УДК 622.734.001.57

В. Ю. Пшекоп
Государственное учреждение «Институт проблем искусственного интеллекта», г. Донецк
83048, г. Донецк, ул. Артема, 118-б

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИРОСТА ЦЕНЫ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ НА ОСНОВЕ СИММЕТРИЧНОГО И АСИММЕТРИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА

V. J. Przekop
Public institution «Institute of Problems of Artificial intelligence», Donetsk
83048, Donetsk, Artema st., 118-b

MATHEMATICAL MODELS OF THE GROWTH RATES OF THE FINANCIAL INSTRUMENTS ON THE BASIS OF SYMMETRIC AND ASYMMETRICAL LAPLACE DISTRIBUTION

В. Ю. Пшекоп
Державна установа «Інститут проблем штучного інтелекту», м. Донецьк
83048, м. Донецьк, вул. Артема, 118-б

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРИРОСТУ ЦІНИ ФІНАНСОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ НА ОСНОВІ СИМЕТРИЧНОГО ТА АСИМЕТРИЧНОГО РОЗПОДІЛУ ЛАПЛАСА

В работе предложены математические модели процесса прироста фондовых показателей на базе симметричного (двухпараметрическая модель) и асимметричного (трехпараметрическая модель) распределения Лапласа с применением гамма-распределения.
Ключевые слова: распределение Лапласа, гамма-распределение, случайная величина, математическая модель.

In the paper it is proposed mathematical models of the process of growth of stock indicators on the basis of symmetric (two-parameter model) and asymmetric (three-parameter model) Laplace distribution using gamma distribution.
Key words: Laplace distribution, the gamma distribution, random variable, mathematical model

У роботі запропоновані параметри і перспективи математичної моделі процесу приросту фондових показників на базі симетричного (двопараметрична модель) та асиметричного (трипараметрична модель) розподілу Лапласа з використанням гамма-розподілу.
Ключові слова: розподіл Лапласа, гамма-розподіл, випадкова величина, математична модель.

Введение

Моделирование процесса изменения цен финансовых инструментов является одной из важнейших задач финансовой математики. Адекватная модель динамики ценообразования имеет важное значение для анализа портфеля и управления рисками.

Цель статьи – описание семейства распределений, для моделирования процесса прироста цены, на базе симметричного и асимметричного распределения Лапласа с применением гамма-распределения, обладающих достаточно большой гибкостью, при этом имеющих небольшое количество свободных параметров.

Процесс формирования цены финансовых инструментов можно представить как систему, на вход которой поступает поток случайных событий (под событием здесь понимается некоторый факт, оказывающий влияние на процесс формирования цены. Например, некоторая новость в СМИ, приход на рынок нового игрока, или что угодно, повлекшее за собой изменение цены). Событие может быть такое, что привело к увеличению цены, либо к уменьшению. События имеют разное влияние на цену не только по знаку, но и по абсолютному значению. Очевидно, менее значимые события происходят чаще более значимых. Кроме того, события происходят в случайные моменты времени. Таким образом, мы имеем процесс, случайный как по уровню, так и по времени.

Рынок некоторым образом реагирует на поток событий, формируя текущую цену финансового инструмента $S(t)$. Одной из основных актуальных задач финансовой математики является анализ статистических характеристик приращения цены, или приращения логарифмов цены. Эту задачу можно свести к анализу функции распределения вероятности $f(x,\theta)$, где θ – вектор параметров функции распределения, или иногда удобнее анализировать характеристическую функцию $\varphi(t, \theta)$.

В силу того, что события оказывают различное влияние на динамику изменения цены, небольшие приращения цены происходят гораздо чаще больших (по некоторым исследованиям, значимость событий (значительные изменения цены) пропорциональна обратной экспоненте частоте этих событий). Поэтому в качестве базового распределения функции плотности вероятности было выбрано двустороннее экспоненциальное распределение, в общем случае несимметричное, с вектором параметров $\theta = \left(T, \lambda_R, \lambda_L\right)$, где λ_R, λ_L – параметры, определяющие толщину соответственно правого и левого «хвоста» распределения; T – таймфрейм (см. ниже). Для математического описания «случайности» процесса по времени выбрано гамма-распределение.

Экономический смысл T – интервал времени, используемый для группировки котировок при построении элементов ценового графика, или таймфрейм (англ. *time-frame*). Внутри временного периода ($t_n \ldots t_n+T$) из всех котировок оставляют, как правило, только цены открытия закрытия, минимума и максимума за период, которые используются для построения графика, бара, японской свечи и т.п.

Очевидно, таймфрейм влияет на функцию распределения вероятности $f(x,\theta)$ и должен входить в нее в качестве одного из параметров. Исследованию влияния таймфрейма на статистические характеристики функции распределения исследователи, как правило, уделяют недостаточно внимания, максимум, ограничиваясь тезисом, что коэффициенты смещения (μ) и масштаба (σ) пропорциональны $\mu \sim T$, $\sigma \sim \sqrt{T}$ для моделей, в которых, в качестве базовых принимаются устойчивые, модифицированные устойчивые или нормальное распределения. Однако, эмпирические данные показывают, что таймфрейм значительно влияет на вид распределения, а не только на параметры сдвига и масштаба, как это характерно для устойчивых распределений. Кроме того зависимость параметра масштаба (СКО или волатильности *σ(T)*) несколько сложнее, чем $\sigma \sim \sqrt{T}$.

Описание модели

Как было сказано выше, в качестве базового распределения функции плотности вероятности было выбрано двустороннее экспоненциальное распределение. Если рассматривать упрощенную симметричную модель в предельном случае, когда $T = dt \to 0$, характеристическая функция такого распределения будет:

$$\varphi(t, T = dt, \lambda) = \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} \right)^{\frac{T}{\lambda}}. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что при $\frac{T}{\lambda} = 1$, характеристическая функция (1) совпадает с характеристической функцией распределения Лапласа (плотность вероятности (2), характеристическая функция (3)).

$$f_L(x, \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda \cdot |x|}, \tag{2}$$

$$\varphi_L(t, \lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}. \tag{3}$$

Рассмотрим асимметричное распределение Лапласа $AL(\lambda_R, \lambda_L)$. Плотность распределения вероятности (4), характеристическая функция (5).

$$f_{AL}(x, \lambda_R, \lambda_L) = \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda_R \cdot \lambda_L}{\lambda_R + \lambda_L} \cdot e^{-\lambda_R \cdot x} & \text{if } 0 \le x \\ \dfrac{\lambda_R \cdot \lambda_L}{\lambda_R + \lambda_L} \cdot e^{\lambda_L \cdot x} & \text{if } 0 > x \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$\varphi_{AL}(t, \lambda_R, \lambda_L) = \frac{\lambda_R \cdot \lambda_L}{\lambda_R + \lambda_L} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_R - \mathrm{i} \cdot t} + \frac{1}{\lambda_L + \mathrm{i} \cdot t} \right). \tag{5}$$

Для большинства практических приложений верно следующее: $\lambda_R \approx \lambda_L$, тогда приближенная формула для вычисления (5) будет:

$$\varphi_{AL}(t,\lambda,\Delta\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}\cdot e^{i\cdot\phi(t,\lambda,\Delta\lambda)}, \tag{6}$$

где:

$$\lambda = \frac{2\cdot\lambda_R\cdot\lambda_L}{\lambda_R+\lambda_L} \qquad \Delta\lambda = \lambda_R-\lambda_L \qquad \phi(t,\lambda,\Delta\lambda) = -atan\left(\frac{\Delta\lambda\cdot t}{\lambda^2+t^2}\right).$$

Как мы видим формулы (3) и (6) отличаются только аргументом комплексной функции.

По аналогии с (1) для $T = dt \to 0$ можно записать:

$$\varphi(t,T=dt,\lambda) = \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}\right)^{\frac{T}{\lambda}}\cdot e^{-i\cdot\frac{T}{\lambda}\cdot atan\left(\frac{\Delta\lambda\cdot t}{\lambda^2+t^2}\right)} \tag{7}$$

Для более продолжительных таймфреймов, соизмеримых или больших чем параметр λ ($\lambda \le T$), (напомним, λ имеет физический смысл как среднее время между событиями), в функции распределения вероятности необходимо дополнительно учитывать закон распределения количества событий в фиксированном интервале времени T (в таймфрейме). Если события в потоке независимы, то количество событий в фиксированном интервале будет случайной величиной с гамма-распределением. Тогда интегрируя выражение (1) по *dt* с учетом гамма-распределения, будем иметь:

$$\varphi_{MLG}(t,T,\lambda) = \int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{T}{\lambda}-1}}{\Gamma\left(\frac{T}{\lambda}\right)}\cdot e^{-x}\cdot\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}\right)^x dx. \tag{8}$$

Если случайную величину x в выражении (8) заменить на ее математическое ожидание $x = \frac{T}{\lambda}$ (это можно сделать, например, если $\frac{T}{\lambda} \gg 1$), тогда выражение (8) снова трансформируется в (1). Физически это можно интерпретировать следующим образом, если в фиксированные интервалы времени T происходит всегда постоянное количество событий $\frac{T}{\lambda} = n$, то для расчета характеристической функции подходит формула (1) или (6), если мы имеем дело с асимметричным потоком событий. Данное допущение не является грубым с практической точки зрения и вполне применимо в некоторых моделях [1].

Аналогично алгоритму вывода выражения (8) можно получить выражение для асимметричного распределения (9).

$$\varphi_{MALG}(t, T, \lambda, \Delta\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{T}{\lambda}-1}}{\Gamma\left(\frac{T}{\lambda}\right)} \cdot e^{-x} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}\right)^{x} \cdot e^{-\mathrm{i} \cdot x \cdot atan\left(\frac{\Delta\lambda \cdot t}{\lambda^2 + t^2}\right)} dx. \quad (9)$$

Выводы

В результате выполнения работы было предложено семейство функций плотности вероятности на базе симметричного и асимметричного распределений Лапласа. Для моделирования временной стохастичности использовалось гамма-распределение. Полученные распределения вероятности могут быть использованы для моделирования процесса прироста цены финансовых инструментов.

Список литературы

1. Пшекоп В. Ю. Исследование параметров и формирование математической модели прироста фондовых показателей [Текст] / В. Ю. Пшекоп // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк, 2019. – № 1 (12). – С. 17–26.
2. Klebanov L. B. Heavy Tailed Distributions in Finance: Reality or Mith? Amateurs Viewpoint [Электронный ресурс] / Lev B. Klebanov, Irina Volchenkova, 2015. – Режим доступа : http:// arXiv:1507.07735v1 [math.PR] 28 Jul 2015.
3. Kim Y. S. Financial market models with Lévy processes and time-varying volatility [Электронный ресурс] / Kim Y.S., Rachev, Svetlozar T., Michele L. Bianchi, Fabozzi F.J. // Chair of Econometrics, Statistics and Mathematical Finance School of Economics and Business Engineering University of Karlsruhe Kollegium am Schloss, 2008. – Режим доступа : http://www.statistik.uni-karlsruhe.de
4. Svetlozar T. Rachev. Fabozzi Fat-Tailed and Skewed Asset Return [Электронный ресурс] / Svetlozar T. Rachev, C. Menn, J. Frank // Frontmatter Page i Wednesday. April 13, 2005. – Режим доступа : http:// ru.b-ok.org"книги/777724/0dd1e4
5. A New Tempered Stable Distribution and Its Application to Finance [Электронный ресурс] / Kim Y.S.; Rachev, Svetlozar T., Bianchi M.L.; Fabozzi, F.J. – 2007. – Режим доступа : http:// statistik.econ.kit.edu›download…temperered_stable…
6. Yacine A.ıt-Sahalia. Testing Whether Jumps Have Finite or Infinite Activity [Электронный ресурс] / Yacine A.ıt-Sahalia and Jean Jacod // IMS. Институт математической статистики. 2011. – Режим доступа : http:// projecteuclid.org"евклид.AOC/1311600280

References

1. Pshekop V. Yu. Issledovaniye parametrov i formirovaniye matematicheskoy modeli prirosta fondovykh pokazatele [Investigation of parameters and the formation of a mathematical model of the growth of stock indicators]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of artificial intelligence], Donetsk, 2019, No 1 (12), pp. 17–26.
2. Lev B. Klebanov, Irina Volchenkova. *Heavy Tailed Distributions in Finance: Reality or Mith? Amateurs Viewpoint* [Elektronnyy resurs], 2015, Rezhim dostupa : http:// arXiv:1507.07735v1 [math.PR] 28 Jul 2015.
3. Kim Y.S., Rachev, Svetlozar T., Michele L. Bianchi, Fabozzi F.J. *Financial market models with Lévy processes and time-varying volatility* [Elektronnyy resurs]. Chair of Econometrics, Statistics and Mathematical Finance School of Economics and Business Engineering University of Karlsruhe Kollegium am Schloss, 2008, *Rezhim dostupa* : http://www.statistik.uni-karlsruhe.de
4. Svetlozar T. Rachev, C. Menn, J. Frank. Fabozzi Fat-Tailed and Skewed Asset Return [Elektronnyy resurs]. *Frontmatter Page i Wednesday*. April 13, 2005, Rezhim dostupa : http:// ru.b-ok.org"knigi/777724/0dd1e4
5. Kim Y.S.; Rachev, Svetlozar T., Bianchi M.L.; Fabozzi, F.J. A New Tempered Stable Distribution and Its Application to Finance [Elektronnyy resurs], 2007, Rezhim dostupa : http:// statistik.econ.kit.edu›download…temperered_stable…
6. Yacine A.ıt-Sahalia and Jean Jacod. Testing Whether Jumps Have Finite or Infinite Activity [Elektronnyy resurs], *IMS. Institut matematicheskoy statistiki* [IMS. Institute of Mathematical Statistics], 2011, http:// projecteuclid.org"yevklid.AOS/1311600280

РЕЗЮМЕ

V.Y. Przekop

Mathematical Models of the Growth Rates of the Financial Instruments on the Basis Of Symmetric And Asymmetrical Laplace Distribution

This paper is devoted to the study of statistical characteristics of the process of a growth of the price of financial instruments. This problem has also beenstudied by many scientists in the field of financial mathematics.

In the article statistical analysis methods were used. The analysis of quotations of currency pairs in the market was carried out (*http://www.histdata.com/download-free-forex-data/*).

The physical processes of currency exchange rate formation are described in the introduction of this article. The section "description of the model" is devoted to the consideration of the obtained two-parameter and three-parameter probability distribution functions on the basis of symmetric and asymmetric Laplace distributions, as well as their modifications using gamma distribution to account for time stochasticity.

In the article it has been proposed a family of functions of the probability density of the process of the growth of stock indices on the basis of the symmetric and asymmetric Laplace distributions and also a gamma distribution. Further work will be connected with checking the adequacy of the proposed models on empirical data, calculation of moments and statistics of the obtained distributions.

РЕЗЮМЕ

В. Ю. Пшекоп

Математические модели прироста цены финансовых инструментов на основе симметричного и асимметричного распределения Лапласа, с использованием гамма-распределения

Настоящая работа посвящена изучению статистических характеристик процесса прироста цены финансовых инструментов. Эта проблема также исследовалась многими учеными в области финансовой математики.

В статье были использованы методы статистического анализа. Проводился анализ котировок пар валют на рынке.

Физические процессы формирования курса валюты описаны во введении настоящей статьи. Раздел «описание модели» посвящен рассмотрению полученных двухпараметрических и трехпараметрических функций распределения вероятности на базе симметричного и асимметричного распределений Лапласа, а также их модификации с использованием гамма-распределения для учета временной стохастичности.

В статье было предложено семейство функций плотности вероятности процесса прироста фондовых показателей на базе симметричного и асимметричного распределений Лапласа, а также гамма-распределения. Дальнейшая работа будет связана с проверкой адекватности предложенных моделей на эмпирических данных, расчетом моментов и статистик полученных распределений.

Статья поступила в редакцию 05.03.2019.