

УДК 519.8:658.512

Т. Г. Дмитрюк

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Донецкий национальный технический университет», г. Донецк  
283001, г. Донецк, ул. Артёма, 58

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

T. G. Dmitriuk

State Educational Institution of Higher Education «Donetsk National Technical University», Donetsk  
283001, Donetsk, Artema str., 58

## MATHEMATICAL MODEL OF ENTERPRISE PRODUCTION PROGRAM PLANNING

Т. Г. Дмитрюк

Державний освітній заклад вищої професійної освіти  
«Донецький національний технічний університет», м. Донецьк  
283001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ ПІДПРИЄМСТВА

Данная статья посвящена разработке математической модели, описывающей деятельность торгово-промышленного предприятия как многоуровневой производственной системы. Методология прогноза планирования производственной программы подразумевает разработку статических статистических моделей, характеризующих объёмы производства пива разных сортов, а также объёмы использования тары и вспомогательных материалов, затрачиваемых на расфасовку произведённой продукции. Модели рассчитаны по среднемесячным показателям объёмов производства и сбыта продукции при постоянном уровне потребительского спроса.

**Ключевые слова:** производственная программа, пиво, статистическое моделирование, прогноз, оценка модели.

This article is devoted to development of the mathematical model describing activity of the trade and industrial enterprise as a multilevel production system. The methodology of the production program planning forecast means development of the static statistical models characterizing production of beer of different grades and also volumes of a container and auxiliary materials using, spent for packaging of the made products. Models are calculated by average monthly to indicators of the outputs and sales of products at the constant consumer demand level.

**Key words:** production program, beer, statistical modeling, forecast, model evaluation.

Стаття присвячена розробці математичної моделі, яка описує діяльність торгово-промислового підприємства як багаторівневої виробничої системи. Методологія прогнозу планування виробничої програми передбачає розробку статичних статистичних моделей, котрі характеризують обсяги виробництва пива різних сортів, а також обсяги використання тари та допоміжних матеріалів, що витрачаються на розфасовку виробленої продукції. Моделі розраховані за середньомісячними показниками обсягів виробництва та збуту продукції при постійному рівні споживчого попиту.

**Ключові слова:** виробнича програма, пиво, статистичне моделювання, прогноз, оцінка моделі.

## Введение

**Постановка проблемы.** Управление производственной программой предприятия невозможно без качественного планирования, направленного на рациональный выпуск готовой продукции, что является приоритетной задачей объекта управления при осуществлении промышленной деятельности. Основой процессов производственного планирования следует считать представление предприятия как многоуровневой производственной системы, функционирующей в условиях многофакторного влияния, что обуславливает разнообразность подходов к решению данной задачи. Общей чертой проблем производственного планирования является использование менеджерами недостаточно эффективных методов прогнозирования результатов деятельности субъектов хозяйствования (и, как следствие, принятие квазиоптимальных управленческих решений). Вследствие изложенного в данной работе проводится анализ процесса календарного планирования производственной программы на одном из ведущих торгово-промышленных предприятий города Донецка – ООО «Донецкий пивоваренный завод» («ДПЗ») и разрабатываются модели прогноза выпуска продукции.

**Анализ литературных источников.** В статье [1] на основе исследования моделей и методов оптимизации и управления запасами был проведён системный анализ производственных характеристик и их взаимосвязей в логистической системе торгово-промышленного предприятия на примере ООО «Донецкий пивоваренный завод» (ДПЗ). Авторами выделена организационная структура предприятия, проведён анализ и описаны структурные уровни управления организацией, определена специфика портфеля заказов, установлены виды логистических операций производственного процесса. Работа позволила проанализировать эффективность использования оборотных средств предприятия.

В работе [2] предложена математическая модель оперативно-производственного планирования, описывающая реальные производственные процессы машиностроительного предприятия. Для решения задачи минимизация длительности выполнения производственной программы предложены два алгоритма: «жадный» и генетический. Данная эвристическая стратегия не всегда даёт оптимальное решение, но, как правило, даёт хорошее приближение. «Жадные» алгоритмы отличаются низкой вычислительной сложностью и подходят для довольно широкого класса задач, что было одним из факторов выбора метода решения задачи планирования в данной работе.

Задача построения графика выполнения производственного процесса в терминах теории расписаний рассмотрена в [3]. Авторами предложен гибридный алгоритм поиска, сочетающий подходы нечёткого управления и эволюционные алгоритмы, и оптимизации решений при построении графика производственного процесса. Аналогичные работы по исследуемой проблеме автору не известны.

**Постановка задачи исследования. Целью работы** является разработка математических моделей прогноза, позволяющих эффективно управлять выполнением программ производства и сбыта продукции на предприятии. Для достижения поставленной цели в работе предполагается **решение следующих задач:**

- классификация переменных планирования производства продукции и представление их в виде формально-логических моделей;
- разработка модели прогноза общего объёма производства пива и подмоделей прогноза объёмов производства по сортам пива;
- классификация переменных планирования розлива готовой продукции и представление их в виде формально-логических моделей;
- подмодели прогноза количества тары для розлива пива.

## Основное содержание и результаты работы

Для создания качественной модели прогноза производственной программы торгово-промышленного предприятия на плановый период (месяц) необходимо выявить основные факторы, влияющие на общий объём выпуска продукции.

Анализ производственной деятельности предприятия показал, что потребителям реализуется 5 основных сортов готовой продукции. В работе менеджеров отдела планирования учитывается 5 укрупнённых групп продукции, представленных в табл. 1.

Таблица 1 – Укрупнённые позиции продукции ООО «ДПЗ»

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Пиво «Жигулёвское»	$\Pi_1$
2	Пиво «Легенда Донбасса»	$\Pi_2$
3	Пиво «Медведь»	$\Pi_3$
4	Пиво «Кружка Свежего»	$\Pi_4$
5	Пиво «Добрый Шубин»	$\Pi_5$

Отсюда следует, что портфель заказов ООО «ДПЗ» будет представлен в виде (1):

$$V = \bigcup_j \Pi_j, \quad (1)$$

где  $V$  – обозначение выходной переменной общего объёма выпуска пива всех сортов;

$\Pi_j$  – обозначения входных переменных укрупнённых сортов продукции;

$j$  – обозначение укрупнённого сорта пива,  $j = 1, 5$ .

Отгрузка производится с розливом пива по объёмам тары, предусмотренным технологией розлива, включающим 6 позиций (табл. 2).

Таблица 2 – Виды тары для розлива продукции ООО «ДПЗ»

№	Наименование переменной тары	Объём, л	Обозначение переменной
1	Бутылка стеклянная	0,5	$T^1$
2	Преформа пэт	1	$T^2$
3	Преформа пэт	1,25	$T^3$
4	Преформа пэт	2	$T^4$
5	Кег стальной	30	$T^5$
6	Кег стальной	50	$T^6$

Следовательно, отгрузка разлитого пива производится в таре согласно условию (2):

$$T = \bigcup_i T^i, \quad (2)$$

где  $T^i$  – обозначения входных переменных видов расфасовки;

$i$  – обозначение объёма тары, в которую разлито приготовленное пиво,  $i = \overline{1, 6}$ .

Вся номенклатура выпуска продукции пивоваренного завода объединена в укрупнённые сорта продукции, композиция которых производилась по сортам пива. Множество сортов произведенных и разлитых в соответствующую тару продуктов задано входными переменными в виде (3):

$$X = \bigcup_i \bigcup_j X_j^i, \text{ где } X_j^i \in (\Pi, T). \quad (3)$$

Условия (3) позволяют описать физический смысл и ввести обозначение переменных общего объёма производства пива, необходимых для расчётов моделей прогноза (табл. 3).

Таблица 3 – Физический смысл и обозначение переменных производства пива

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общий объём выпуска пива всех сортов	V
2	Общий объём выпуска пива сорта «Жигулёвское»	П <sub>1</sub>
3	Общий объём выпуска пива сорта «Легенда Донбасса»	П <sub>2</sub>
4	Общий объём выпуска пива сорта «Медведь»	П <sub>3</sub>
5	Общий объём выпуска пива сорта «Кружка Свежего»	П <sub>4</sub>
6	Общий объём выпуска пива сорта «Добрый Шубин»	П <sub>5</sub>

Более детальное рассмотрение механизма формирования валового объёма выпуска продукции завода требует выявления взаимосвязей между зависимыми и независимыми переменными.

## Модель прогноза общего объёма производства пива

Процесс разработки статистических моделей включает дисперсионный, корреляционный и каскадный регрессионный анализ. Для расчёта моделей использованы пакеты математической статистики, позволяющие определить коэффициенты корреляции и регрессии, а также совокупность статистических оценок, характеризующих адекватность разрабатываемой модели по обучающей выборке.

Выборка сформирована из статистических данных, характеризующих деятельность предприятия (ООО «ДПЗ») за месяц календарного плана. В соответствии с этим рассчитываемые модели предназначены для прогноза производственной деятельности предприятия на месяц календарного года.

Следовательно, используя исходные (входные) переменные  $П_j$ , можно составить функцию прогноза общего выпуска предприятием пивоваренной продукции (тыс. л) вида (4):

$$V = V(П_j), \text{ где } V(П_j) = \sum_{j=1}^5 П_j. \quad (4)$$

Результаты дисперсионного анализа по модели приведены в табл. 4. Взаимозависимость объёмов выпуска сортов продукции завода подтверждает результат корреляционного анализа, значения коэффициентов корреляции и отклика (общего объёма выпуска всех сортов пива) для этой зависимости, показывающие прямую связь, приведены в табл. 5.

Таблица 4 – Результаты дисперсионного анализа общего объёма выпуска всех сортов пива

# ряда	мат. ожидания	ст. отклонения	Козф. вариаци.	минимум	максимум
1	1626.6204	153.5522	14.50	1384.320	1866.190
2	489.7957	7.0895	0.10	482.430	509.950
3	587.9900	8.2577	0.12	578.660	613.100
4	312.7908	4.6562	0.07	307.900	325.040
5	60.7395	0.8472	0.01	59.830	63.140
6	153.3494	2.2506	0.03	151.040	159.180

Таблица 5 – Результаты корреляционного анализа общего объема выпуска всех сортов пива  
К о р р е л я ц и о н н а я М А Т Р И Ц А

	V	П1	П2	П3	П4	П5
V	1.0000					
П1	0.6381	1.0000				
П2	0.7262	0.5308	1.0000			
П3	0.6673	0.3621	0.5223	1.0000		
П4	0.6271	0.5308	0.3969	0.3514	1.0000	
П5	0.6626	0.5463	0.4294	0.1843	0.3460	1.0000

Полученные значения коэффициентов корреляции факторов между собой меньше среднестатистического табличного  $|r(x_i, x_j)| \geq 0,56$ , что позволяет говорить о слабом взаимном влиянии факторов друг на друга (т.е. производства каждого сорта пива друг на друга).

Обработка статистических данных позволила на этапе каскадно-регрессионного анализа рассчитать модель линейного вида (5), с помощью которой возможно осуществить прогноз объемов производства всех сортов пива на месяц:

$$V = -11999,55 + 0,59P_1 + 4,79P_2 + 12,02P_3 + 45,231P_4 + 26,17P_5. \quad (5)$$

Оценки модели, характеризующие её адекватность: дисперсия остаточная (масштабированная)  $S_{1z}^2$ , отношение Фишера  $F_1$  и коэффициент множественной детерминации  $R$ , – приведены для данной задачи в табл. 6.

Таблица 6 – Результаты регрессионного анализа общего объема выпуска всех сортов пива

# ряда	Коэф. рег. маш.	Коэф. рег. нат.	Значимость-t
Св. член	—	-11999.55273	0.0000
2	0.02741	0.59368	3.5047
3	0.25753	4.78873	4.9645
4	0.36446	12.01931	7.8012
5	0.24954	45.22647	5.3030
6	0.38357	26.16967	8.0433

Оценки уравнения

Дисперсия остаточная (масштабированная)	0.15231
Дисперсия остаточная (натуральная)	3555.31714
$F_1$ – отношение Фишера	6.63184
Коэффициент множественной детерминации	0.84921

Величина дисперсии остаточной (масштабированной)  $S_{1z}^2 = 0,15$  свидетельствует о незначительной ошибке аппроксимации статистических данных (15%). Отношение Фишера  $F_1 = 6,6$  (должно удовлетворять условию  $F_1 \geq 1,5$ ) показывает во сколько раз полученная зависимость лучше полинома  $V=V_{cp}$  (где  $V_{cp}$  – математическое ожидание  $V$ ). Коэффициент множественной детерминации  $R=0,85$  характеризует степень близости полученного уравнения к функциональной зависимости. Оценки уравнения характеризуют модель как адекватную.

Уравнение вида (6) составлено из весовых коэффициентов, каждый его параметр указывает долю общего выпуска пива каждого сорта при планировании общезаводского производства напитков:

$$V = 0,03 P_1 + 0,26 P_2 + 0,36 P_3 + 0,25 P_4 + 0,38 P_5. \quad (6)$$

Полученное уравнение характеризуется коэффициентами значимости  $t_j$ , показывающими степень влияния каждого фактора на отклик, в соответствии с которыми может быть сформулирован ряд значимости (7):

$$P_5 > P_3 > P_4 > P_2 > P_1. \quad (7)$$

Наибольший вклад в общее производство продукции завода составляет приготовление пива «Добрый Шубин» ( $P_5$ ) и «Медведь» ( $P_3$ ).

В связи с тем, что коэффициенты корреляции влияют на взаимозависимость производства всех сортов пива, то с учётом этого факта целесообразно произвести расчёт квадратичной модели (8):

$$\begin{aligned} V_{кв} = & -280303,25 + 269,90 P_1 + 0,65 P_1^2 - 0,48 P_1 P_2 - 0,43 P_1 P_3 - 3,30 P_1 P_4 - \\ & - 1,86 P_1 P_5 + 178,69 P_2 + 0,05 P_2^2 - 0,19 P_2 P_3 + 0,68 P_2 P_4 + 0,11 P_2 P_5 + \\ & + 657,97 P_3 + 0,39 P_3^2 - 6,94 P_3 P_4 - 0,92 P_3 P_5 + \\ & + 1108,74 P_4 + 29,04 P_4^2 - 7,98 P_4 P_5 + 280,65 P_5 + 4,40 P_5^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Оценки адекватности модели (8) приведены в табл. 7.

Таблица 7 – Результаты регрессионного анализа квадратичной модели общего объёма выпуска всех сортов пива

Оценки уравнения	
Дисперсия остаточная (масштабированная)	0.07237
Дисперсия остаточная (натуральная)	1689.20337
F1 – отношение Фишера	13.95823
Коэффициент множественной детерминации	0.92836

Величина дисперсии остаточной (масштабированной) для квадратичного полинома в 2 раза лучше, чем для линейного, ошибка аппроксимации статистических данных составила 7%. По критерию Фишера данная модель в 2 раза лучше линейной. Значение коэффициента множественной детерминации  $R=0,93$  показывает функциональную зависимость между переменными. Всего 7% составляет дисперсия случайной ошибки модели.

Разработаем по аналогии модели прогноза производства на месяц по каждому сорту пива, выпускаемому ООО «ДПЗ».

## Подмодели прогноза объёмов производства пива по сортам

В связи с тем, что на каждый месяц сорта поставляемого пива и его расфасовки осуществляется по заказам потребителей, необходимо рассчитать и оценить модели объёмов производства продукции завода по сортам на месяц для составления прогноза планирования производственной программы на будущие периоды.

Выпуск различных сортов пива, фасованных в разную по видам тару, обусловлен нелинейностью технологических зависимостей сортов разливаемой продукции (9):

$$P_j = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^6 X_j^i. \quad (9)$$

Условия (9) позволяют описать физический смысл и ввести обозначение переменных (необходимых для расчётов моделей прогноза) производства пива сортов: «Жигулёвское» (табл. 8), «Легенда Донбасса» (табл. 9), «Медведь» (табл. 10), «Кружка Свежего» (табл. 11) и «Добрый Шубин» (табл. 12) ( $P_j$  – выходные переменные, отклики).

Таблица 8 – Физический смысл и обозначение переменных производства пива сорта «Жигулёвское»

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общий объём выпуска пива сорта «Жигулёвское»	$P_1$
2	Выпуск пива «Жигулёвское» в таре 0,5 л	$X_1^1$
3	Выпуск пива «Жигулёвское» в таре 1 л	$X_1^2$
4	Выпуск пива «Жигулёвское» в таре 1,25 л	$X_1^3$
5	Выпуск пива «Жигулёвское» в таре 2 л	$X_1^4$
6	Выпуск пива «Жигулёвское» в таре 30 л	$X_1^5$
7	Выпуск пива «Жигулёвское» в таре 50 л	$X_1^6$

Таблица 9 – Физический смысл и обозначение переменных производства пива сорта «Легенда Донбасса»

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общий объём выпуска пива сорта «Легенда Донбасса»	$P_2$
2	Выпуск пива «Легенда Донбасса» в таре 0,5 л	$X_2^1$
3	Выпуск пива «Легенда Донбасса» в таре 1 л	$X_2^2$
4	Выпуск пива «Легенда Донбасса» в таре 1,25 л	$X_2^3$
5	Выпуск пива «Легенда Донбасса» в таре 2 л	$X_2^4$

Таблица 10 – Физический смысл и обозначение переменных производства пива сорта «Медведь»

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общий объём выпуска пива сорта «Медведь»	$P_3$
2	Выпуск пива «Медведь» в таре 0,5 л	$X_3^1$
3	Выпуск пива «Медведь» в таре 1 л	$X_3^2$
4	Выпуск пива «Медведь» в таре 2 л	$X_3^4$
5	Выпуск пива «Медведь» в таре 30 л	$X_3^5$

Таблица 11 – Физический смысл и обозначение переменных производства пива сорта «Кружка Свежего»

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общий объём выпуска пива сорта «Кружка Свежего»	$P_4$
2	Выпуск пива «Кружка Свежего» в таре 0,5 л	$X_4^1$
3	Выпуск пива «Кружка Свежего» в таре 1 л	$X_4^2$

Таблица 12 – Физический смысл и обозначение переменных производства пива сорта «Добрый Шубин»

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1.	Общий объём выпуска пива сорта «Добрый Шубин»	$\Pi_5$
2.	Выпуск пива «Добрый Шубин» в таре 0,5 л	$X_5^1$
3.	Выпуск пива «Добрый Шубин» в таре 1 л	$X_5^2$
4.	Выпуск пива «Добрый Шубин» в таре 2 л	$X_5^4$
5.	Выпуск пива «Добрый Шубин» в таре 30 л	$X_5^5$

Следовательно, используя исходные (входные) переменные  $X_j^i$ , можно составить функции прогнозов выпуска пивоваренной продукции предприятия по каждому сорту.

Взаимозависимость объёмов выпуска пива каждого сорта, расфасованного в различные виды тары, подтверждает результат корреляционного анализа. Рассчитанные значения коэффициентов корреляции позволяют говорить: о сильной взаимозависимости между производством пива «Жигулёвское» в таре 0,5 л, 2 л и 30 л; о достаточно сильной взаимозависимости производства пива «Кружка Свежего» в таре 0,5 л и 1 л; о сильной взаимозависимости всех продуктов пива сортов «Легенда Донбасса», «Медведь» и «Добрый Шубин».

Полученные модели характеризуются коэффициентами значимости  $t_j$ , позволяющими сформулировать ряды значимости для каждой из моделей (10) – (14):

$$X_1^4 > X_1^5 > X_1^1 > X_1^2 > X_1^3 > X_1^6, \quad (10)$$

$$X_2^3 > X_2^2 > X_2^1 > X_2^4, \quad (11)$$

$$X_3^5 > X_3^4 > X_3^1 > X_3^2, \quad (12)$$

$$X_4^2 > X_4^1, \quad (13)$$

$$X_5^5 > X_5^2 > X_5^1 > X_5^4. \quad (14)$$

Наибольший вес имеют факторы:  $X_1^4$  – при производстве пива «Жигулёвское» в пэт-таре объёмом 2 л; предприятию выгодно производить пиво сорта «Легенда Донбасса» в пэт-таре объёмом 1,25 л; наиболее значимым для предприятия будет выпуск пива сорта «Медведь» в пэт-таре объёмом 2 л; большее влияние на производство пива «Кружка Свежего» имеет выпуск в пэт-таре объёмом 1 л; наибольший вклад в производство пива «Добрый Шубин» осуществляет выпуск данного сорта в пэт-таре 2 л.

Обработка статистических данных позволила рассчитать модели линейного вида (15) – (19), с помощью которых возможно осуществить прогноз объёмов выпуска пива каждого сорта на месяц:

$$\Pi_1 = -6967,69 + 7,51X_1^1 + 15,59X_1^2 + 79,55X_1^3 + 8,52X_1^4 + 498,08X_1^5 + 0 \cdot X_1^6. \quad (15)$$

$$\Pi_2 = -706,78 + 1,67X_2^1 + 3,83X_2^2 + 8,39X_2^3 - 0,002X_2^4. \quad (16)$$

$$\Pi_3 = -207,35 + 0,94X_3^1 + 1,34X_3^2 + 1,08X_3^4 + 546,16X_3^5. \quad (17)$$

$$\Pi_4 = -63,03 + 1,50X_4^1 + 2,73X_4^2. \quad (18)$$

$$\Pi_5 = -278,85 + 1,03X_5^1 + 4,18X_5^2 + 1,29X_5^4 + 340,37X_5^5. \quad (19)$$

Оценки линейных моделей, характеризующие их адекватность, для данной задачи приведены в табл. 13.

Таблица 13 – Оценка адекватности моделей (15) – (19)

№ модели	$S_{1z}^2$	$F_1$	R
15	0,19208	5,25863	0,80984
16	0,05352	18,87369	0,94702
17	0,03003	33,63182	0,97027
18	0,09279	10,88625	0,90814
19	0,05321	18,98360	0,94732

Кроме линейных уравнений (15) – (19) приведены уравнения вида (20) – (24), в которых каждый параметр указывает долю выпуска пива данной группы в различных видах тары:

$$\Pi_1 = 0,17X_1^1 + 0,31X_1^2 + 0,19X_1^3 + 0,27X_1^4 + 0,26X_1^5 + 0 \cdot X_1^6. \quad (20)$$

$$\Pi_2 = 0,22X_2^1 + 0,40X_2^2 + 0,39X_2^3 - 0,001X_2^4. \quad (21)$$

$$\Pi_3 = 0,09X_3^1 + 0,13X_3^2 + 0,23X_3^4 + 0,54X_3^5. \quad (22)$$

$$\Pi_4 = 0,46X_4^1 + 0,54X_4^2. \quad (23)$$

$$\Pi_5 = 0,14X_5^1 + 0,36X_5^2 + 0,12X_5^4 + 0,42X_5^5. \quad (24)$$

Линейные подмодели предназначены для упрощённых расчётов. В связи с тем, что различные виды расфасовки производства пива каждого сорта характеризуют нелинейность показателей, произведен расчёт квадратичных подмоделей для каждого сорта пива по видам расфасовки (25) – (29):

$$\begin{aligned} \Pi_{1кв} = & -13346361 + 32209X_1^1 + 3,99(X_1^1)^2 - 2,72X_1^1X_1^2 - 28,83X_1^1X_1^3 + 1,08X_1^1X_1^4 - \\ & - 306,45X_1^1X_1^5 + 648,38X_1^2 + 3,09(X_1^2)^2 - 32,00X_1^2X_1^3 - 1,62X_1^2X_1^4 - 67,21X_1^2X_1^5 - \\ & - 2527,12X_1^3 + 375,68(X_1^3)^2 - 20,02X_1^3X_1^4 + 923,73X_1^3X_1^5 + \\ & + 800,77X_1^4 - 0,58(X_1^4)^2 - 64,56X_1^4X_1^5 + 4880,08X_1^5 + 8156,74(X_1^5)^2. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{2кв} = & -283896 + 38,56X_2^1 - 0,06(X_2^1)^2 + 0,08X_2^1X_2^2 + 0,58X_2^1X_2^3 - 0,27X_2^1X_2^4 + \\ & + 61,41X_2^2 - 0,26(X_2^2)^2 - 0,88X_2^2X_2^3 + 0,22X_2^2X_2^4 - \\ & - 17491X_2^3 - 0,36(X_2^3)^2 + 1,20X_2^3X_2^4 - 24,44X_2^4. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{3кв} = & -262812 + 11,772X_3^1 - 0,16(X_3^1)^2 - 1,28X_3^1X_3^2 + 0,16X_3^1X_3^4 + 87,86X_3^1X_3^5 - \\ & - 63,08X_3^2 + 1,35(X_3^2)^2 - 0,54X_3^2X_3^4 - 75,33X_3^2X_3^5 - \\ & - 4,73X_3^4 + 0,33(X_3^4)^2 - 88,43X_3^4X_3^5 + 141,728X_3^5 + 1208897(X_3^5)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Pi_{4кв} = -519,77 + 7,08X_4^1 - 0,30(X_4^1)^2 + 0,58X_4^1X_4^2 + 29,82X_4^2 - 0,90(X_4^2)^2. \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{5кв} = & 734153 + 63,60X_5^1 - 0,37(X_5^1)^2 - 1,17X_5^1X_5^2 + 0,59X_5^1X_5^4 + 22,83X_5^1X_5^5 - \\ & - 188,32X_5^2 + 1,68(X_5^2)^2 - 0,14X_5^2X_5^4 + 16,85X_5^2X_5^5 - \\ & - 61,71X_5^4 + 0,51(X_5^4)^2 - 22,69X_5^4X_5^5. \end{aligned} \quad (29)$$

Оценки адекватности квадратичных полиномов (25) – (29) приведены в табл. 14.

Таблица 14 – Оценка адекватности моделей (25) – (29)

№ модели	$S_{1z}^2$	$F_1$	R
24	0,08203	12,31371	0,91879
25	0,01738	58,11174	0,98279
26	0,05631	17,93871	0,94425
27	0,06528	15,47349	0,93537
28	0,03763	26,84178	0,96274

Значения коэффициентов множественной детерминации показывают степень близости полученных уравнений к функциональным зависимостям между переменными соответствующих подмоделей. Дисперсии случайных ошибок меньше, чем в линейных подмоделях (15) – (19). Таким образом, подмодели вида (25) – (29) можно считать адекватными.

### Подмодели расчёта количества тары, необходимой для выполнения производственной программы предприятия на месяц

Менеджерам отдела планирования кроме объёмов производства пива каждой расфасовки необходимо иметь инструментарий для расчёта количества тары, необходимой для розлива.

Методология прогноза планирования программы сбыта произведённой продукции торгово-промышленным предприятием ООО «ДПЗ» заказчикам подразумевает разработку подмоделей прогноза сбыта готовой продукции в таре объёмами 0,5 л, 1 л, 1,25 л, 2 л и 30 л (для 50-литровых кегов разработка подмодели не имеет смысла).

Для того чтобы определить сколько необходимо тары для розлива продукции пивоваренного завода, необходимо составить функции прогнозов.

В целом, на участке розлива пивзавода объёмы фасовки пива по видам тары подчинены следующим условиям (30):

$$T^i = \sum_{k=1}^6 T^i(Y_k^i), \quad (30)$$

где  $T^i$  – выходные переменные, отклики;

$Y_k^i$  – количество единиц тары  $i$  (входные переменные) для розлива пива наименования  $k$  (тыс. шт.),  $k = \overline{1, 9}$ .

Выборка сформирована из статистических данных, характеризующих деятельность завода по розливу готовой продукции за месяц календарного плана. Следовательно, модели будут предназначены для прогноза потребности объёмов розлива и закупки тары на месяц календарного года.

Последние условия позволяют описать физический смысл и ввести обозначение переменных расфасовки пива по видам тары, необходимых для расчётов подмоделей прогноза (табл. 15 – 19).

Таблица 15 – Физический смысл и обозначение переменных расфасовки пива в бутылку стеклянную

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общее количество бутылок стеклянных (0,5 л)	$T^1$
2	Количество бутылок стеклянных (0,5 л) для розлива пива «Жигулёвское»	$Y_1^1$
3	Количество бутылок стеклянных (0,5 л) для розлива пива «Жигулёвское» разливное	$Y_2^1$
4	Количество бутылок стеклянных (0,5 л) для розлива пива «Легенда Донбасса» светлое	$Y_3^1$
5	Количество бутылок стеклянных (0,5 л) для розлива пива «Медведь» безалкогольное	$Y_5^1$
6	Количество бутылок стеклянных (0,5 л) для розлива пива «Медведь» светлое	$Y_6^1$
7	Количество бутылок стеклянных (0,5 л) для розлива пива «Медведь» крепкое	$Y_7^1$
8	Количество бутылок стеклянных (0,5 л) для розлива пива «Кружка Свежего»	$Y_8^1$
9	Количество бутылок стеклянных (0,5 л) для розлива пива «Добрый Шубин» полутёмное	$Y_9^1$

Таблица 16 – Физический смысл и обозначение переменных расфасовки пива в преформу пэт (1 л)

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общее количество преформ пэт (1 л)	$T^2$
2	Количество преформ пэт (1 л) для розлива пива «Жигулёвское»	$Y_1^2$
3	Количество преформ пэт (1 л) для розлива пива «Легенда Донбасса» светлое	$Y_3^2$
4	Количество преформ пэт (1 л) для розлива пива «Медведь» светлое	$Y_6^2$
5	Количество преформ пэт (1 л) для розлива пива «Медведь» крепкое	$Y_7^2$
6	Количество преформ пэт (1 л) для розлива пива «Кружка Свежего»	$Y_8^2$
7	Количество преформ пэт (1 л) для розлива пива «Добрый Шубин» полутёмное	$Y_9^2$

Таблица 17 – Физический смысл и обозначение переменных расфасовки пива в преформу пэт (1,25 л)

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общее количество преформ пэт (1,25 л)	$T^3$
2	Количество преформ пэт (1,25 л) для розлива пива «Жигулёвское» разливное	$Y_2^3$
3	Количество преформ пэт (1,25 л) для розлива пива «Легенда Донбасса» оригинальное	$Y_4^3$

Таблица 18 – Физический смысл и обозначение переменных расфасовки пива в преформу пэт (2 л)

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общее количество преформ пэт (2 л)	$T^4$
2	Количество преформ пэт (2 л) для розлива пива «Жигулёвское»	$Y_1^4$
3	Количество преформ пэт (2 л) для розлива пива «Жигулёвское» разливное	$Y_2^4$
4	Количество преформ пэт (2 л) для розлива пива «Легенда Донбасса» светлое	$Y_3^4$
5	Количество преформ пэт (2 л) для розлива пива «Медведь» светлое	$Y_6^4$
6	Количество преформ пэт (2 л) для розлива пива «Добрый Шубин» полутёмное	$Y_9^4$

Таблица 19 – Физический смысл и обозначение переменных расфасовки пива в кег (30 л)

№	Наименование переменной продукции	Обозначение переменной
1	Общее количество кегов стальных (30 л)	$T^5$
2	Количество кегов стальных (30 л) для розлива пива «Жигулёвское»	$Y_1^5$
3	Количество кегов стальных (30 л) для розлива пива «Медведь» светлое	$Y_6^5$
4	Количество кегов стальных (30 л) для розлива пива «Добрый Шубин» полутёмное	$Y_9^5$

Разработаем и оценим подмодели прогноза количества тары, необходимого для розлива всех сортов пива, при планировании промышленной деятельности ООО «ДПЗ» на месяц (методология та же).

Взаимозависимости объёмов розлива заводом всех наименований пива в тару объёмами 0,5 л, 1 л, 1,25 л, 2 л и 30 л подтверждает результат корреляционного анализа. Произведённые расчёты значений коэффициентов позволяют говорить о взаимозависимостях между показателями фасовки пива в бутылку стеклянную (0,5 л) и кег стальной (30 л). Сильная взаимозависимость между показателями для количества тары по розливу пива сортов: «Медведь» светлое ( $Y_6^2$ ), «Медведь» крепкое ( $Y_7^2$ ), «Кружка Свежего» ( $Y_8^2$ ) (объёмом 1 л); «Жигулёвское» разливное ( $Y_2^3$ ) и «Легенда Донбасса» оригинальное ( $Y_4^3$ ) (объёмом 1,25 л); «Жигулёвское» ( $Y_1^4$ ) и «Жигулёвское» разливное ( $Y_2^4$ ) (объёмом 2 л).

Полученные модели характеризуются коэффициентами значимости  $t_j$ , позволяющими сформулировать ряды значимости (31) – (35):

$$Y_7^1 > Y_9^1 > Y_5^1 > Y_8^1 > Y_1^1 > Y_2^1 > Y_3^1 > Y_6^1, \quad (31)$$

$$Y_9^2 > Y_3^2 > Y_8^2 > Y_7^2 > Y_6^2 > Y_1^2, \quad (32)$$

$$Y_4^3 > Y_2^3, \quad (33)$$

$$Y_9^4 > Y_2^4 > Y_1^4 > Y_3^4 > Y_6^4, \quad (34)$$

$$Y_1^5 > Y_6^5 > Y_9^5. \quad (35)$$

В связи с тем, что разная расфасовка имеет разную популярность у потребителей, наибольший вес имеют факторы:  $Y_7^1$  (количество стеклянных бутылок для розлива пива «Медведь» крепкое),  $Y_9^2$  (количество преформ пэт (1 л) для розлива пива «Добрый Шубин» полутёмное),  $Y_4^3$  (количество преформ пэт (1,25 л) для розлива пива «Легенда Донбасса» оригинальное),  $Y_9^4$  (количество преформ пэт (2 л) для розлива пива «Добрый Шубин» полутёмное),  $Y_1^5$  (количество кегов стальных для розлива пива «Жигулёвское»).

Обработка статистических данных позволила рассчитать подмодели линейного вида (36) – (40), с помощью которых возможно осуществить прогноз количества тары соответствующего объёма для расфасовки пива всех сортов на месяц:

$$T^1 = -6313,22 + 11,81Y_1^1 + 7,40Y_2^1 + 2,32Y_3^1 + 27,22Y_5^1 + 6,97Y_6^1 + 25,34Y_7^1 + 22,92Y_8^1 + 15,33Y_9^1, \quad (36)$$

$$T^2 = -4214,10 + 4,14Y_1^2 + 3,90Y_3^2 + 8,40Y_6^2 + 18,26Y_7^2 + 26,40Y_8^2 + 8,43Y_9^2, \quad (37)$$

$$T^3 = -517,18 + 4,27Y_2^3 + 7,50Y_4^3, \quad (38)$$

$$T^4 = -5698,38 + 7,45Y_1^4 + 13,93Y_2^4 + 3,38Y_3^4 + 4,78Y_6^4 + 17,67Y_9^4, \quad (39)$$

$$T^5 = -36,04 + 2,85Y_1^5 + 46,27Y_6^5 + 66,34Y_9^5. \quad (40)$$

Оценки линейных моделей, характеризующие их адекватность, для данной задачи приведены в табл. 20.

Таблица 20 – Оценка адекватности моделей (36) – (40)

№ модели	$S_{1z}^2$	$F_1$	R
36	0,12816	7,88139	0,87312
37	0,08992	5,31856	0,84198
38	0,16052	2,80176	0,84308
39	0,12502	4,48887	0,87723
40	0,10951	3,26355	0,89359

Кроме линейных уравнений (36) – (40) приведены уравнения вида (41) – (45), в которых каждый параметр указывает долю количества тары для розлива пива каждой марки:

$$T^1 = 0,18Y_1^1 + 0,18Y_2^1 + 0,13Y_3^1 + 0,16Y_5^1 + 0,10Y_6^1 + 0,23Y_7^1 + 0,14Y_8^1 + 0,21Y_9^1, \quad (41)$$

$$T^2 = 0,14Y_1^2 + 0,23Y_3^2 + 0,16Y_6^2 + 0,20Y_7^2 + 0,24Y_8^2 + 0,24Y_9^2, \quad (42)$$

$$T^3 = 0,44Y_2^3 + 0,46Y_4^3, \quad (43)$$

$$T^4 = 0,29Y_1^4 + 0,31Y_2^4 + 0,19Y_3^4 + 0,12Y_6^4 + 0,32Y_9^4, \quad (44)$$

$$T^5 = 0,40Y_1^5 + 0,35Y_6^5 + 0,31Y_9^5, \quad (45)$$

Так как имеет место взаимное влияние тары для розлива различных сортов пива, осуществим расчёт квадратичных подмоделей (46) – (50):

$$\begin{aligned}
 T_{кв}^1 = & -105305,29 + 935,69Y_1^1 + 0,03(Y_1^1)^2 + 2,25Y_1^1Y_2^1 - 1,13Y_1^1Y_3^1 - 21,33Y_1^1Y_5^1 - \\
 & - 4,20Y_1^1Y_6^1 + 3,66Y_1^1Y_7^1 - 8,55Y_1^1Y_8^1 + 5,96Y_1^1Y_9^1 + \\
 & + 493,72Y_2^1 + 2,93(Y_2^1)^2 - 0,56Y_2^1Y_3^1 - 5,89Y_2^1Y_5^1 - 3,03Y_2^1Y_6^1 - \\
 & - 2,02Y_2^1Y_7^1 - 10,50Y_2^1Y_8^1 - 3,49Y_2^1Y_9^1 - \\
 & - 8,55Y_3^1 + 0,21(Y_3^1)^2 - 0,14Y_3^1Y_5^1 - 0,10Y_3^1Y_6^1 + 0,15Y_3^1Y_7^1 - \\
 & - 1,12Y_3^1Y_8^1 + 1,02Y_3^1Y_9^1 + \\
 & + 782,93Y_5^1 + 19,73(Y_5^1)^2 - 9,09Y_5^1Y_6^1 - 13,04Y_5^1Y_7^1 + 2,79Y_5^1Y_8^1 + 20,57Y_5^1Y_9^1 - \\
 & - 513,33Y_6^1 + 12,41(Y_6^1)^2 - 4,16Y_6^1Y_7^1 + 13,62Y_6^1Y_8^1 - 11,25Y_6^1Y_9^1 + \\
 & + 194,19Y_7^1 + 17,38(Y_7^1)^2 + 2,33Y_7^1Y_8^1 - 16,51Y_7^1Y_9^1 + \\
 & + 542,89Y_8^1 + 15,95(Y_8^1)^2 - 10,39Y_8^1Y_9^1 + 962,48Y_9^1.
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
 T_{кв}^2 = & -98902,98 + 166,92Y_1^2 + 1,42(Y_1^2)^2 - 0,32Y_1^2Y_3^2 - 2,77Y_1^2Y_6^2 - \\
 & - 2,21Y_1^2Y_8^2 - 1,37Y_1^2Y_9^2 + \\
 & + 231,62Y_3^2 - 0,60Y_3^2Y_6^2 + 1,27Y_3^2Y_7^2 - 3,78Y_3^2Y_8^2 - 0,43Y_3^2Y_9^2 + \\
 & + 861,03Y_6^2 + 3,43(Y_6^2)^2 - 8,85Y_6^2Y_7^2 - 9,18Y_6^2Y_8^2 - 1,82Y_6^2Y_9^2 + \\
 & + 8,48(Y_7^2)^2 - 2,35Y_7^2Y_9^2 + \\
 & + 593,54Y_8^2 + 23,52(Y_8^2)^2 - 3,10Y_8^2Y_9^2 + 198,19Y_9^2 + 2,10(Y_9^2)^2.
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

$$T_{кв}^3 = -12068,19 + 228,66Y_2^3 - 5,18Y_2^3Y_4^3 + 159,25Y_4^3 + 2,65(Y_4^3)^2.
 \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
 T_{кв}^4 = & -137281,17 + 715,46Y_1^4 + 0,80(Y_1^4)^2 - 2,50Y_1^4Y_2^4 - 0,52Y_1^4Y_3^4 - \\
 & - 2,15Y_1^4Y_6^4 - 2,63Y_1^4Y_9^4 + \\
 & + 915,96Y_2^4 + 2,98(Y_2^4)^2 - 1,62Y_2^4Y_3^4 - 0,51Y_2^4Y_6^4 - 5,52Y_2^4Y_9^4 - \\
 & - 20,35Y_3^4 + 0,44(Y_3^4)^2 + 0,32Y_3^4Y_6^4 - \\
 & - 225,25Y_6^4 + 2,91(Y_6^4)^2 - 2,01Y_6^4Y_9^4 + 604,39Y_9^4 + 4,26(Y_9^4)^2.
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 T_{кв}^5 = & -933,18 + 83,99Y_1^5 + 5,12(Y_1^5)^2 - 181,22Y_1^5Y_6^5 - 443,96Y_1^5Y_9^5 + \\
 & + 2151,35Y_6^5 + 584,91(Y_6^5)^2 - 6651,43Y_6^5Y_9^5 + 3779,42Y_9^5 + 1477,32(Y_9^5)^2.
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Оценки адекватности квадратичных полиномов (46) – (50) приведены в табл. 21.

Таблица 21 – Оценка адекватности моделей (46) – (50)

№ модели	$S_{1z}^2$	$F_1$	R
45	0,05680	17,78341	0,94377
46	0,10915	9,25399	0,89194
47	0,14444	4,13226	0,85800
48	0,10543	9,58119	0,89563
49	0,03259	14,34288	0,96974

Значения полученных коэффициентов квадратичных моделей свидетельствуют о том, что модели (46) – (50) точнее линейных моделей (36) – (40).

Разработка моделей (5), (15) – (19), (36) – (40) позволяет менеджерам отдела планирования пивоваренного завода составить помесичный прогноз объёмов производства пива по сортам и количества закупаемой тары для розлива произведённой продукции при планировании годовой производственной программы. Для более точных расчётов на календарный месяц рекомендуется использовать модели (8), (25) – (29) и (46) – (50).

## Выводы

Научная новизна данной работы заключается в разработке статических статистических моделей прогноза объёмов производства пива по сортам и количества закупаемой тары для розлива произведённой продукции пивоваренного завода. Практическая значимость состоит в том, что разработанные модели позволят планировать программу производства и сбыта продукции пивоваренного завода в долгосрочной (на год) и краткосрочной (на месяц) перспективе, что повысит эффективность взаимодействия подразделений предприятия с контрагентами.

## Список литературы

1. Дмитрюк Т. Г. Анализ структуры производственной деятельности предприятия как объекта управления [Текст] / Т. Г. Дмитрюк, С. А. Зори // Международный рецензируемый научно-теоретический журнал «Проблемы искусственного интеллекта». – 2020. – № 1(16). – С. 37–52.
2. Аркин, П. А. Решение задачи оперативно-производственного планирования машиностроительного предприятия с помощью «жадного» и генетического алгоритмов [Электронный ресурс] / П. А. Аркин, Н. В. Муханова, Б. А. Овчар // Организатор производства. – 2018. – Т. 26, № 2. – С. 17–29.  
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/reshenie-zadachi-operativno-proizvodstvennogo-planirovaniya-mashinostroitel'nogo-predpriyatiya-s-pomoschyu-zhadnogo-i-geneticheskogo> (дата обращения: 21.05.2020).
3. Гладков, Л. А. Решение задач производственного планирования на основе гибридных эволюционных методов [Электронный ресурс] / Л. А. Гладков, Н. В. Гладкова, М. Ю. Лаврик // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2016. – №7(180). – С. 62–73.  
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/reshenie-zadach-proizvodstvennogo-planirovaniya-na-osnove-gibridnyh-evolyutsionnyh-metodov> (дата обращения: 23.05.2020).

## References

1. Dmitriuk T. G., Zori S. A. Analiz struktury proizvodstvennoj dejatel'nosti predpriyatija kak ob"ekta upravlenija [Analysis of a Production Activity Structure of the Enterprise as a Control Object]. *International Peer-Reviewed Scientific Journal «Problems of Artificial Intelligence» ISSN 2413-7383*, 2020, No. 1(16), pp. 37–52.
2. Arkin P. A., Muhanova N. V., Ovchar B. A. Reshenie zadachi operativno-proizvodstvennogo planirovaniya mashinostroitel'nogo predpriyatija s pomoshh'ju "zhadnogo" i geneticheskogo algoritmov [Solving the problem of operational-production planning of a machine-building manufacturing company with the help of greedy and genetic algorithms] *Organizator proizvodstva*, 2018, issue 26, No. 2, pp. 17-29.  
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/reshenie-zadachi-operativno-proizvodstvennogo-planirovaniya-mashinostroitel'nogo-predpriyatiya-s-pomoschyu-zhadnogo-i-geneticheskogo> (дата обращения: 21.05.2020).
3. Gladkov L. A., Gladkova N. V., Lavrik M. Ju. Reshenie zadach proizvodstvennogo planirovaniya na osnove gibridnyh jevoljucionnyh metodov [Solving of tasks of production planning based on hybrid evolutionary methods] *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki*, 2016, No. 7(180), pp. 62-73.  
URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/reshenie-zadach-proizvodstvennogo-planirovaniya-na-osnove-gibridnyh-evolyutsionnyh-metodov> (дата обращения: 23.05.2020).

## RESUME

*T. G. Dmitriuk*

### *Mathematical model of enterprise production program planning*

The work is devoted to the development of a mathematical model describing the activity of a trade and industrial enterprise as a multilevel production system.

The article is based on the calculation of static statistical models based on variance, correlation and cascade regression analysis. For calculation of models there are used packages of mathematical statistics, which allow to determine coefficients of correlation and regression, as well as a set of statistical estimates characterizing adequacy of the developed model by training sample.

The proposed models can be used to produce a monthly forecast of the volume of beer production by varieties and the quantity of purchased containers for bottling the produced products when planning the annual production program of the enterprise.

The developed models will allow to plan the program of production and marketing of brewery products in the long-term (for a year) and short-term (for a month), which will increase efficiency of interaction of enterprise divisions with counterparties.

## РЕЗЮМЕ

*Т. Г. Дмитриук*

### *Математическая модель планирования производственной программы предприятия*

Работа посвящена разработке математической модели, описывающей деятельность торгово-промышленного предприятия как многоуровневой производственной системы.

Статья основана на расчёте статических статистических моделей на основе дисперсионного, корреляционного и каскадного регрессионного анализа. Для расчёта моделей использованы пакеты математической статистики, позволяющие определить коэффициенты корреляции и регрессии, а также совокупность статистических оценок, характеризующих адекватность разрабатываемой модели по обучающей выборке.

Предложенные модели могут быть использованы для составления помесечного прогноза объёмов производства пива по сортам и количества закупаемой тары для розлива произведённой продукции при планировании годовой производственной программы предприятия.

Разработанные модели позволят планировать программу производства и сбыта продукции пивоваренного завода в долгосрочной (на год) и краткосрочной (на месяц) перспективе, что повысит эффективность взаимодействия подразделений предприятия с контрагентами.

Статья поступила в редакцию 16.03.2020.