскими учеными Р. Квинтерро и Д. Гайета [6–8] также было дано определение локальной однопараметрической группы для СДУ (1), и был доказан соответствующий критерий инвариантности уравнения относительно допустимой группы, но при этом не рассматривалось преобразование винеровского процесса, входящего в уравнение. Это сужало класс допустимых групп для СДУ до групп сдвигов и растяжений. В нашей работе обобщено определение однопараметрической локальной группы преобразований для СДУ, данное С. А. Мельником, Д. Гайета и Р. Квинтерро. Это позволило расширить класс допустимых групп для СДУ. Также определение инвариантности СДУ (1) относительно допустимой группы позволило доказать критерий инвариантности, который представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных, где искомыми являются координаты оператора допустимой группы, т.е. систему определяющих уравнений. Этот критерий позволяет строить основную группу, допускаемую уравнением (1). Также при помощи доказанного критерия может быть найден класс уравнений, инвариантных относительно заданной группы.

Постановка задачи

В статье исследуется возможность построения инвариантной меры для случайных процессов, которые не обладают стационарными распределениями.

Для этого приводится понятие симметрии систем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито, рассматриваемых на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P):

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(h, u(h))dh + \int_0^t B(h, u(h))dW(h). \tag{1}$$

В уравнении (1) $\{W(t), t \in [0,T]\}$ – d-мерный винеровский процесс относительно фильтрации $\{F_t, t \in [0,T]\}$, $W^{(i)}(t)$ – независимые винеровские процессы, u_0 – F_0 – измеримый случайный вектор, $A:[0,T] \times R^n \to R^n$, $B:[0,T] \times R^n \to R^n \times R^d$ – измеримые неслучайные функции. Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения, сформулированной в работе [9, с. 109].

В статье [10] определено понятие допустимой группы для СДУ (1), координаты касательного вектора которой зависят от значений винеровского процесса, входящего в уравнение.

Рассматриваются обратимые преобразования переменной времени в интервале $t \in [0,T]$, зависящие от одного вещественного параметра a:

$$s = f(t, a), \tag{2}$$

где $s \in [s_0, s_T]$, $a \in \Delta \subseteq R$, – групповой параметр, Δ – симметричный около нуля интервал, $s_0 = f(0,a)$, $s_T = f(T,a)$.

Функция $f(t,a)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t,0) = t$, $\forall t \in [0,T]$;

2) $f\left(f(t,a),b\right)=f(t,a+b)$, $\forall t\in[0,T]$, $\forall a\in\Delta$, $\forall b\in\Delta$,

таких, что $(a+b)\in\Delta$;

3) $f\in C^2([0,T]\times\Delta)$, $f_t>0$, $\forall t\in[0,T]$, $\forall a\in\Delta$.

Обратное преобразование получается изменением знака параметра a, т.е. $f^{-1}(s,a)=f\left(f(t,a),-a\right)=t=f(s,-a)$.

Произведём в уравнении (1) замену переменной времени по формуле $t=f(s,-a)$. Получим:

$$\tilde{u}(s)=u_0+\int_{s_0}^{s}A\left(f(r,-a),\tilde{u}(r)\right)f_r(r,-a)\,dr+\int_{s_0}^{s}B\left(f(r,-a),\tilde{u}(r)\right)\sqrt{f_r(r,-a)}\,dw(r). \quad (3)$$

В полученном уравнении (3) $w(s)$ – это новый винеровский процесс, определенный на том же самом вероятностном пространстве, что и исходный винеровский процесс $W(t)$, входящий в уравнение (1), $s=f(t,a)$, $t\in[0,T]$, $a\in\Delta$.

Лемма, которая устанавливает взаимосвязь винеровских процессов, входящих в уравнения (1) и (3):

Лемма 1. *Пусть $W(t)$ стандартный винеровский процесс, $s=f(t,a)$ локальная однопараметрическая группа преобразований, где функция $f(t,a)$ удовлетворяет условиям (1-3), $f_s(s,-a)>0$ для всех допустимых s,a. Тогда существует винеровский процесс $w(s)$, определенный на том же самом вероятностном пространстве, что и $W(t)$, такой, что при всех допустимых t,s,a с вероятностью 1 справедливы равенства:*

$$W\left(f(s,-a)\right)=\int_{s_0}^{s}\sqrt{f_h(h,-a)}\,dw(h), \quad (4)$$

$$w\left(f(t,a)\right)=\int_{0}^{t}\sqrt{f_h(h,a)}\,dW(h). \quad (5)$$

Следствие 1. *Если $s_0=f(0,a)$, то $P\{w(s_0)=0\}=1$.*

Далее рассматриваются преобразования фазовой переменной u:

$$v=g(t,W(t),u,a). \quad (6)$$

Здесь $a\in\Delta\subseteq R$ – групповой параметр, Δ – симметричный около нуля интервал.

Функция g удовлетворяет условиям:

1a) $g(t,W(t),u,0)=u$;

2a) $g\left(f(t,a),w\left(f(t,a)\right),g(t,W(t),u,a),b\right)=g(t,W(t),u,a+b)$ с вероятностью 1 для любых $t\in[0,T]$, $u\in R^n$, $a\in\Delta$, $b\in\Delta$, таких, что $(a+b)\in\Delta$, $W(t)$ и $w(s)$ связаны преобразованием времени по формулам (4) – (5);

3a) $g\in C^2\left([0,T]\times R^d\times R^n\times\Delta\right)$.

4a) матрица первых производных функции g по переменной u невырожденная.

Преобразования f и g, определенные формулами (2) и (6) порождают группу G.

Определение допустимой группы для СДУ Ито (1).

Определение 1. *Уравнение (1) называется инвариантным относительно группы G (или допускает группу G), если процесс*

$$v(s)=g\left(f(s,-a),W\left(f(s,-a)\right),u\left(f(s,-a)\right),a\right)$$

является решением уравнения:

$$v(s)=g\left(0,0,u_0,a\right)+\int_{s_0}^{s}A(h,v(h))dh+\int_{s_0}^{s}B(h,v(h))dw(h),$$

где $u(t)$ – решение уравнения (1).

Замечание 1. Определение 1 нужно понимать следующим образом: под действием групповых преобразований вида (2), (6) СДУ Ито (1) преобразуется в СДУ Ито с такими же коэффициентами сноса и диффузии, но с другим винеровским процессом, который связан со старым винеровским процессом, входящим в уравнение (1) формулами (4) – (5). При этом также изменяется начальное условие.

Каждая допустимая группа однозначно определяется своим касательным векторным полем. Касательное векторное поле группы G можно также определить в виде дифференциального оператора первого порядка, который также называют инфинитезимальным оператором группы.

Определение 2. *Линейный дифференциальный оператор вида*

$$X=\xi(t)\partial_t+\sum_{i=1}^{n}\eta^{(i)}\left(t,W(t),u\right)\partial_{u_i} \tag{7}$$

будем называть инфинитезимальным оператором допустимой группы G для уравнения (1).

По координатам оператора (7) строятся уравнения Ли:

$$\frac{\partial f(t,a)}{\partial a}=\xi\left(f(t,a)\right),\;\; f(t,0)=t\,; \tag{8}$$

$$\frac{\partial g^{(i)}\left(t,W(t),u,a\right)}{\partial a}=\eta^{(i)}\left(f(t,a),w\left(f(t,a)\right),g\left(t,W(t),u,a\right)\right),\;\eta^{(i)}\left(t,W(t),u,0\right)=u_i\,, \tag{9}$$

$i=1,\dots n$.

Равенства (9) выполнены с вероятностью 1 для винеровских процессов $W(t)$ и $w(s)$, связанных преобразованием времени по формулам (4) – (5), $\forall u\in R^n$, $\forall t\in[0,T]$, $\forall a\in\Delta\subseteq R$, где Δ – некоторый симметричный около нуля интервал.

В статье [10] доказан критерий инвариантности СДУ (1), который представляет собой систему линейных уравнений в частных производных. Эти уравнения позволяют вычислять допустимую группу для СДУ (1), и, кроме того, получать класс уравнений, инвариантных относительно заданной группы преобразований. Такие уравнения называются определяющими уравнениями для вычисления допустимой группы G. Был получен следующий результат:

Теорема 1. *Система уравнений (1) инвариантна относительно группы преобразований с инфинитезимальным оператором (7) тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнения и координаты оператора удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\xi_t \cdot B - \eta_u \cdot B + \xi \cdot B_t + B_u \cdot \eta - \eta_W = 0, \\ -\eta_t + \xi_t \cdot A - \eta_u \cdot A + \xi \cdot A_t + A_u \cdot \eta - \\ -\frac{1}{2}Sp\left(\eta_{uu} \cdot B \cdot B^*\right) - Sp\left(\eta_{uW} \cdot B\right) - \frac{1}{2}Sp\left(\eta_{WW}\right) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Основные результаты

Пусть $W(t)$ – винеровский процесс. Для него плотность вероятности перехода известна:

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right).$$

Так как корреляционная функция винеровского процесса имеет вид:

$$Rw(t,s) = \min(t,s),$$

то он является стационарным в широком, а следовательно, и в узком смысле. Так как

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) = 0$$

при любых x и y, то предел существует, но не является плотностью распределения какой-либо случайной величины. Таким образом, стационарного распределения для винеровского процесса не существует. Согласно задаче 1 [11, с.176], для семейства винеровских процессов инвариантная мера существует – это мера Лебега на прямой, но она не является инвариантной вероятностной мерой. Покажем, как при помощи методов группового анализа СДУ построить инвариантную меру винеровского процесса.

Пример 1. Рассмотрим уравнение, задающее винеровский процесс:

$$du(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t). \tag{11}$$

Подставим коэффициенты уравнение (11) в систему определяющих уравнений (10) и найдем коэффициенты касательного вектора допустимой группы:

$$\eta(t,W(t),u) = c_1 \cdot (u - W(t)) + \frac{1}{2}\int_0^t \xi_s dW(s) + I((u - W(t))),$$

где ξ, I – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, c_1 – константа. Положим $c_1 = \frac{1}{2}$, $I = 0$, $\xi(t) = t$. Тогда $\eta = \frac{1}{2}u$. В этом случае инвариант рассматриваемой группы имеет вид $J = \frac{W(t)}{\sqrt{t}}$. Найдем канонические переменные из условий (1.14) [11, с.5]: $t = e^s$, $u = e^{\frac{s}{2}} \cdot v$. Отсюда получаем: $v(s) = e^{-\frac{s}{2}} \cdot W\left(e^s\right)$.

Это известный Марковский стационарный процесс, называемый процессом Орнштейна-Уленбека [2, с.101].

Он является решением СДУ:

$$dv(s) = -\frac{v(s)}{2}dt + dw(s), \qquad (12)$$

где $w(s)$ – новый винеровский процесс. Так как коэффициенты уравнения (12) не зависят от s, то полученный процесс однороден. Для полученного СДУ прямое уравнение Колмогорова (или уравнение Фоккера – Планка) имеет вид:

$$p_s - \frac{1}{2}p_{yy} - \frac{1}{2}\left(yp_y\right)_y = 0, \quad p(0,x,y) = \delta(x-y). \qquad (13)$$

Проверка показывает, что функция

$$p(s,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-s}\right)}}\exp\left(-\frac{\left(y - xe^{-\frac{s}{2}}\right)^2}{2\left(1-e^{-s}\right)}\right)$$

при $s > 0$ является фундаментальным уравнением Фоккера – Планка (13). Эта функция положительна и является плотностью распределения нормального закона $N\left(xe^{-\frac{s}{2}}, 1-e^{-s}\right)$. Так как $\lim\limits_{s\to\infty} p(s,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$, то, согласно [11, с. 5], процесс $v(s) = e^{-\frac{s}{2}}\cdot W\left(e^s\right)$, в отличие от $u(t) = W(t)$, обладает инвариантной вероятностной мерой:

$$\mu(\Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\Gamma} e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Эта мера является стандартной гауссовской мерой, которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на прямой и ее плотность относительно меры Лебега равна

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}. \qquad (14)$$

Утверждение. Мера (14) является инвариантной.

Доказательство.

Действительно, $\mu_t(\Gamma)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-t}\right)}}\exp\left(-\frac{\left(y-xe^{-\frac{t}{2}}\right)^2}{2\left(1-e^{-t}\right)}\right)dy=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-t}\right)}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(y-xe^{-\frac{t}{2}}\right)^2}{2\left(1-e^{-t}\right)}\right)dx\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\Gamma}e^{-\frac{y^2}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1-e^{-t}\right)}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(y-xe^{-\frac{t}{2}}\right)^2}{2\left(1-e^{-t}\right)}\right)dx\right)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\Gamma}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Пример 2. Рассмотрим далее систему СДУ Лотки – Вольтера:

$$du_i(t)=\left(u_i-\sum_{j=1}^{2}a_{ij}u_iu_j\right)dt+b_iu_i^{3/2}dW_i(t)\,, \tag{15}$$

$$i=1{,}2\,,\ u_0=u(0)>0\,.$$

Согласно [9], решение уравнения (15) существует и единственно.

Подставим коэффициенты системы (15) в систему (10) и проинтегрируем ее. Найдем координаты касательного вектора группы, допускаемой системой (15):

$$\xi(t)=-c_1e^{-t}+c_2\,,\ \eta_i(t,W(t),u)=-c_iu_ie^{-t}\,,\ i=1{,}2\,.$$

Инварианты [12] полученной группы: $I_i=u_i\left(c_2-c_1e^{-t}\right),\ i=1{,}2$. Рассмотрим процессы: $v_i(t)=u_i\left(c_2-c_1e^{-t}\right),\ i=1{,}2$. Подставим начальные условия: $v_i(0)=u_{0i}$, тогда $v_i(t)=u_ie^{-t}$, $i=1{,}2$. Процессы $v_i(t)$ удовлетворяют системе:

$$dv_i(t)=u_{0i}+e^{s}\left(\sum_{j=1}^{2}a_{ij}u_iu_j\right)dt+b_ie^{s/2}u_i^{3/2}dW_i(t)\,,\ i=1{,}2\,.$$

Положив $\mathrm{r}=e^{\mathrm{t}}$ и обозначив $V(r)=v(\ln r)$, мы получим:

$$dV_i(r)=u_{0i}+\sum_{j=1}^{2}a_{ij}V_iV_jdt+b_iV_i^{3/2}dw_i(r)\,,\ i=1{,}2\,,$$

где $W(\ln r)=\int\limits_1^r\frac{dw(h)}{\sqrt{h}}$. Для процесса $V(r)$ выполнены условия [3, с. 200]. Таким образом, полученный процесс является эргодическим.

Теорема 2. Если система уравнений (1) инвариантна относительно группы растяжений с касательным вектором $(t;\ \ k_1 t\ \ \ k_2 t)$, то общая форма ее коэффициентов имеет вид:

$$A_i(t,u_1,u_2)=A_i\left(\frac{u_1}{t^{k_1}},\frac{u_2}{t^{k_2}}\right)t^{k_i-1},\quad B_i(t,u_1,u_2)=B_i\left(\frac{u_1}{t^{k_1}},\frac{u_2}{t^{k_2}}\right)t^{k_i-1/2}. \quad (16)$$

Доказательство.

Подставим коэффициенты (16) системы и координаты касательного вектора группы в систему (10):

$$\begin{cases}(1-k_i)A_i+t(A_i)_t+\sum\limits_{i=1}^{2}k_i u_i(A_i)_{u_i}=0,\\ \left(\dfrac{1}{2}-k_i\right)B_{ij}+t(B_{ij})_t+\sum\limits_{i=1}^{2}k_i u_i(B_{ij})_{u_i}=0.\end{cases} \quad (17)$$

Первые интегралы первого уравнения (17): $I_1=t^{-k_1}u_1$, $I_2=t^{-k_2}u_2$, $I_3=t^{k_1-1}A_1$, $I_4=t^{k_2-1}A_2$ – это инварианты группы растяжений. Инфинитезимальный оператор этой группы:

$$X=t\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}k_i u_i\frac{\partial}{\partial u_i}+\sum_{i=1}^{2}(k_i-1)A_i\frac{\partial}{\partial A_i},$$

его первое продолжение:

$$\underset{1}{X}=X+\left(\sum_{i=1}^{2}(k_i-2)\frac{\partial}{(\partial A_i)_t}-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{(\partial A_i)_{u_j}}\right).$$

Оператор $\underset{1}{X}$ действует на многообразии

$$D=t\sum_{i=1}^{2}(A_i)_t+\sum_{i=1}^{2}k_i u_i(A_i)_{u_i}+\sum_{i=1}^{2}(1-k_i)A_i,\quad \underset{1}{X}(D)\Big|_{D=0}=0.$$

Согласно [15, с. 65], первое уравнение системы (17) инвариантно относительно группы с касательным вектором $(t,k_1u_1,k_2u_2,-(1-k_1)A_1,-(1-k_2)A_2)$. Тогда, согласно [15, с. 38], существуют функции $A(x)$, такие, что $A_i(t,u_1,u_2)=A_i\left(\frac{u_1}{t^{k_1}},\frac{u_2}{t^{k_2}}\right)t^{k_i-1}$.

Аналогично доказывается, что $B_i(t,u_1,u_2)=B_i\left(\frac{u_1}{t^{k_1}},\frac{u_2}{t^{k_2}}\right)t^{k_i-1/2}$.

Теорема 2 доказана. Теорема 2 может быть использована для определения предельного поведения решений системы (1).

Теорема 3. Если коэффициенты уравнения

$$\begin{aligned}du_i(t)&=\left(1+\frac{t}{T}\right)^{k_i-1}A_i\left(\left(1+\frac{t}{T}\right)^{-k_1}u_1;\left(1+\frac{t}{T}\right)^{-k_2}u_2\right)dt+\\&+\left(1+\frac{t}{T}\right)^{k_i-1/2}B_i\left(\left(1+\frac{t}{T}\right)^{-k_1}u_1;\left(1+\frac{t}{T}\right)^{-k_2}u_2\right)dW_i(t),\end{aligned} \quad (18)$$

$i=1{,}2$, $t\in[0,+\infty)$, $u(0)=u_0$, $T>0$

удовлетворяют условиям:

1) $\forall x, y \in R^2 \quad 2xA(x) + |B(x)|^2 \le 0, \quad 2(x-y)(A(x)-A(y)) + |B(x)-B(y)|^2 \le 0,$

2) $\int\limits_{r_0}^{\infty} \exp\left(-\int\limits_{r_0}^{\rho} \overline{C}(s)ds\right) = +\infty$, где $\overline{C}(\rho) = \rho \max \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2}(a_{ii}(x) + b_i(x)x_i)}{\sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)x_i x_j} - \dfrac{1}{\rho},$

то процесс $V\left(\ln\left(1+\dfrac{t}{T}\right)\right) = \left(1+\dfrac{t}{T}\right)^{-k} u(t)$ является эргодическим процессом.

Доказательство. После замены $s = 1 + \dfrac{t}{T}$ уравнение (18) преобразовывается в уравнение, инвариантное относительно группы растяжений, согласно теореме 2. Затем делается замена переменных, аналогично, как в примере 2 и для решения полученного уравнения проверяются условия теоремы. Теорема 3 доказана.

Таким образом, методы группового анализа позволяют находить инвариантные меры для процессов, которые не обладают стационарными распределениями.

Выводы

В данной статье приведены основные понятия методов группового анализа стохастических дифференциальных уравнений Ито, ранее доказанные автором статьи. На примере винеровского процесса было показано, что методы группового анализа стохастических дифференциальных уравнений позволяют строить инвариантные меры для процессов, которые не обладают стационарными распределениями. Также рассмотрена система нелинейных СДУ Ито, решение которой не обладает инвариантной мерой. Для рассмотренной системы заменой переменных, найденной методами группового анализа, была получена система СДУ, решение которой уже является эргодическим процессом, а следовательно, обладает инвариантной мерой. Доказаны соответствующие теоремы.

Список литературы

1. Лагно В. И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа [Текст] / В. И. Лагно, С. В. Спичак, В. И. Стогний. – Москва – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 392 с.
2. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения: введение в теорию и приложения [Текст] / Б. Оксендаль. – М. : Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003. – 408 с.
3. Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений [Текст] /Р. З. Хасьминский // Теория вероятностей и ее применения. – 1960. – № 5 (2). – С. 196–213.
4. Далецкий Ю. Л. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия [Текст] / Ю. Л. Далецкий, Я. И. Белопольская. – К. : Вища школа, 1989. – 395 с.
5. Melnik S. A. The group analysis of the stochastic differential equation [Текст] / Melnik S. A. // J. Annals Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. – 2002. – V. 21. – P. 7–12.
6. Gaeta G. Lie point symmetries and stochastic differential equations [Текст] / G. Gaeta, N. Rodriguez Quinterro // J. Phys. Math. Gen. – 1999. – V. 32. – P. 8485–8505.
7. Gaeta G. Lie point symmetries and stochastic differential equations II [Текст] /G. Gaeta // J. Phys. Math. Gen. – 2000. – V. 33 – P. 4883–4902.
8. Gaeta G. Symmetry of Stochastic Equations [Текст] / G. Gaeta // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – V. 50, Part 1. – P. 98–109.

9. Крылов Н.Б. О стохастических эволюционных процессах [Текст] / Н. Б. Крылов, Б. Л. Розовский. – М.: ВИНИТИ, Результаты науки и инженерии, современные проблемы математики. – 1979. – Т. 14. – С. 72–147.
10. Александрова О. В. Симметрия и первые интегралы систем стохастических дифференциальных уравнений Ито [Текст] / О. В. Александрова // Вестник НовГУ им. Ярослава Мудрого – Сер. : Физ.-мат. науки, Великий Новгород, 2013. – № 75, Т. 1. – С. 54–60.
11. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов [Текст] /А. Д. Вентцель. – М.: Наука. – 1975. – 400 с.
12. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа [Текст] / Н.Х. Ибрагимов. – М. : Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989. – № 9. – 45 с.
13. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений [Текст] / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

References

1. Lagno V.I., Spichak S. V., Stognij V.I. *Symmerijnij analiz uravnenij evolutsionnogo tipa* [Symmetry analysis of the evolution equation type], Moscow - Izhevsk: Institute of Computer Research, 2004, 392 p.
2. Oksendal B. Oksendal' B. *Stoxasticheskie differencial'nye uravneniya: vvedenie v teoriyu i prilozheniya* [Stochastic Differential Equations: An introduction to the theory and applications], Moscow, Mir, 2003, 408 p.
3. Has'minskij R.Z. Ergodicheskie svojstva vozvratnich diffuzionnich processov i stabilizatsia reshenij zadachi Koshi dlja parabolicheskich uravnenij [The ergodic property returnable difussion processes and stabilization to decisions of Cochi problem for the parabolic equations]. *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya* [Theory of robabilities and their Applications], 1960, no. 5(2), pp. 196-213.
4. Daletskiy L., Belopol'skaya Ya. I. *Stoxasticheskie uravneniya i differencial'naya geometriya* [Stochastic equations and differential geometry], K, Higher School, 1989, 395 p.
5. Melnik S. A. The group analysis of the stochastic differential equation. J. *Annals Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp*, 2002, V. 21, pp. 7-12.
6. Gaeta G. Lie point symmetries and stochastic differential equations. *J. Phys. Math. Gen*, 1999, V. 32, pp. 8485–8505.
7. Gaeta G. Lie point symmetries and stochastic differential equations II. J. *Phys. Math. Gen.*, 2000, V. 33, pp. 4883-4902.
8. Gaeta G. Symmetry of Stochastic Equations. Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2004, V. 50, Part 1. pp. 98–109.
9. Krylov N. B., Rozovskiy B.L. *O stoxasticheskix e'volyucionnyx processax* [On stochastic evolutionary processes]. Moscow: VINITI, results of science and engineering, advanced math.problems, 1979, vol.14, pp.72–147.
10. Aleksandrova O. V. Simmetriya i pervye integraly sistem stoxasticheskix differencial'nyx uravnenij Ito [Symmetry and first integrals for systems of stochastic differential equations by Ito]. *Vestnik NovGU im. Yaroslava Mudrogo*. Ser.: Fizikomatematicheskie nauki [Journal NovSU by Yaroslav Mudriy. Ser.: Physics and mathematics], 2013, vol.75, no. 1, pp. 54–60.
11. Ventzel A.D. Kurs teorii sluchainyx processax [Course of the theory of random processes], Moscow, Science, 1975, 400 p.
12. Ibragimov N. H. *Opyt gruppovogo analisa* [Experience of group analysis], M ., Knowledge: New in life, science and technology, 1989, no. 9, 45 p.
13. Ovsyannikov L. V. *Gruppovoj analiz differentsial'nyx uravnenij* [Group analysis of differential equations], M., Nauka, 1978, 400 p.

RESUME

O. V. Aleksandrova
Group Analysis and Ergodicity of Stochastic Processes

Background: the basic idea of our study is based on the fact, that the Markov process is a process without aftereffect. If we know the characteristics of the process up to a certain point in time, we can, with a certain degree of probability, predict the characteristics of this process in future.

As stochastic models include certain parameters, such combination of these parameters can be chosen that the solution of stochastic differential equation is stationary or over time will be stationary – that is, ergodic process.

Materials and methods: the article uses the methods of group analysis of stochastic differential equations.

Results: a method is proposed for reducing an unsteady random process to an ergodic process.

Conclusion: article presents the basic concepts of group analysis methods of Ito stochastic differential equations, previously proved by the author of the article. Using the example of the Wiener process, it was shown that the methods of group analysis of stochastic differential equations allow us to construct invariant measures for processes that do not have stationary distributions. Also considered is a system of nonlinear SDE Ito, the solution of which does not possess an invariant measure. For the considered system, replacing the variables found by the methods of group analysis, a CDS system was obtained, whose solution is already an ergodic process and, therefore, has an invariant measure. The corresponding theorems are proved.

РЕЗЮМЕ

О. В. Александрова

Групповой анализ и эргодичность стохастических процессов

История вопроса, исходные данные: основная идея нашего исследования основана на том факте, что Марковский процесс является процессом без последействия. Если мы знаем характеристики процесса до определенного момента времени, мы можем с определенной степенью вероятности прогнозировать характеристики этого процесса в будущем. Поскольку стохастические модели включают в себя определенные параметры, такая комбинация этих параметров может быть выбрана так, что решение стохастического дифференциального уравнения является стационарным или со временем будет стационарным, то есть эргодическим процессом.

Материалы и методы: в статье использованы методы группового анализа стохастических дифференциальных уравнений.

Результаты: предложен способ приведения нестационарного случайного процесса к эргодическому процессу.

Заключение: в данной статье приведены основные понятия методов группового анализа стохастических дифференциальных уравнений Ито, ранее доказанные автором статьи. На примере винеровского процесса было показано, что методы группового анализа стохастических дифференциальных уравнений позволяют строить инвариантные меры для процессов, которые не обладают стационарными распределениями. Также рассмотрена система нелинейных СДУ Ито, решение которой не обладает инвариантной мерой. Для рассмотренной системы заменой переменных, найденной методами группового анализа, была получена система СДУ, решение которой уже является эргодическим процессом, а следовательно, обладает инвариантной мерой. Доказаны соответствующие теоремы.

Статья поступила в редакцию 16.10.2018.