П

УДК 622.734.001.57

Е. В. Перинская
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
83001, г. Донецк, ул. Артема, 58

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПРОЦЕССА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

E. V. Perinskaya
State Educational Institution of Higher Education “Donetsk national technical University”, Donetsk city
83001, Donetsk, Artema str., 58

THE MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL ALGORITHMS OF CONVECTIVE PROCESS INVESTIGATION IN NONHOMOGENEOUS ENVIRONMENT

О. В. Перінська
Державна освітня установа вищої професійної освіти
«Донецький національний технічний університет», м. Донецьк
83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АЛГОРИТМИ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНВЕКТИВНОГО ПРОЦЕСУ В НЕОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В статье рассматривается задача построения детерминированных математических моделей процесса конвективного перемешивания многокомпонентной неоднородной массы в ограниченном рабочем пространстве однолопастного аппарата. Предлагаются модели возрастающего уровня сложности, основанные на уравнениях математической физики, компьютерная реализация осуществляется с помощью вычислительных алгоритмов на базе конечно-разностной аппроксимации.
Ключевые слова: математическая модель, процесс, уравнение, вычислительный метод, алгоритм.

In the article the task of determine mathematical models construction forpoly-component nonhomogeneous mass convective mixing processes investigation in limited working volume of mono-vane apparatus is considered. The increase level models based on mathematical physics equations are proposed, computer realization made by numerical algorithms with help of ending-difference approximation.
Key words: the mathematical model, process, equation, numerical method, algorithm.

В статті розглядається задача побудови детермінованих математичних моделей процесу конвективного перемішування багатокомпонентної неоднорідної маси в обмеженому робочому просторі апарату з однією мішалкою. Пропонуються моделі зростаючого рівня складності, що засновуються на рівняннях математичної фізики, комп'ютерна реалізація проведена за допомогою обчислювальних алгоритмів на базі кінцево-різницевої апроксимації.
Ключові слова: математична модель, процес, рівняння, обчислювальний метод, алгоритм.

Актуальность работы

Как правило, сложное технологическое оборудование, реализующее процессы конвективного перемешивания многокомпонентных смесей, включает ряд узлов, предназначенных для воздействия на исходные материалы, конечной целью процесса является гомогенная масса, равномерно распределённая в рабочем объёме.

При проектировании используемых к настоящему времени аппаратов такого типа применяются традиционные методы, включающие вывод эмпирических зависимостей для расчёта параметров с последующими многочисленными лабораторными экспериментами и опытно-промышленными испытаниями.

К сожалению, подобные методы уже исчерпали свои возможности, и применяемые аппараты не позволяют стабильно получать гомогенные смеси с хорошо воспроизводимыми свойствами без их реконструкции, т.к. в рабочем объёме машины не достигается необходимая степень однородности компонентов в осадке, происходит залегание твердой фазы на днище, наблюдается налипание осадков на стенках. Реконструкция аппарата требует соответствующего обоснования, что вызывает необходимость теоретических и экспериментальных исследований [1], [2].

Наиболее эффективным методом решения рассматриваемых задач является метод математического моделирования, позволяющий получить с помощью компьютера достаточно широкий набор данных о реконструируемом объекте без проведения долговременных и дорогостоящих натурных исследований [3-5].

В этой связи задача разработки математических моделей процесса перемешивания многокомпонентных неоднородных масс в ограниченном рабочем объёме аппарата конвективного типа является актуальной и имеет отраслевое значение.

Цель работы – построение адекватной математической модели процесса функционирования аппарата, содержащего узлы конвективного типа, осуществляющего перемешивание неоднородных материалов для получения гомогенных смесей.

Основное содержание работы

Для математического моделирования сложных технологических процессов наиболее удобным в инженерном отношении и универсальным является метод построения математических моделей, базирующийся на физических законах (тепломассоперенос, гидродинамика, конвекция и т.д.).

Следуя изложенным принципам, получаем детерминированную математическую модель, основанную на физических законах и адекватно отражающую характер и параметры процесса.

Рассматривая технологическое оборудование, реализующее процесс конвективного воздействия на многокомпонентные смеси, очевидно, следует начать с базовой модели аппарата, содержащего один моно-лопастный конвективный элемент.

Последовательность формирования модели включают ряд промежуточных этапов.

1. Построение формализованной технической модели, где включены определяющие геометрические и гидродинамические характеристики процесса.
2. Формирование на базе принятой технической модели соответствующей математической модели, включающей набор физических показателей процесса.
3. Выбор численных методов, разработка программной модели и исследование процесса на основе компьютерных технологий.

Результатом компьютерного моделирования является исследование параметров, обеспечивающих, во-первых, стабильный непрерывный гидродинамический режим, близкий к режиму идеального перемешивания, во-вторых, образование конгломерата с постоянными физическими свойствами, и, в-третьих, образование конечного продукта (твердой составляющей смеси) с требуемыми свойствами.

В однолопастном конвективном аппарате математическая модель процесса перемешивания многокомпонентной смеси строится на базе уравнений, отражающих физический процесс конвекции массы, которая происходит за счет перемешивания смеси лопастью, угловая скорость вращения которой ω.

Принципиальным моментом при построении математической модели является то, что она должна быть сформирована на базе системы уравнений в частных производных, которая приводит к постановке краевой задачи с четырьмя неизвестными функциями: концентрация твердой компоненты, концентрация жидкой фазы, функция тока и поверхность кристаллизации. В конечном счёте необходимо установить условия и параметры, при которых обеспечивается равномерное распределение твёрдой фазы, следовательно, концентрацию жидкой фазы можно считать постоянной, хотя и неизвестной величиной (определяется автоматически в процессе моделирования).

Рассматриваемые задачи являются нелинейными и не имеют аналитических решений, что предопределяет применение численных методов.

Кроме того, предпринятые ранее попытки решения подобных задач основывались на том, что поле скоростей частиц раствора в аппарате известно, однако физически такие данные получить невозможно, вследствие чего приходится использовать те или иные способы приближений, что снижает качество получаемых решений. В данной же работе предложена математическая модель**,** позволяющая рассчитывать поле скоростей частиц перемешиваемой массы в процессе решения краевой задачи, в этом состоит существенное отличие предлагаемой модели от рассмотренных ранее.

Поскольку математическое моделирование процесса с применением детерминированных моделей осуществляется впервые, математические модели (а соответственно и краевые задачи) строятся от базовых соотношений с минимальным числом параметров до многомерных уравнений и систем.

Очевидно, наиболее представительной будет модель, содержащая три параметра (2 пространственных и время).

Рассмотрим порядок формирования моделей по мере возрастания сложности.

а) Модель **(0-D).**

Базовой моделью **(0-D)** является модель идеального перемешивания.

Концентрация твердой фазы рассматривается как функция времени: С = С(t).

Тогда $C(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{V}{T}\cdot\frac{dC}{dt} = Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2C_5 - Q\cdot C \tag{1}$$

$$C(0) = C_0,\ Q = Q_1 + Q_2 \tag{2}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – концентрации компонент, поступающих в виде раствора, причем первые четыре поступают с расходом Q_1 л/мин, а последняя компонента с расходом Q_2 л/мин; V – объем реактора, T – время перемешивания, C_0 – начальная концентрация.

Задача (1), (2) описывает модель идеального перемешивания. Решение этой задачи имеет вид:

$$C(t) = C_0\cdot\exp\left(-\frac{T\cdot Q}{V}\cdot t\right) + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2C_5}{Q}\left[1 - \exp\left(-\frac{T\cdot Q}{V}\cdot t\right)\right] \tag{3}$$

Вектор скорости частицы записывается в виде $\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}$ (плоский случай), где V_x и V_y соответственно абсцисса и ордината вектора $\vec{V}$, и удовлетворяет уравнениям:

$$rot\vec{V} = \mu(x, y),\ (x, y) \in G = (0 < x < 1,\ \ 0 < y < 1) \tag{4}$$

$$div\vec{V} = 0,\ (x, y) \in \partial G \tag{5}$$

граничное условие:

$$\vec{V}_n = 0,\ (x, y) \in \partial G \tag{6}$$

Краевая задача (4) – (6) определяет поле скоростей частиц в рассматриваемом аппарате.

В качестве функции воздействия удобно принять функцию:

$$\mu(x, y) = \frac{\omega}{\nu(l^2 x^2 + h^2 y^2)},\ \ x \neq 0,\ y \neq 0,\ \mu(0,0) = \omega \tag{7}$$

где ω – угловая скорость вращения лопасти, ν – коэффициент вязкости раствора, h – характерный поперечный размер аппарата, l – продольный размер.

Введя функцию тока $\psi(x, y)$, запишем задачу (4) – (6) в другом виде:

$$\frac{1}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \mu(x, y),\ \ (x, y) \in G \tag{8}$$

$$\psi(x, y) = 0,\ (x, y) \in \partial G \tag{9}$$

При этом вектор скорости $\vec{V}$ и функция тока $\psi(x, y)$ связаны следующими равенствами:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y};\ V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \tag{10}$$

б) Модель **(1-D).**

Концентрация *C(t,x)* является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = -V_x \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - QC}{V}, \tag{11}$$

$$0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$C_x(t, 0) = C_x(t, 1) = 0, \tag{12}$$

$$C(0, x) = C_0. \tag{13}$$

Краевая задача (11) – (13) является одномерной моделью однолопастного аппарата.

в) Модель **(2-D).**

При двух геометрических переменных x и y концентрация *C(t,x,y)* является решением уравнения:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = -V_x \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + V_y \cdot \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{D_H}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - QC}{V}$$

$$(x, y) \in G, \ \ t > 0 \tag{14}$$

при следующем граничном и начальном условии:

$$C_x(t,x,y) \ = 0,\ (t,x,н) \in \partial G \times [0,1], \tag{15}$$

$$C(0,x,y) = C_0. \tag{16}$$

Краевая задача (11) – (16) описывает двумерный вариант модели аппарата, она содержит две неизвестные функции $\psi(x,y)$ и *C(t,x,y)*.

г) Модель **(2-D*cyl*)**.

В этом случае геометрическими переменными являются радиус *r* и высота *z*· Тогда:

$$rot\vec{V}\Big|_{\phi} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r},$$

где $\vec{V} = V_r \cdot \vec{i} + V_z \cdot \vec{k}$, $V_\varphi = 0$, φ – угол.

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} = \mu(r,z)$$

$$\frac{\partial(r \cdot V_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \cdot V_z)}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$V_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z};\ V_z = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\frac{1}{H^2} \cdot \frac{\partial\psi^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{R^2 \cdot r} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{r \cdot \omega \cdot R}{R^2 r^2 + H^2 \cdot z^2}; \tag{17}$$

$$D = (0 < r < 1, 0 < z < 1),$$

$$\psi(r,z) = 0;\quad (r,z) \in \partial D \tag{18}$$

(*H* и *R* – характерные размеры реактора).

Поле скоростей частиц в рабочем пространстве аппарата определено из решения краевой задачи (17), (18), концентрация твердой фазы *C(t,r,z)* находится из решения следующей задачи:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{r \cdot R \cdot H} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{1}{r \cdot R \cdot H} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial C}{\partial r} + D_H \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{D_R}{r \cdot R} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial C}{\partial r}\right) + \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5 - QC}{V} \tag{19}$$

$$0 < r < 1,\quad 0 < z < 1,$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0,\quad (t,r,z) \in \partial D \times [0,T], \tag{20}$$

$$C(0,r,z) = C_0. \tag{21}$$

Численное решение краевых задач с использованием метода конечных разностей

Для решения нелинейных уравнений математической физики, на которых основаны математические модели процессов работы однолопастного конвективного аппарата, необходимо применять численные методы [3-5].

Уравнение (11) в разностном виде:

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{C_{ij} - C_{i,j-1}}{\tau} = -V_x \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2h} + D_L \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \frac{C_{i+1,j} - 2C_{ij} + C_{i-1,j}}{h^2} + f - \frac{Q}{V} \cdot C_{ij};$$

$$f = \frac{Q_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V}.$$

Краевая задача (11) – (13) сводится к системе

$$C_{ij} = A \cdot C_{i-1,j-1} + B \cdot C_{i,j-1} + D \cdot C_{i+1,j-1} + F; \qquad (22)$$

где

$$A = \left(\frac{V_x}{2 \cdot l \cdot h} + \frac{D_L}{l^2 h^2} \right) \cdot T \cdot \tau; \quad B = \left(1 - \frac{2 \cdot D_L \cdot T \cdot \tau}{l^2 h^2} - \frac{Q \cdot T \cdot \tau}{V} \right)$$

$$D = \left(\frac{D_L}{l^2 h^2} - \frac{V_x}{2 \cdot l \cdot h} \right) \cdot T \cdot \tau; \quad F = \frac{Q_1 (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V} \cdot T \cdot \tau.$$

Ниже приводятся блок-схема и описание программы.

Численная реализация двумерных моделей (8) – (10), (14) – (16):

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{C_{ij}^{k+0,5} - C_{ij}^{k}}{0,5 H_T} = -\frac{V_x}{l} \cdot \frac{C_{i+1,j}^{k+0,5} - C_{ij}^{k+0,5}}{h \cdot H_x} - \frac{V_y}{h} \cdot \frac{C_{i,j+1}^{k} - C_{ij}^{k}}{H_y} + \frac{D_L}{l^2} \cdot \frac{C_{i+1,j}^{k+0,5} - 2C_{ij}^{k+0,5} + C_{i-1,j}^{k+0,5}}{H_x^2} +$$

$$+ \frac{D_H}{h^2} \cdot \frac{C_{i,j+1}^{k} - 2C_{ij}^{k} + C_{i,j-1}^{k}}{H_y^2} + f.$$

Шаг $(k + 0,5)$:

$$\frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \cdot C_{i-1,j}^{k+0,5} - \left(\frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} + \frac{2 \cdot D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \right) \cdot C_{ij}^{k+0,5} + \left(\frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} \right) \cdot C_{i+1,j}^{k+0,5} =$$

$$\left(\frac{V_y}{h \cdot H_y} - \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \right) \cdot C_{i,j+1}^{k} + \left(\frac{2 \cdot D_H}{h^2 \cdot H_y^2} - \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} \right) \cdot C_{ij}^{k} - \frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \cdot C_{i,j-1}^{k} - f. \qquad (23)$$

Шаг $(k+1)$:

$$\frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \cdot C_{i,j-1}^{k+1} - \left(\frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} + \frac{2 \cdot D_H}{h^2 \cdot H_y^2} \right) \cdot C_{ij}^{k+1} + \left(\frac{D_H}{h^2 \cdot H_y^2} - \frac{V_y}{h \cdot H_y} \right) \cdot C_{i,j+1}^{k+1} =$$

$$= \left(\frac{V_x}{l \cdot H_x} - \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \right) \cdot C_{i+1,j}^{k+0,5} + \left(\frac{2 \cdot D_L}{l^2 \cdot H_x^2} - \frac{1}{0,5 \cdot T \cdot H_T} - \frac{V_x}{l \cdot H_x} \right) \cdot C_{ij}^{k+0,5} + \frac{D_L}{l^2 \cdot H_x^2} \cdot C_{i-1,j}^{k+0,5} + f. \qquad (24)$$

Краевая задача (8) – (10):

$$\psi(x_i, y_j) = \psi_{ij}; \quad i = 0,1,...,N; \quad j = 0,1,...,M;$$

$$\psi_{0j} = \psi_{Nj} = 0; \quad \psi_{i0} = \psi_{iM} = 0. \qquad (25)$$

Разностная форма уравнения (8):

$$\psi_{ij} = \frac{1}{4} \left(\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1} \right)$$

$$i = 0,1,...,N; \quad j = 0,1,...,M. \qquad (26)$$

Блок-схема, описание программы и сама программа приводятся ниже.

Метод конечных разностей для задачи (17) – (21):

$$C_{i+1,j} = C_{ij} \left(1 - \frac{T \cdot H_T \cdot Q}{V} - \frac{2D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} \right) + C_{i,j+1} \left(\frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot r \cdot R \cdot H_R} + \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} - \frac{V_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot R \cdot H_R} \right) +$$

$$+ C_{i,j-1} \left(\frac{V_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot R \cdot H_R} - \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{2 \cdot r \cdot R^2 \cdot H_R} + \frac{D_R \cdot T \cdot H_T}{R^2 \cdot H_R^2} \right) + \frac{Q_1 (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + Q_2 C_5}{V} \cdot T \cdot H_T, \qquad (27)$$

$$C_{i0} = C_{iN}; \quad C_{0j} = C_{0M} = C_0 \qquad (28)$$

Система уравнений (27) и (28) позволяет численно решить краевую задачу (19) – (21).

$$\frac{1}{H^2}\cdot\frac{\psi_{j,k+1}-2\psi_{jk}+\psi_{j,k-1}}{\Delta^2 z_k}+\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\psi_{j+1,k}-2\psi_{jk}+\psi_{j-1,k}}{H_R^2}-$$
$$-\frac{1}{R^2\cdot r_j}\cdot\frac{\psi_{j+1,k}-\psi_{j-1,k}}{2\cdot H_R}=\mu(r_j,z_k) \qquad (29)$$

$$\psi_{0k}=\psi_{Nk}=\psi_{j0}=\psi_{iM}=0 \qquad (30)$$

где $\psi(r_j,z_k)=\psi_{jk}; \quad j=0,1,...,N; \quad k=0,1,...,P.$

Блок-схема и описание программы приводятся ниже.

Программы моделирования и численные результаты.

Базовая компьютерная программа разработана для численного моделирования гидродинамических процессов при работе однолопастных машин конвективного типа.

Уравнение в безразмерных величинах имеет вид:

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{1}{l\cdot h}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{1}{l\cdot h}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{Д_L}{l^2}\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{Д_H}{h^2}\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+f_1+f_2+f_3$$
$$0<x<1, \quad 0<y<1, \quad 0<t<1 \qquad (31)$$

Начальное условие:

$$C(x,y,0)=C_0. \qquad (32)$$

Граничные условия при отсутствии обмена с внешней средой:

$$C_x(0,y,t)=C_x(1,y,t)=0$$
$$C_y(x,0,t)=C_y(x,1,t)=0. \qquad (33)$$

Функции f имеют вид:

$$f_1=\begin{cases}0 & x\neq x_1 \quad y\neq y_1\\ \dfrac{Q_1\cdot(C_1+C_2+C_3+C_4)}{V1} & x=x_1 \quad y=y_1,\end{cases} \qquad (34)$$

$$f_2=\begin{cases}0 & x\neq x_2 \quad y\neq y_2\\ \dfrac{Q_2\cdot C_5}{V1} & x=x_2 \quad y=y_2,\end{cases} \qquad (35)$$

$$f_3=\begin{cases}0 & x\neq x_3 \quad y\neq y_3\\ -\dfrac{Q\cdot C}{V1} & x=x_3 \quad y=y_3.\end{cases} \qquad (36)$$

Функция тока $\psi(x,y)$

$$\frac{1}{l^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{1}{h^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\mu(x,y),$$
$$0<x<1, \quad 0<y<1 \qquad (37)$$

$$\mu(x,y)=\begin{cases}\dfrac{W}{V1} & x=x_0 \quad y=y_0\\ \dfrac{W}{V1\cdot FN\cdot\left(l^2(x-x_0)^2+h^2\cdot(y-y_0)^2\right)} & x\neq x_0 \quad y\neq y_0\end{cases}, \qquad (38)$$

$$\psi(x,0)=\psi(x,1)=\psi(0,y)=\psi(1,y)=0. \qquad (39)$$

Переменные, указанные в уравнениях, имеют следующий смысл:

x, y – координаты пространства, безразмерные величины; *t* – время, с; *C* –концентрация твердой фазы в рабочем объеме цилиндра, содержащего суспензию, г/см^3; *l* – максимальный размер по оси X (радиус цилиндра), см; *H* – максимальный размер по оси Y (высота цилиндра), см; *Vl* – площадь поперечного сечения цилиндра, см; $Д_L$, $Д_H$ – коэффициенты продольной и поперечной диффузии, безразмерные величины; f_1, f_2 – функции, отражающие точечные источники твердой фазы, если они есть, г/(с-см); f_3 – функция, отражающая отток суспензии, г/(ссм); C_0 – начальное распределение концентрации твердой фазы, г/см^3; $(x_1,y_1)(x_2,y_2)$ – координаты точечных источников; (x_3,y_3) – координаты точечного оттока; Q_1, Q_2 – интенсивность источников, см^3/с; C_1,C_2,C_3,C_4,C_5 - характеристики источников (концентрация), г/см^3; *Q* – интенсивность оттока ($Q=Q_l+Q_2$) см^3/с; *C* – характеристика оттока, г/см; *T* – время исследования процесса, с; *W* - угловая скорость вращения лопасти, если в рабочем объеме устанавливается устойчиво конвективного перемешивания (при его отсутствии $W=0$), об/с; x_0, y_0 – координаты источника вращения; *FN* – вязкость суспензии, безразмерная величина.

На рис. 1 приведена блок-схема алгоритма.

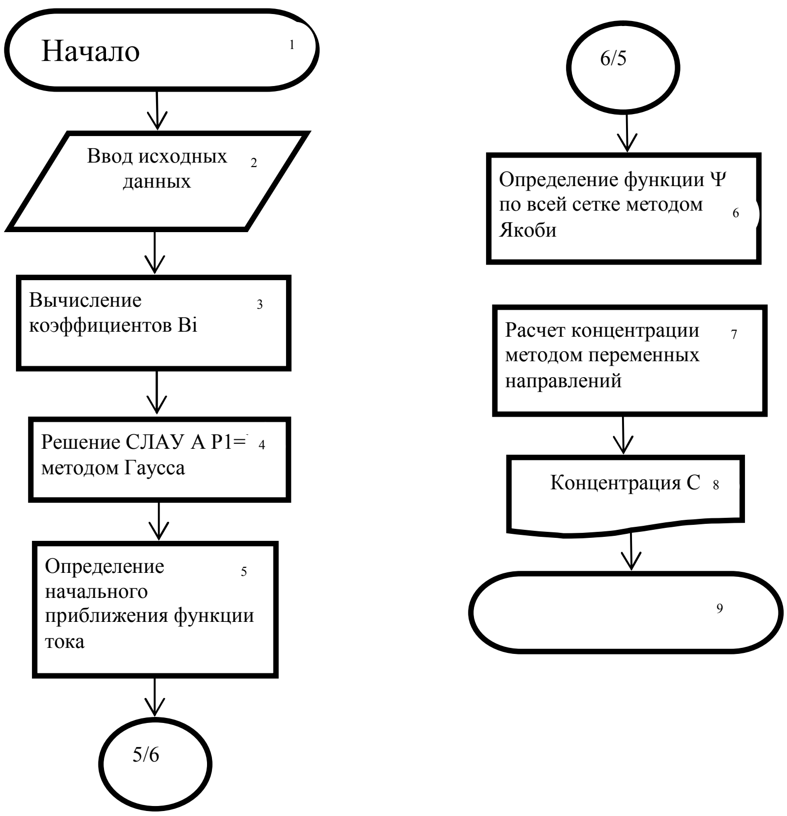

Рисунок 1 – Обобщённая блок-схема алгоритма численного решения задачи о распределении концентрации раствора в рабочем объёме аппарата

Для компьютерного исследования гидродинамических параметров разработана программная модель.

Назначение программы – численное решение задачи о распределении концентрации раствора в конвективном аппарате (31) – (36).

Результаты выводятся на печать в виде таблиц, снабженных комментариями, что упрощает их обработку. Концентрация твердой фазы печатается в виде таблицы 20×20, что соответствует сетке, представляющей сечение аппарата. По этим данным строятся кривые равного уровня, причем отрицательные значения опускаются (они соответствуют наличию «вихрей»).

Описание программ

Модель (1-D).

$$\frac{1}{T}\times\frac{C}{t}=-V_x\times\frac{1}{l}\times\frac{C}{x}+\frac{D_L}{l^2}\times\frac{{}^2C}{x^2}+f(x,t)$$

$$f(x,t)=\frac{Q_1(C_1+C_2+C_3+C_4)+Q_2C_5-QC}{V}$$

$$C_x(0,t)=C_x(l,t)=0$$

$$C(0,x)=C_0=40.$$

Модель (2-D), программа SILITE.

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-V_R\cdot\frac{\partial C}{\partial r}+\frac{D_R}{r}\cdot\frac{\partial C}{\partial r}+D_R\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}+\frac{Q_1(C_1+C_2+C_3+C_4)+Q_2C_5-QC}{V}$$

$$C_r(0,t)=C_r(R,t)=0$$

$$C(r,0)=40.$$

Модель(2-D*cyl*)

$$\frac{C}{t}=-V_z(r,z)\times\frac{C}{z}-V_r(r,z)\times\frac{C}{r}+D_L\times\frac{{}^2C}{z^2}+D_R\times\frac{1}{r}\times\frac{C}{r}+$$

$$+\frac{Q_1}{V}\times(C_1+C_2+C_3+C_4)+\frac{Q_2}{V}\times C_5-\frac{Q}{V}\times C$$

$$C(0,r,z)=40.$$

$$C_z(t,r,0)=C_z(t,r,20)=0$$

$$C_r(t,0,z)=C_r(t,10,z)=0$$

$$V_z=-0,005;\quad V_r=0,05;\quad D_L=D_R=0,005;\quad Q_1=25;$$

$$Q_2=40;\quad C_1=185,3;\quad C_2=20,6;\quad C_3=57,3;$$

$$C_4=2,5;\quad C_5=210;\quad V=6300;\quad Q=Q_1+Q_2.$$

Модель (2-D*xy*)

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-V_x\cdot\frac{\partial C}{\partial x}-V_y\cdot\frac{\partial C}{\partial y}+D_L\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+D_H\cdot\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{Q_1}{V}\cdot(C_1+C_2+C_3+C_4)+\frac{Q_2}{V}\cdot C_5-\frac{Q}{V}\cdot C;$$

$$-l<x<l;$$

$$-h<y<h;$$

$$0<t<T;$$

$$C(0,x,y)=40;$$

$$C_x(t,\pm l,0)=0;$$

$$C_y(t,x,\pm h)=0.$$

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = \frac{\omega}{x'^2 + y'^2}$$

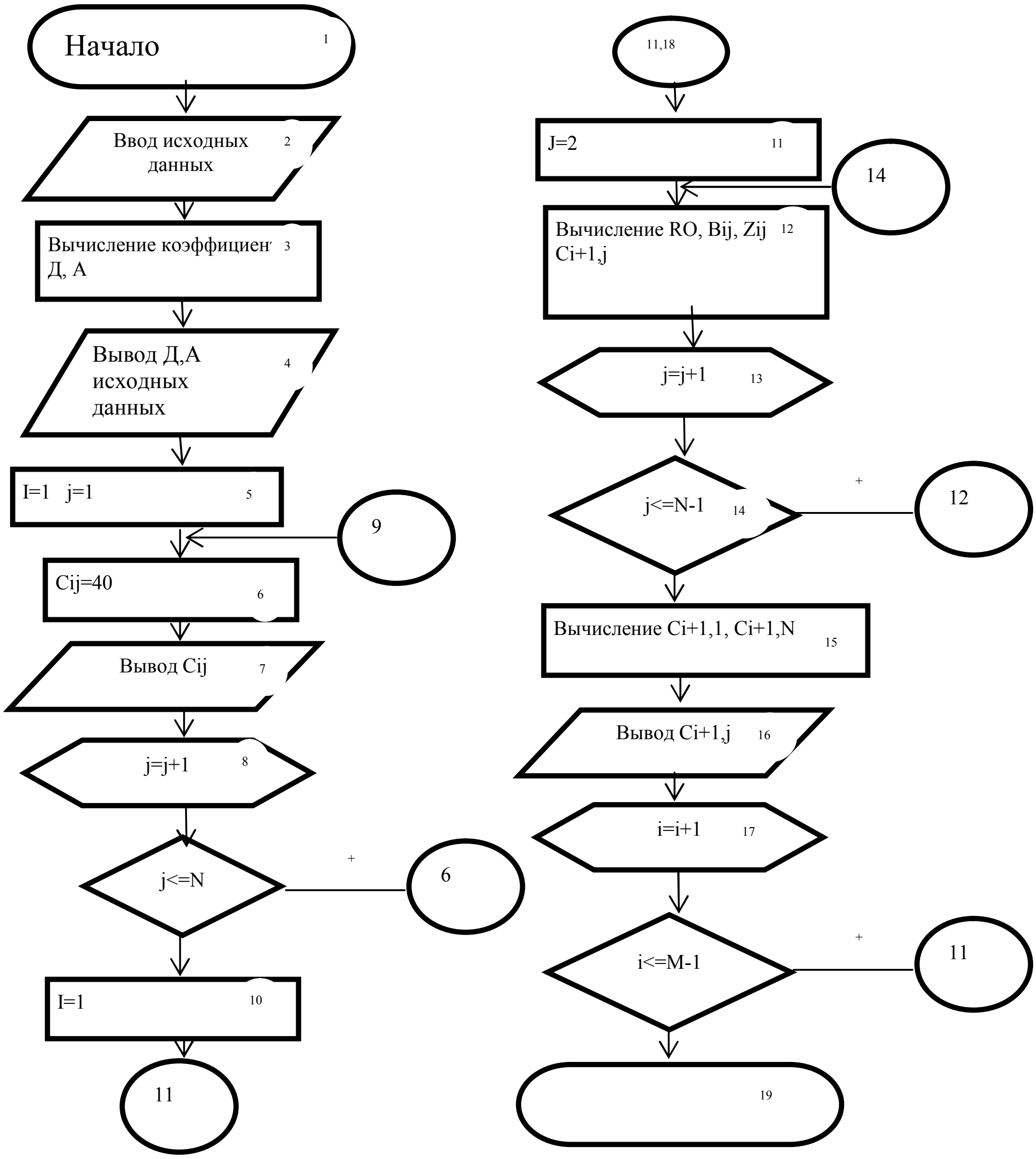

Рисунок 2 – Модель (1-D)

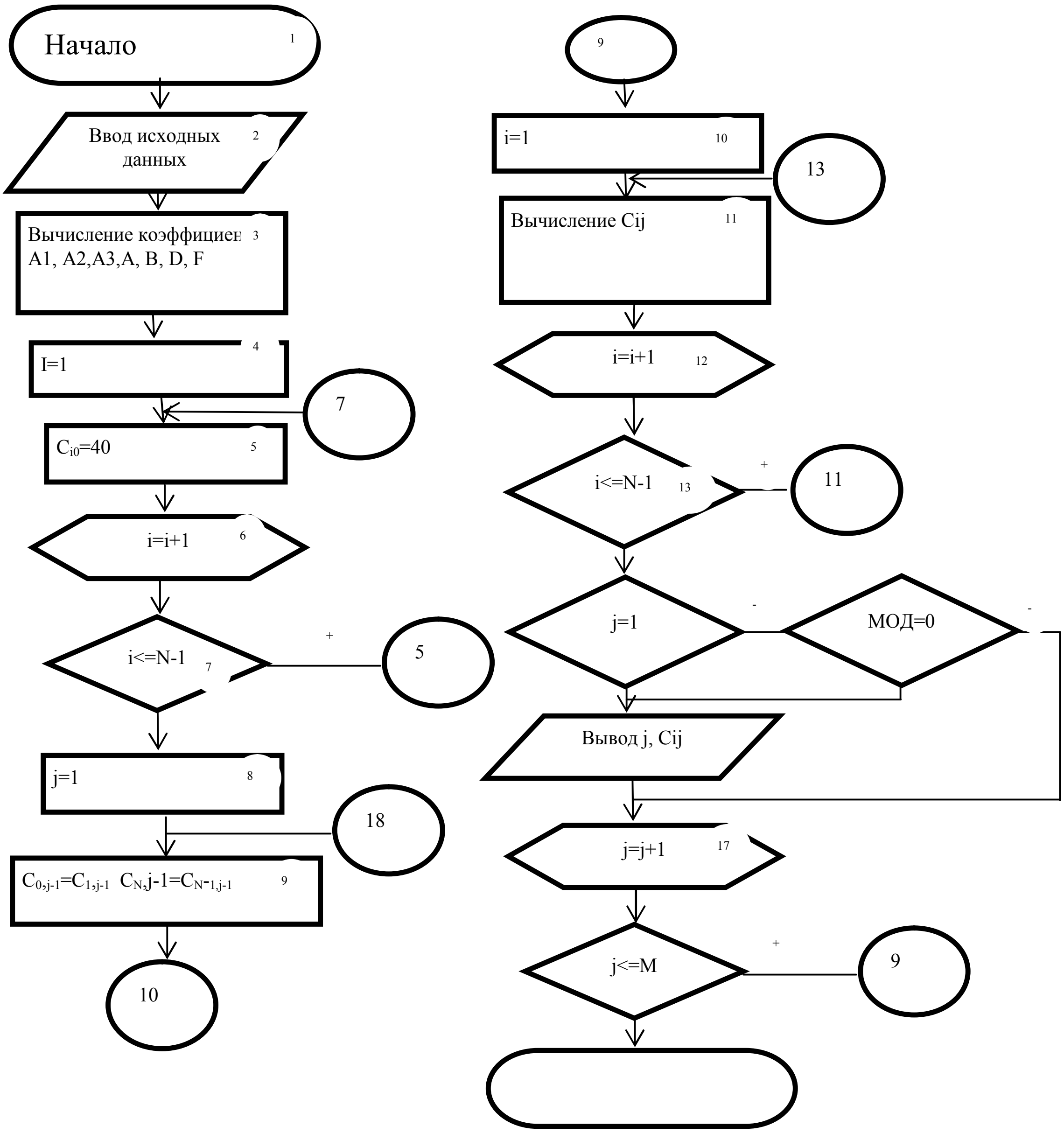

Рисунок 3 – Модель (2-D)

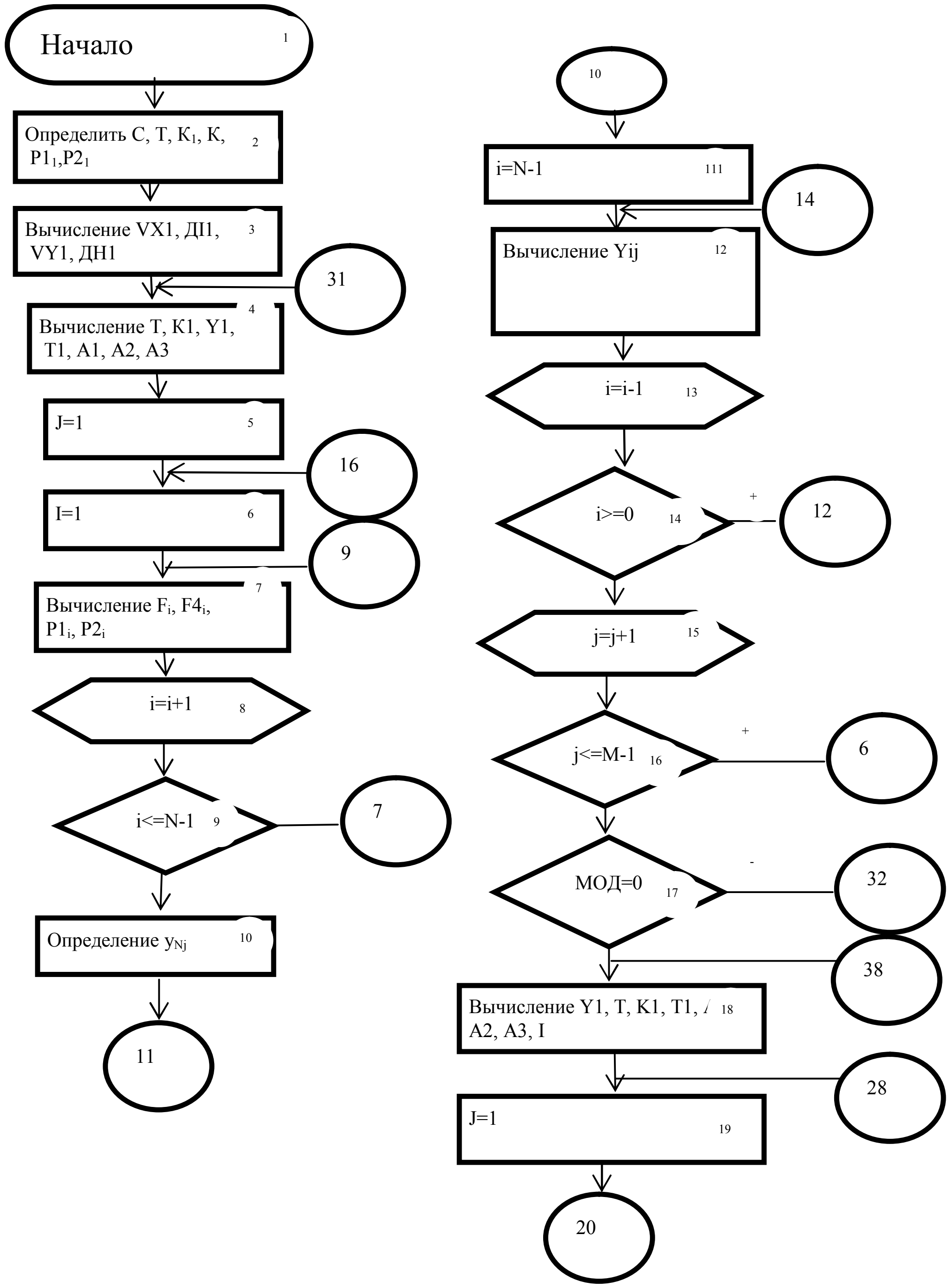

Рисунок 4 – Начало Модель (2-D*cyl*)

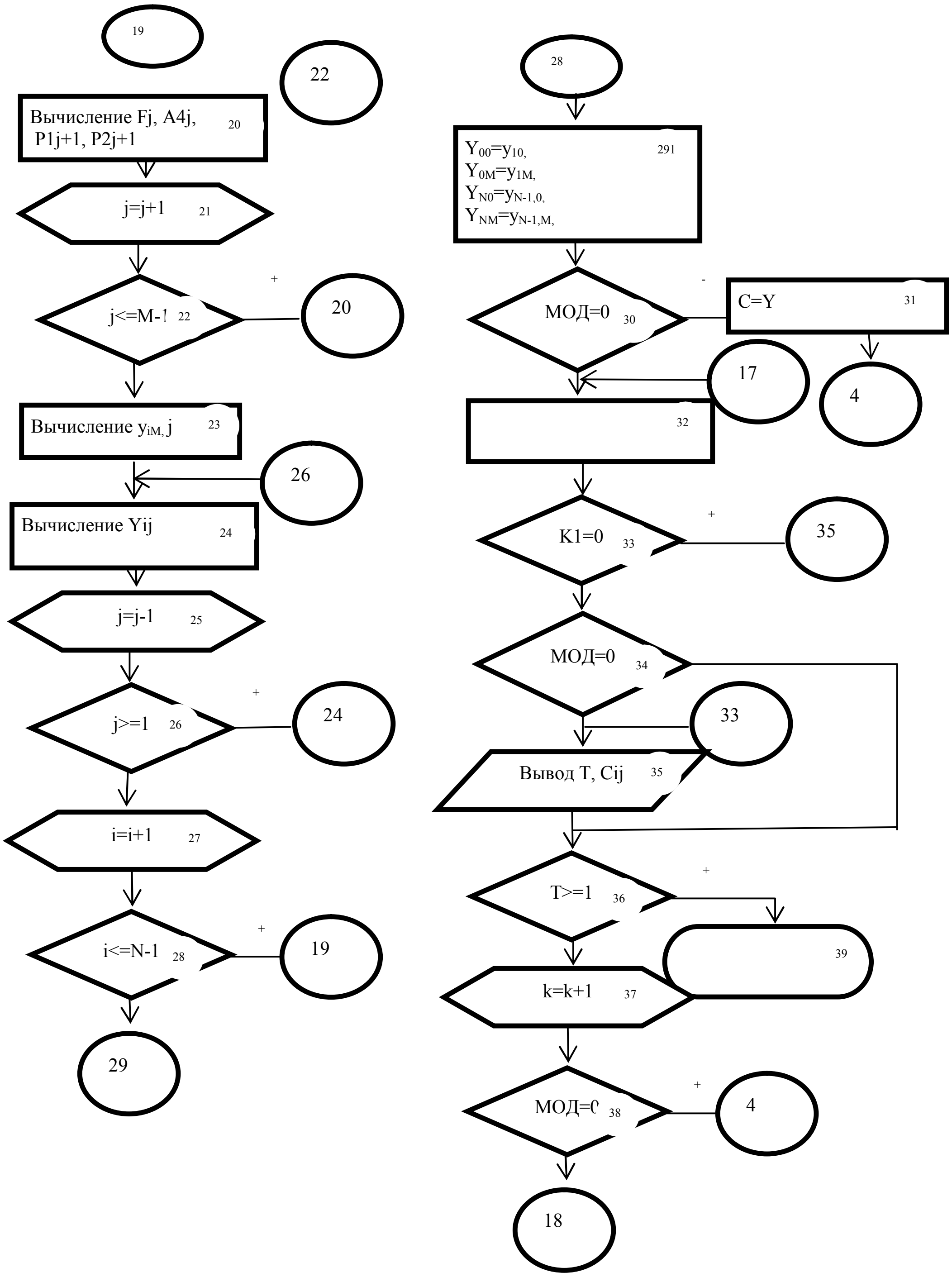

Рисунок 5– (продолжение Модель (2-D*cyl*))

Выводы

Впервые разработаны детерминированные математические модели процесса перемешивания многокомпонентной смеси в однолопастном конвективном аппарате.

Для решения задач исследования и совершенствования параметров выполнена численная реализация, разработаны алгоритмы и компьютерные программы, позволяющие применять разработки в различных технологических схемах, использующих принцип конвективного воздействия.

Предложенные модели и методы их реализации позволяют проводить численное моделирование процессов и решать задачи совершенствования как конструктивных, так и технологических параметров.

К достоинствам данного метода следует отнести возможность широкой вариации параметров без проведения физических и натурных экспериментов, что удешевляет и ускоряет процесс проектирования новой аппаратуры.

Список литературы

1. Павлыш В. Н. Расчет параметров машин, содержащих конвективные узлы, с применением компьютеров [Текст] / В. Н. Павлыш, Е. В. Перинская // Международный сборник трудов «Прогрессивные технологии и системы машиностроения». – Донецк, 2003. – Вып. 26. – С. 10–15.
2. Павлыш В. Н. Математическое моделирование процессов функционирования специализированных аппаратов конвективного типа [Текст] / В. Н. Павлыш, Е. В. Перинская // Международный рецензируемый научно-теоретический журнал «Проблемы искусственного интеллекта». – 2015. – № 1(15). – С. 89–98.
3. Математическое моделирование процессов обогащения полезных ископаемых : монография [Текст] / Павлыш В. Н., Назимко Е. И., Корчевский А. Н., Перинская Е. В., Серафимова Л. И., Голиков А. С. // под общ.ред. проф. В. Н. Павлыша, проф. Е. И. Назимко. – Донецк : «ВИК», 2014. – 463 с.
4. Павлыш В. Н. Математическое моделирование нестационарных процессов в среде с нечетко определенными параметрами [Текст] / В. Н. Павлыш, Г. Б. Перетолчина // Международный рецензируемый научно-теоретический журнал «Проблемы искусственного интеллекта». – 2018. – № 2(9). – С. 33–45.
5. Павлыш В. Н. Математические модели и алгоритмы управления процессами динамического воздействия на анизотропные подземные массивы [Текст] / В. Н. Павлыш, Л. А. Лазебная // Международный рецензируемый научно-теоретический журнал «Проблемы искусственного интеллекта». – 2019. – № 2(13). – С. 4–13.

References

1. Pavlysh V.N., Perinskaya E.V. Raschet parametrov mashin, soderzhashchikh konvektivnyye uzly, s primeneniyem komp'yuterov [The computer calculation of parameters of machines contains convective devices]. *Mezhdunarodnyy sbornik trudov «Progressivnyye tekhnologii i sistemy mashinostroyeniya»* [International scientific journal "Progressive machine-building technologies and systems"], ed. 26, pp. 10-15, Donetsk, 2003.
2. Pavlysh V.N., Perinskaya E.V. Matematicheskoye modelirovaniye protsessov funktsionirovaniya spetsializirovannykh apparatov konvektivnogo tipa [The mathematical modeling of functioning processes of special convective type apparatus]. *Mezhdunarodnyy retsenziruyemyy nauchno-teoreticheskiy zhurnal «Problemy iskusstvennogo intellekta»* [International peer-reviewed scientific journal "Problems of artificial intelligence"], 2015, No. 1(15), Donetsk, GU "IPAE", 2015, pp. 89-98
3. *Matematicheskoye modelirovaniye protsessov obogashcheniya poleznykh iskopayemykh* [The mathematical modeling of minerals enrichment process: *monograph*] / Pavlysh V.N., Nazimko E.I., Korchevski A.N., Perinskaya E.V., Serafimova L.I., Golikov A.S. // redact. prof. V.N. Pavlysh, E.I. Nazimko, Donetsk: "VIK", 2014, 463 p.
4. Pavlysh V.N., Peretolchina G.B. Matematicheskoye modelirovaniye nestatsionarnykh protsessov v srede s nechetko opredelennymi parametrami [The mathematical modeling ofnon-constant processes in environment with valid defined parameters]. *Mezhdunarodnyy retsenziruyemyy nauchno-teoreticheskiy zhurnal «Problemy iskusstvennogo intellekta»* [International peer-reviewed scientific journal "Problems of artificial intelligence"], 2018, No. 2(9), Donetsk, GU "IPAE", 2018, pp. 33-45
5. Pavlysh V.N., Lazebnaya L.A. Matematicheskiye modeli i algoritmy upravleniya protsessami dinamicheskogo vozdeystviya na anizotropnyye podzemnyye massivy [The mathematical models and control algorithms of dynamic action on anisotrophie underground massifs]. *Mezhdunarodnyy retsenziruyemyy nauchno-teoreticheskiy zhurnal «Problemy iskusstvennogo intellekta»* [International peer-reviewed scientific journal "Problems of artificial intelligence"], Donetsk, GU "IPAE", 2019, No. 2(13), pp. 4–13.

RESUME

E. V. Perinskaya

The Mathematical Models and Numerical Algorithms of Convective Process Investigation in Nonhomogeneous Environment

Traditional design methods have exhausted their capabilities; the most effective method for solving the problems under consideration is the method of mathematical modeling, which allows you to get a fairly wide range of data using a computer

The article is devoted to elaboration of determined three level mathematical models for computer modeling of process in convective type apparatus. The proposed mathematical models are based on the equations of particular derivatives. The ending conditions are formed according to geometrical parameters and technological properties. The computer realizing made by ending-difference approximation.

The proposed models and methods of their realizing allow us to provide numerical modeling of processes and find solution of problem of perfection as constructive both technological parameters. The preference of this method is possibility of wide variation of parameters without natural experiments and not require material resources.

The development of method of mathematical modeling for optimization of parameters of convective apparatus allows us to reduce the material and terminal resources during projecting of new types apparatus. Compared with the method of nature experiment results may be obtained by short time.

РЕЗЮМЕ

Е. В. Перинская

Математическое моделирование процессов функционирования специализированных аппаратов конвективного типа

Традиционные методы проектирования исчерпали свои возможности; наиболее эффективным методом решения рассматриваемых задач является метод математического моделирования, позволяющий получить с помощью компьютера достаточно широкий набор данных.

Данная статья посвящена разработке детерминированных математических моделей трех уровней для компьютерного моделирования процесса в аппарате конвективного типа. Предложенные математические модели основаны на уравнениях в частных производных. Краевые условия сформированы в соответствии с геометрическим параметрами и технологическими условиями. Выполнена численная реализация моделей методом конечно-разностной аппроксимации.

Предложенные модели и методы их реализации позволяют проводить численное моделирование процессов и решать задачи совершенствования как конструктивных, так и технологических параметров. К достоинствам данного метода следует отнести возможность широкой вариации параметров без натурных экспериментов дополнительных материальных ресурсов.

Развитие методов математического моделирования для решения задач оптимизации параметров конвективных аппаратов удешевляет и ускоряет процесс проектирования новой аппаратуры.

Статья поступила в редакцию 27.01.2020.