Б

УДК 519.612

В. Н. Беловодский, Г. Т. Климко
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
83001, г. Донецк, ул. Артема, 58

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

V. N. Belovodskiy, G. T. Klimko
State Educational Institution of Higher Education "Donetsk national technical University", Donetsk city
83001, Donetsk, Artema str., 58

ON THE CONVERGENCE RATE OF ITERATIVE METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

В. Н. Бєловодський, Г. Т. Климко
Державна освітня установа вищої професійної освіти «Донецький національний технічний університет», м. Донецьк
83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ВИРІШЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Ранее, на примере конкретной системы, было замечено, что при выбранном определенным образом начальном приближении метод Зейделя сходится за один шаг. В статье это явление обобщается для систем вида $x = Bx + d$, где матрица B имеет одно или несколько нулевых собственных значений. Установлены условия наилучшей, за один шаг, и гарантированной, за r шагов, скорости сходимости метода итераций, где r – это размер нулевой жордановой клетки канонической формы матрицы B. Приведены численные примеры.
Ключевые слова: система линейных уравнений, метод Зейделя, сходимость, матрица, собственное значение, каноническая форма, итерация.

Earlier, on the example of a specific system, it was noticed that for the initial approximation chosrn in a certain way the Seidel method converges in one step In paper this phenomenon is generalized for systems of the form $x = Bx + d$, where the matrix B has one or more zero eigenvalues. The conditions are established for the best, in one step, and guaranteed, for r steps, convergence rate of the iteration method, where r is the size of the zero Jordan cell of the canonical form of the matrix B. Numerical examples are given.
Keywords: linear equation system, method of Seidel, convergence, matrix, own value, canonical form, iteration.

Раніше, на прикладі конкретної системи, було помічено, що при обраному певним чином початковому наближенні метод Зейделя сходиться за один крок. У статті це явище узагальнюється для систем виду $x = Bx + d$, де матриця B має одне або кілька нульових власних значень. Встановлено умови найкращої, за один крок, і гарантованої, за r кроків, швидкості збіжності методу ітерацій, де r – розмір нульової жорданової клітини канонічної форми матриці B. Наведено чисельні приклади.
Ключові слова: система лінійних рівнянь, метод Зейделя, збіжність, матриця, власне значення, канонічна форма, ітерація.

Введение

Более десяти лет назад, на примере произвольной системы уравнений, было замечено, что метод Зейделя, примененный к предварительно преобразованной системе уравнений, при соответствующем выборе для неё начальных приближений сходится за один шаг. На рис. 1 приводится соответствующая иллюстрация [1]. На ней жирной линией, в данном случае это прямая, выделена область таких начальных условий.

Ряд частных случаев изложен нами в статьях [2], [3]. **Целью данной работы** является обобщение этого факта на произвольные системы, матрицы которых имеют нулевые собственные значения.

Выполненный, в порядке обзора, анализ источников, содержащих изложение методов решения систем линейных уравнений итерационными процедурами, показал, что центральное внимание уделялось [4-6] и продолжает уделяться [7-9] установлению критериев их сходимости. В качестве результата, наиболее близкого к рассматриваемой тематике, отметим задачу об оптимизации скорости сходимости, и один из основных подходов в этом направлении состоит в следующем. Последовательные приближения для системы $Ax = b$ генерируются по правилу

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \tau(Ax^{(n)} - b),$$

т.е. очередное приращение к решению выбирается пропорциональным невязке n -го приближения с коэффициентом пропорциональности τ. И в работах [7-9] отмечается, что для положительно-определенных матриц A оптимальное значение параметра, обеспечивающее наивысшую скорость сходимости, оказывается равным

$$\tau = \frac{2}{\min\lambda + \max\lambda},$$

где $\min\lambda$, $\max\lambda$ – наименьшее и наибольшее, соответственно, собственные значения матрицы A.

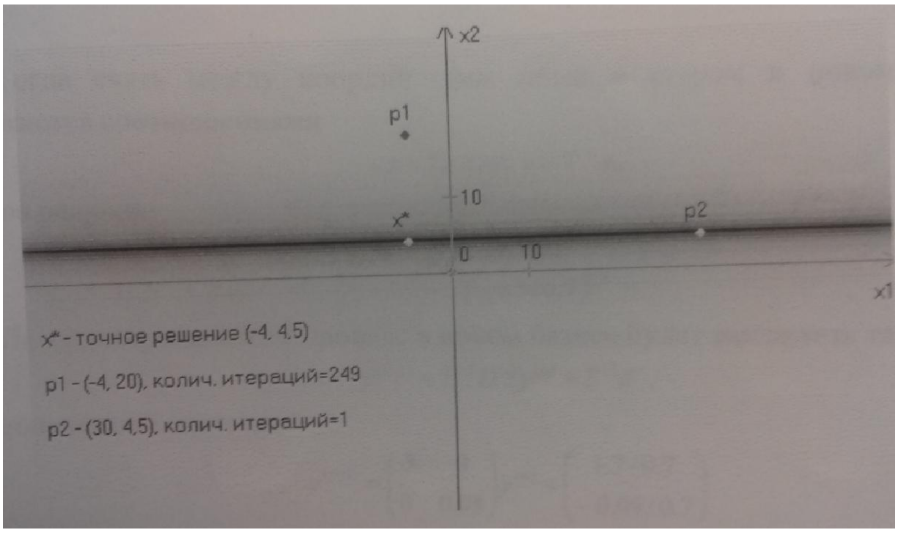

Рисунок 1 – Иллюстрация из работы [1]

В ряде работ отмечается влияние на скорость сходимости спектрального радиуса матрицы системы уравнений. Поэтому в соответствующих вычислительных процедурах первоначальную систему предварительно предобуславливают [8], то есть подготавливают, например, умножая ее на матрицу близкую к обратной отдельной части системы уравнений, в частности, ее главной диагонали. Акцент на использовании таких предобуславливателей делается и в монографии [10], а в руководстве [11] предлагаются итеративные подходы по повышению точности уже полученных решений. Более близких результатов, как в отечественной, так и в зарубежной литературе, к явлению, излагаемому в данной статье, обнаружено нами не было.

1 Рассматриваемый вид системы, обоснование его выбора

Ниже рассматривается система, представленная в форме

$$x = Bx + d, \tag{1}$$

будем называть ее нормальной, а решение осуществляется методом простой итерации. Без умаления общности предполагается, что $\det B = 0$, т.е. матрица B имеет одно или несколько нулевых собственных значений. К такой постановке, в частности, может быть приведена задача решения системы уравнений

$$Ax = b,\ \det A \neq 0. \qquad 2)$$

и суть таких преобразований состоит в следующем. Так, умножая, первоначально, обе части уравнения (2) на A^T, получим

$$A_1 x = b_1, \tag{3}$$

где $A_1 = A^T A,\ b_1 = A^T b$. Матрица A_1 является симметричной, а её диагональные элементы $c_{ii} = (A_1)_{ii} > 0$, в силу $\det A \neq 0$. Деля, теперь, каждое из уравнений системы (3), последовательно, на соответствующий диагональный элемент c_{ii} и, разрешая их относительно $x_1, x_2, \ldots$, получаем

$$x = B_1 x + d_1. \tag{4}$$

Оказывается, что для нормальной системы, полученной таким образом, метод Зейделя сходится [6].

В силу особенностей описанной процедуры, диагональные элементы матрицы B_1 равны нулю. Представляя ее в виде суммы двух треугольных, т.е. $B_1 = B_l + B_u$, где B_l – нижняя, B_u – верхняя треугольные матрицы, и $\det B_l = \det B_u = 0$, метод Зейделя можно представить в виде

$$x^{(m+1)} = B_l x^{(m+1)} + B_u x^{(m)} + d,$$

или, после очевидных преобразований, в виде

$$x^{(m+1)} = (E - B_l)^{-1} B_u x^{(m)} + (E - B_l)^{-1} d,$$

т.е. в форме простой итерации

$$x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + d, \tag{5}$$

где $B = (E - B_l)^{-1} B_u,\ d = (E - B_l)^{-1} d_1$. Отметим, что $\det B = 0$ и поэтому, по крайней мере, одно из собственных значений матрицы B равно нулю.

2 Анализ поведения последовательностей (5)

Представим матрицу B в виде произведения $B = THT^{-1}$, где T – матрица перехода, а H – нормальная форма Жордана, в общем случае [12]. Тогда система (5) может быть представлена в виде $x^{(m+1)} = THT^{-1}x^{(m)} + d$ или $y^{(m+1)} = Hy^{(m)} + d_2$, где $y = T^{-1}x$, $d_2 = T^{-1}d$.

Пусть $y^{(0)}$ – начальное приближение к решению системы и выразим через него последующие. Имеем

$$
\begin{gathered}
y^{(1)} = Hy^{(0)} + d_2, \\
y^{(2)} = H^2 y^{(0)} + Hd_2 + d_2, \\
y^{(3)} = H^3 y^{(0)} + H^2 d_2 + Hd_2 + d_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(m+1)} = H^{m+1} y^{(0)} + H^m d_2 + H^{m-1} d_2 + \ldots + d_2 .
\end{gathered} \tag{6}
$$

Для дальнейшего анализа полученного выражения (6) требуется уже учет вида матрицы H. Возможны следующие варианты.

Вариант 1. Матрица B имеет простую структуру и одно или несколько нулевых собственных значений. Тогда H диагональна. В частности, при $\dim B = 3\times 3$ она выглядит так:

$$
H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},
$$

где $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$. Этот случай рассмотрен в [2] и его результаты заключаются в следующем. После суммирования в (6) геометрической прогрессии

$$
y^{(m+1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{m+1} \end{pmatrix} y^{(0)} + \begin{pmatrix} \dfrac{1-\lambda_1^{m+1}}{1-\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\lambda_2^{m+1}}{1-\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\lambda_3^{m+1}}{1-\lambda_3} \end{pmatrix} d_2 ,
$$

и некоторых преобразований, – разбиения матрицы второго слагаемого в последнем выражении на две группировки и вынесения общего матричного множителя, получаем

$$
y^{(m+1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{m+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1^{(0)} - \dfrac{d_{21}}{1-\lambda_1} \\ y_2^{(0)} - \dfrac{d_{22}}{1-\lambda_2} \\ y_3^{(0)} - \dfrac{d_{23}}{1-\lambda_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{d_{21}}{1-\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{d_{22}}{1-\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{d_{23}}{1-\lambda_3} \end{pmatrix}, \tag{7}
$$

где $y^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}\right)^T$, $d_2 = \left(d_{21}, d_{22}, d_{23}\right)^T$.

Отсюда следует:

– при $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0$ и начальном приближении

$$y^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, \frac{d_{22}}{1-\lambda_2}, \frac{d_{23}}{1-\lambda_3} \right)^T \tag{8}$$

для любого $y_1^{(0)}$ значения $y^{(m+1)} = \left(d_{21}, \frac{d_{22}}{1-\lambda_2}, \frac{d_{23}}{1-\lambda_3} \right)^T$ для $\forall m \geq 0$, т.е. за одну итерацию достигается решение системы;

– при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$ и начальном приближении $y^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, y_1^{(0)}, \frac{d_{23}}{1-\lambda_3} \right)^T$ при любых $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}$ значения $y^{(m+1)} = \left(d_{21}, d_{22}, \frac{d_{23}}{1-\lambda_3} \right)^T$ для $\forall m \geq 0$, что также означает получение решения системы за один шаг. И т.д.

Таким образом, *для нормальной системы уравнений (1) с матрицей* B *простой структуры метод итераций имеет область начальных условий наилучшей сходимости, для которых он сходится за один шаг, и размерность этой области равна кратности нулевого собственного значения.*

Для иллюстрации полученного результата приведем пример.

Для системы (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ -4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix},$$

решение методом Зейделя нормализованной системы (4) с нулевым начальным вектором $x^{(0)}$ потребовало 9609 итераций для достижения точности равной 0.00005 (Расчеты здесь и ниже проведены в среде *Mathcad* [13]). Матрица перехода *T*, каноническая форма H и вектор $d_2 = T^{-1}d$, в этом случае, имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0.647833 & -0.740836 - 0.15616i & -0.740836 + 0.15616i \\ 0 & 0.323795 & 0.037775 - 0.412876i & 0.037775 + 0.412876i \\ 0 & 0.471674 & 0.20022 + 0.257611i & 0.20022 - 0.257611i \\ 0 & -0.502984 & 0.247892 - 0.294923i & 0.247892 + 0.294923i \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.998939 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.89161+0.23949i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.89161-0.23949i \end{pmatrix}, \; d_2 = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 3.015321 \cdot 10^{-3} \\ 2.503192+1.603798i \\ 2.503192-1.603798i \end{pmatrix}$$

Начальное приближение $x^{(0)}$, полученное по формулам (8) для произвольного значения $y_1^{(0)}$, например, для $y_1^{(0)} = 2$ оказалось равным

$$y^{(0)} = T^{-1}x^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ d_{22}/(1-\lambda_2) \\ d_{23}/(1-\lambda_3) \\ d_{24}/(1-\lambda_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3.015321\times10^{-3} \\ 2.503192+1.603798\mathrm{i} \\ 2.503192-1.603798\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

а начальный вектор $x^{(0)}$, дающий точное решение системы X за одну итерацию – равным

$$x^{(0)}{=}T\cdot y^{(0)}{=}\begin{pmatrix} -1.206061 \\ 1.51443 \\ 0.177489 \\ 2.185522 \end{pmatrix}, \quad x{=}x^{(1)}{=}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что в данном случае расстояние начального приближения $x^{(0)}$ от точного решения $x{=}x^{(1)}$ по евклидовой метрике [11] составляет $\left\| x^{(0)} - x \right\| = 3.8168$, в то время, как расстояние точки $x^{(0)} = 0$, исходя из которой метод Зейделя сходится за 9609 итераций, равно $\left\| 0 - x \right\| = 3.8730$.

Вариант 2. Матрица B имеет непростую структуру и в ее канонической форме кратному нулевому собственному значению соответствует жорданов ящик размерности r, в то время как остальная часть канонической формы диагональная.

Этот случай рассмотрен в [3]. Анализ поведения итерационной последовательности (6) здесь имеет уже некоторые отличия, и объясняются они следующими обстоятельствами. Учтем, что в общем случае, возведение жорданова ящика размерности r в степень m описывается соотношением [12]

$$H_r^{\,m} = \begin{pmatrix} \lambda^m & \dfrac{(\lambda^m)'}{1!} & \dfrac{(\lambda^m)''}{2!} & \dots & \dfrac{(\lambda^m)^{(r-1)}}{(r-1)!} \\ 0 & \lambda^m & \dfrac{(\lambda^m)'}{1!} & \dots & \dfrac{(\lambda^m)^{(r-2)}}{(r-2)!} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{(\lambda^m)'}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^m \end{pmatrix}, \tag{9}$$

откуда следует, что для степени $m \ge r$ значение $H_r^{\,m}$ $(при \quad \lambda = 0) = 0$. Так, например, для $\dim B = 3\times3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и $r = 3$ имеем

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Из-за этой особенности «жорданова» часть $m+1=r$-го приближения, как следует из (6), стабилизируется и в последующих приближениях не изменяется. Поэтому, выбрав «жорданову» часть нулевого приближения, а именно, значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}$ произвольным образом, а остальные так, как указано выше (см.(7)), т.е., полагая $y_{r+1}^{(0)} = \dfrac{d_{2,r+1}}{1-\lambda_{r+1}}, y_{r+2}^{(0)} = \dfrac{d_{2,r+2}}{1-\lambda_{r+2}}, \ldots, y_n^{(0)} = \dfrac{d_{2,n}}{1-\lambda_n}$, за r шагов достигается решение системы.

Таким образом, *наличие в канонической форме матрицы B жорданова ящика размерности r, соответствующего нулевому кратному корню, и диагональном виде остальной ее части, «правильный» выбор начального приближения гарантирует сходимость метода итераций за r шагов.*

Насколько это может быть существенным, демонстрирует следующий пример.

Пусть имеется итерационный процесс (5) в виде

$$y^{(m+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9999 \end{pmatrix} y^{(m)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = H \cdot y^{(m)} + d_2, \;\; y^* = H \cdot y^* + d_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 40000 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, он сходится и имеет неподвижную точку y^*.

Использование метода простой итерации с начальным приближением $y^{(0)} = d_2$ для достижения точности равной шести верным значащим цифрам потребовало 128 985 шагов. Если же за начальное приближение взять, как указано выше, вектор $y^{(0)}$ с произвольными значениями $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$ и $y_3^{(0)}$, то точное решение, например, с указанными ниже значениями $y^{(0)}$, достигается за три итерации:

	$y^{(0)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)},\ldots$	$y^{(0)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)},\ldots$
$y_1^{(0)} =$	**625**	–511	346	6	**2401**	3126	–1021	6
$y_2^{(0)} =$	**–512**	345	5	5	**3125**	–1022	5	5
$y_3^{(0)} =$	**343**	3	3	3	**-1024**	3	3	3
$y_4^{(0)} =$	40 000	40 000	40 000	40 000	40 000	40 000	40 000	40 000

Подчеркнем, что выбор начального приближения описанным образом гарантирует сходимость за три шага, хотя данная область начальных условий и не является наилучшей. Действительно, взяв в качестве начального приближения результат второй итерации, т.е. положив, например, $y^{(0)} = y^{(2)}$, решение можно получить за один шаг. Поэтому, в данном случае следует говорить об области не наилучшей, а гарантированной скорости сходимости.

Вариант 3. Матрица B имеет непростую структуру и в ее канонической форме имеется жорданов ящик, соответствующий ненулевому собственному значению.

Оказывается, что в данном случае, область наилучшей или гарантированной скорости сходимости отсутствует вообще и причина заключается в особенностях возведения в степень «ненулевого» жорданова ящика. Проиллюстрируем этот факт на примере системы размерности равной трем, т.е. $\dim B = 3\times 3$. Пусть нормальная жорданова форма H матрицы B имеет вид $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 = 0$.

Тогда, в соответствии с (8), имеем

$$H^2=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2\\ 0 & 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix},\ H^3=\begin{pmatrix}\lambda_1^3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^3 & 3\lambda_2^2\\ 0 & 0 & \lambda_2^3\end{pmatrix},\ \ldots,\ H^m=\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^m & m\lambda_2^{m-1}\\ 0 & 0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}.$$

Выражение (6), в этом случае, принимает вид

$$y^{(m+1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{m+1} & (m+1)\lambda^m\\ 0 & 0 & \lambda^{m+1}\end{pmatrix}y^{(0)}+\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\cdot d_2\,,$$

или, после суммирования

$$y^{(m+1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{m+1} & (m+1)\lambda^m\\ 0 & 0 & \lambda^{m+1}\end{pmatrix}y^{(0)}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda} & \left(\dfrac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda}\right)'\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda}\end{pmatrix}d_2\,,$$

последующего дифференцирования

$$y^{(m+1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{m+1} & (m+1)\lambda^m\\ 0 & 0 & \lambda^{m+1}\end{pmatrix}y^{(0)}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda} & -\dfrac{(m+1)\lambda^m}{1-\lambda}+\dfrac{(1-\lambda^{m+1})}{(1-\lambda)^2}\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\lambda^{m+1}}{1-\lambda}\end{pmatrix}d_2\,,$$

разбиения матрицы второго слагаемого

$$y^{(m+1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{m+1} & (m+1)\lambda^m\\ 0 & 0 & \lambda^{m+1}\end{pmatrix}y^{(0)}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-\lambda^{m+1}}{1-\lambda} & -\dfrac{(m+1)\lambda^m}{1-\lambda}\\ 0 & 0 & \dfrac{-\lambda^{m+1}}{1-\lambda}\end{pmatrix}d_2+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{1-\lambda} & \dfrac{(1-\lambda^{m+1})}{(1-\lambda)^2}\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{1-\lambda}\end{pmatrix}d_2\,,$$

группировки и вынесения общего матричного множителя, получаем

$$y^{(m+1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{m+1} & (m+1)\lambda^m\\ 0 & 0 & \lambda^{m+1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1^{(0)}-\dfrac{d_{21}}{1-\lambda}\\ y_2^{(0)}-\dfrac{d_{22}}{1-\lambda}\\ y_3^{(0)}-\dfrac{d_{23}}{1-\lambda}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_{21}\\ \dfrac{1}{1-\lambda}d_{22}+\dfrac{(1-\lambda^{m+1})}{(1-\lambda)^2}d_{23}\\ \dfrac{1}{1-\lambda}d_{23}\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что при $y^{(0)} = \left(y_1^{(0)}, \dfrac{d_{22}}{1-\lambda_2}, \dfrac{d_{23}}{1-\lambda_2} \right)^T$ и $\forall y_1^{(0)}$ значения первой и третьей компонент стабилизируются уже после первой итерации, а вторая компонента $y^{(m+1)}$ продолжает зависеть от номера приближения. Таким образом, *о наличии множества наилучшей или гарантированной скорости сходимости в данном случае говорить не приходится, однако появляется принципиальная возможность за счет выбора начального приближения снизить размерность итерируемой системы.* Так, например, в данном случае, итерировать только одно уравнение вместо трех.

Заключение

Изложенные результаты демонстрируют возможность влияния начального приближения на скорость сходимости метода итераций и вскрывают причину такого явления, состоящую в наличии нулевых собственных значений у матрицы нормальной формы системы уравнений. Рассмотрены варианты различной кратности таких корней, установлено наличие области начальных приближений для метода итераций, обеспечивающих сходимость за один шаг – при условии, что матрица B имеет простую структуру, и за r шагов, где r – это размер жордановой клетки канонической формы матрицы B, соответствующей ее нулевому собственному значению, при условии диагональности «ненулевой» части ее нормальной формы Жордана. Размерность такой области равна кратности нулевого собственного значения. Наличие «ненулевых» жордановых клеток такую возможность исключает, хотя появляется возможность снижения размерности самой итерируемой системы.

Если предположить, что на практике рассмотренные варианты линейных систем равновозможны, то в 2/3 случаях использование изложенных подходов по выбору начального приближения могло бы существенно снизить вычислительную трудоемкость итерационных расчетов. Это соображение усиливает уверенность в необходимости дальнейших исследований по разработке простых алгоритмов поиска таких областей.

Список литературы

1. Беловодский В. Н. О скорости сходимости метода Зейделя в зависимости от начальных условий [Текст] / В. Н. Беловодский, Р. Л. Варзар // Збірник науково-методичних робіт. – Донецьк : ДонНТУ, 2006. – Вип. 4. – С. 132–137.
2. Беловодский В. Н. Метод Зейделя, направления наилучшей сходимости [Текст] / В. Н. Беловодский, Г. Т. Климко // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе : сб. научных трудов. – 2018.– № 1(14) – 2(15). – С. 142–150. (в печати).
3. Беловодский В. Н. Об областях гарантированной скорости сходимости итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений [Текст] / В. Н. Беловодский, Г. Т. Климко // Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях : Материалы VI Международной научно-технической конференции (СИТОНИ -2019). – Донецк : ДонНТУ, 2019. – С. 4–15.
4. Самарский А.А. Численные методы: учеб. пособие для вузов [Текст] / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва : Наука, 1989. – 432 с.
5. Петров И. Б. Лекции по вычислительной математике : учеб. пособие [Текст] / И. Б. Петров, А. И. Лобанов. – Москва : БИНОМ. Лаб. знаний, 2006. – 523 с.
6. Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры: монография [Текст] / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – [Изд. 3-е, стер.] – Санкт-Петербург : Лань, 2002. – 736 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
7. Глазырина Л. Л. Введение в численные методы : учеб. пособие [Текст] / Л. Л. Глазырина, М. М. Карчевский. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 122 с.

8. Шарый С. П. Курс вычислительных методов [Электронный ресурс] / С. П. Шарый; РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т вычислит. технологий. – Электрон. дан. (1 файл). – Новосибирск : [б. и.], 2017. – Систем. требования: Acrobat Reader.
9. Баркалов К. А. Методы параллельных вычислений [Текст] / К. А. Баркалов. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегор. ун-та им. Н. Лобачевского, 2012. – 124 с.
10. Burden, R. L. Numerical Analysis [Текст] / R. L. Burden, J. D. Fairs. – Brook Cole : [s. n.], 2010. – 877 p.
11. Numerical recipes. The Art of Scientific Computing [Текст] / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. – Cambridge : Cambridge University Press, 2007.– 1262 p.
12. Блох Э. Л. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения: учеб. пособие для втузов [Текст] / Э. Л. Блох, Л. И. Лошинский, В. Я. Турин.– Москва : Высш. шк., 1971. – 256 с.
13. Макаров, Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15 [Электронный ресурс] : учеб. курс / Е. Г. Макаров. – Электрон. дан. (1 файл). – Санкт Петербург : Питер, 2011. – Систем. требования : Просмотрщик djvu-файлов.

References

1. Belovodskij V. N., Varzar R. L. *O skorosti skhodimosti metoda Zejdelya v zavisimosti ot nachal'nyh uslovij* [On the rate of convergence of the Seidel method depending on the initial conditions]. Zbirnik naukovo-metodichnih robit [Collection of scientific and methodological works], Donec'k, DonNTU, 2006, Vip. 4, pp. 132-137.
2. Belovodskij V. N., Klimko G. T. Metod Zejdelya, napravleniya nailuchshej skhodimosti [Seidel method, directions of best convergence], *Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii v naukah o prirode i obshchestve, sb. nauchnyh trudov* [System analysis and information technology in the sciences of nature and society, Sat. scientific works], No. 1(14)-2(15), 2018, pp. 142-150. (in the press).
3. Belovodskij V.N., Klimko G.T. Ob oblastyah garantirovannoj skorosti skhodimosti iteracionnyh metodov resheniya sistem linejnyh algebraicheskih uravnenij [On areas of guaranteed convergence rate of iterative methods for solving systems of linear algebraic equations]. *Materialy VI Mezhdunarodnoj nauchno-tekhnicheskoj konferencii «Sovremennye informacionnye tekhnologii v obrazovanii i nauchnyh issledovaniyah»* (SITONI - 2019), Doneck, DonNTU [Materials of the VI International Scientific and Technical Conference "Modern Information Technologies in Education and Scientific Research" (CITONI -2019)], 2019, pp. 4-15.
4. Samarskij A. A., Gulin A. V. *CHislennye metody: ucheb. posobie dlya vuzov* [Numerical methods: textbook. manual for universities], Moskva, Nauka, 1989, 432 p.
5. Petrov I. B., Lobanov A. I. *Lekcii po vychislitel'noj matematike: ucheb. posobie* [Lectures in computational mathematics: textbook. allowance], Moskva, BINOM. Lab. Znanij, 2006, 523 p.
6. Faddeev D. K., Faddeeva V. N. *Vychislitel'nye metody linejnoj algebry: monografiya* [Computational methods of linear algebra: a monograph], Izd. 3-e, ster., Sankt-Peterburg: Lan', 2002, 736 p., (Uchebniki dlya vuzov. Special'naya literatura [Textbooks for universities. Special literature].
7. Glazyrina L. L., Karchevskij M. M. *Vvedenie v chislennye metody: ucheb. posobie* [Introduction to numerical methods: textbook. allowance], Kazan', Izd-vo Kazan. un-ta, 2017, 122 p.
8. SHaryj S. P. *Kurs vychislitel'nyh metodov* [Elektronnyj resurs] [Computing Methods Course]; RAN, Sib. otd-nie, In-t vychislit. tekhnologij, Elektron. dan. (1 fajl), Novosibirsk: [b.i.], 2017, Sistem. trebovaniya: Acrobat Reader.
9. Barkalov K. A. *Metody parallel'nyh vychislenij* [Parallel Computing Methods], Nizhnij Novgorod, Izd-vo Nizhegor. un-ta im. N. Lobachevskogo, 2012, 124 p.
10. Burden R. L., Fairs J. D. *Numerical Analysis*, Brook Cole : [s. n.], 2010, 877 p.
11. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. , Flannery B. P. *Numerical recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 1262 p.
12. Bloh E. L., Loshinskij L. I., Turin V. YA. *Osnovy linejnoj algebry i nekotorye ee prilozheniya: ucheb. posobie dlya vtuzov* [Fundamentals of linear algebra and some of its applications: textbook. manual for technical colleges], Moskva, Vyssh. shk., 1971, 256 p.
13. Makarov E. G. *Inzhenernye raschety v Mathcad 15* [Elektronnyj resurs]: ucheb. Kurs [Engineering Calculations at Mathcad], Elektron. dan. (1 fajl), Sankt Peterburg, Piter, 2011, Sistem. trebovaniya: Prosmotrshchik djvu-fajlov.

RESUME

V. N. Belovodskiy, G. T. Klimko

On the Convergence Rate of Iterative Methods for Solving Systems of Linear Algebraic Equations

Earlier, on the example of a system of two equations, the authors observed, that one of the iterative procedures for solving systems of linear equations based on the Seidel method, converges in one step for initial conditions chosen in a certain way.

In this paper, this phenomenon is discussed and generalized for systems of the form $x = Bx + d$ in which the matrix B has one or more zero eigenvalues.

The results of previous studies related to matrices of simple structure are presented, and the features of convergence in the presence of a zero Jordan block in the canonical form of the matrix are noted.

The general case is considered when the canonical form of the system matrix has both zero and nonzero Jordan cells. Theoretical results are confirmed by numerical calculations.

РЕЗЮМЕ

В. Н. Беловодский, Г. Т. Климко

О скорости сходимости итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений

Ранее, на примере системы двух уравнений авторами было замечено, что одна из итерационных процедур решения систем линейных уравнений, основанная на методе Зейделя, при выбранных определенным образом начальных условиях, сходится за один шаг.

В настоящей статье это явление обобщается для систем вида $x = Bx + d$, у которых матрица B имеет одно или несколько нулевых собственных значений.

Изложены результаты предыдущих исследований, относящихся к матрицам простой структуры и отмечены особенности сходимости при наличии нулевой жордановой клетки в канонической форме матрицы B.

Рассмотрен наиболее общий случай, когда каноническая форма матрицы B системы имеет как нулевую, так и ненулевые жордановы клетки. Теоретические результаты подтверждены численными расчетами.

Статья поступила в редакцию 15.01.2020.