

УДК 004.921

В. Н. Беловодский, Р. В. Чудин

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
83001, г. Донецк, ул. Артема, 58

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФРАКТАЛОВ

V. N. Belovodskiy, R. V. Chudin

State Educational Institution of Higher Education "Donetsk national technical University", Donetsk city
83001, Donetsk, Artema str., 58

SYMMETRIC TRANSFORMATIONS OF FRACTALS

В. М. Беловодський, Р. В. Чудін

Державна освітня установа вищої професійної освіти «Донецький національний технічний університет», м. Донецьк
83001, м. Донецьк, вул. Артема, 58

СИМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФРАКТАЛІВ

В настоящее время фрактальные изображения широко используются в оформлении компьютерной продукции, полиграфической и строительной промышленности. Основным направлением их формирования является использование фракталов Жюлиа, Мандельброта или Ньютона для специально подбираемых функций комплексного переменного. Однако интуитивное влечение человека к симметрии наталкивает на мысль об использовании симметрических преобразований для формирования новых изображений на основе уже известных. В статье этот подход обсуждается на примере классических фракталов Коха, Дракона и Листа папоротника. Выполняются их аффинные преобразования (отражение, трансляция и поворот) и последующая композиция. Приводятся полученные изображения.

Ключевые слова: кривая Коха, контур Дракона, Лист папоротника, отражение, поворот, симметрия.

Currently, fractal images are widely used in the design of computer products, printing and construction industries. The main direction of their formation is the use of Julia, Mandelbrot or Newton fractals for specially selected functions of a complex variable. However, a person's intuitive attraction to symmetry suggests the idea of using symmetric transformations to generate new images based on already known ones. The article discusses this approach using the example of Koch, Dragon and Fern fractals. Their affine transformations (reflection, translation and rotation) and subsequent composition are performed. The resulting images are presented.

Key words: Koch's curve, Dragon outline, Fern leaf, reflection, rotation, symmetry.

В даний час фрактальні зображення широко використовуються в оформленні комп'ютерної продукції, поліграфічній і будівельній промисловості. Основним напрямком їхнього формування є використання фракталів Жюліа, Мандельброта або Ньютона для спеціально підібраних функцій комплексного змінного. Проте інтуїтивний потяг людини до симетрії нашоує на думку про використання симетричних перетворень для формування нових зображень на основі вже відомих. У статті цей підхід обговорюється на прикладі класичних фракталів Коха, Дракона і Листа папороті. Виконуються їхні афінні перетворення (відображення, трансляція і поворот) та подальша композиція. Наводяться отримані зображення.

Ключові слова: крива Коха, контур Дракона, Лист папороті, відображення, поворот, симетрія.

Введение

Красота и экзотичность фрактальных изображений открыли новую страницу в оформлении продукции полиграфии, создании декоративных элементов в текстильной и строительной промышленности, архитектурном дизайне интерьеров и экстерьеров [1], [2]. Традиционно, для этих целей используются фракталы Жюлиа, Мандельброта или Ньютона, рассматриваются линейные комбинации фрактальных изображений, формируемых итерациями различных функций комплексного переменного или сечениями образуемых ими поверхностей в пространствах той или иной размерности. Ведется поиск новых функций, «фрактальные итерации» которых имеют привлекательный вид. Однако некоторая внутренняя симметричность классических фрактальных изображений, проявление симметрии в природных объектах (рис. 1), в законах, описывающих свойства материи, наконец, интуитивное влечение к симметрии [3], [4] наталкивают на мысль об использовании симметрических преобразований и для формирования новых изображений на основе уже известных. Такая попытка предпринимается ниже и иллюстрируется на примере использования аффинных преобразований и последующей композиции получаемых изображений трех классических фракталов.



Рисунок 1 – Примеры двусторонней симметрии

В качестве обзора близких работ отметим, что особенности деформации плоских рисунков при действии на них аффинных преобразований описаны, в частности, в монографии [5]. В работе [6] приведены отдельные изображения, выполненные на основе фракталов Коха, Серпинского и Дракона, построение снежинок, а также примеры составления шестиугольных композиций. В работе [7] предлагаются способы построения фрактальных структур, основанных на правильных n -угольниках. Подход аналогичен хаотическому алгоритму построения салфетки Серпинского [8]. Рассматривается окружность с центром в начале координат и вписанный в неправильный многоугольник с заданным числом сторон. Затем, формируется система итерированных функций вида $F_k(z) = \frac{z + (r-1)z_k}{r}$, где z_k – вершина многоугольника, а r – коэффициент сжатия, и производится формирование итерационных последовательностей при случайным образом выбираемых функциях.

1 Базовые изображения

1.1 Кривая Коха. Реализуется с помощью отображений, которые в комплексной форме имеют вид [9]

$$T_1(z) = \frac{1}{3}z, \quad T_2(z) = \frac{1}{3}ze^{i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}, \quad T_3(z) = \frac{1}{3}ze^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{3+i\sqrt{3}}{6}, \quad T_4(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}.$$

При их использовании в системе итерированных функций с вероятностями $p_k = 0.25$ для 50 000 точек получаем результат (рис. 2).

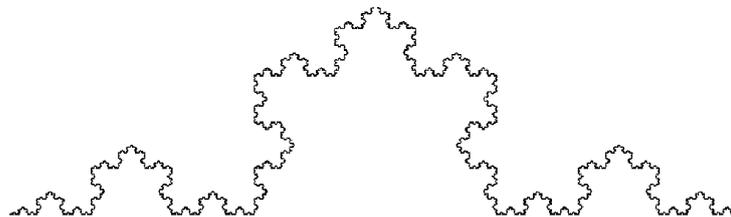


Рисунок 2 – Кривая Коха

1.2 Контур двойного Дракона Хартера-Хейтуэя

Формируется отображениями [9]

$$T_1(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} z e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad T_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} z e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} + i\frac{1}{4}, \quad T_3(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} z e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{4} - i\frac{1}{4},$$

которые при формировании системы итерированных функций используются с вероятностями $p_1 = p_3 = 0.205$, $p_2 = 0.590$. Базовое отображение представлено на рис. 3.

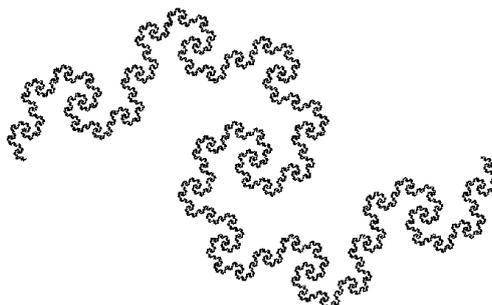


Рисунок 3 – Изображение контура двойного дракона, 250 000 точек

1.3 Лист папоротника

Формируется четырьмя аффинными преобразованиями [9]

$$T_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_k \\ f_k \end{pmatrix},$$

коэффициенты этих преобразований и соответствующие вероятности p_k их использования при формировании системы итерированных функций указаны в табл. 1.

Таблица 1

№	a_k	b_k	c_k	d_k	e_k	f_k	p_k
T_1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
T_2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
T_3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
T_4	-0.15	0.28	-0.26	0.24	0	0.44	0.07

Базовое изображение представлено на рис. 4.



Рисунок 4 – Лист папоротника, 150 000 точек

2 Используемые преобразования

Для построения новых изображений будем использовать комбинацию аффинных преобразований – отражение, трансляция и поворот, и с их помощью формировать новые симметричные комбинации. В комплексных числах каждое из них описывается так:

- отражение относительно оси Ox : $T(z) = \bar{z}$;
- отражение относительно оси Oy : $T(z) = -\bar{z}$;
- поворот относительно начала координат: $T(z) = z \cdot e^{i\varphi}$;
- трансляция или перенос: $T(z) = z + z_0$;
- симметрия относительно начала координат: $T(z) = -z$.

3 Эксперименты, результаты

Расчеты и последующая визуализация результатов была проведена с использованием языка программирования – $C\#$ в среде программирования Microsoft Visual Studio. Был разработан модуль, интерфейс которого приводится на рис. 5, в котором были предусмотрены следующие возможности:

- формирование таблицы коэффициентов системы итерированных функций. Это выполняется вручную или с помощью excel-файла.
- задание набора преобразований (центральная или осевая симметрия, отражение и поворот) и их параметров;
- число расчетных точек и т.д.

После набора данных и запуска программного модуля производится расчет заданного числа точек по табличным исходным данным, выполнение указанных преобразований, формирование изображения и создание композиции.

Изложим полученные результаты.

3.1 Преобразование Кривой Коха

Рассмотрим два ее варианта.

Вар.а). Выполняется композиция первоначального отображения (рис. 1) и его отражения относительно оси Ox . Затем к полученной комбинации добавляются результаты ее поворота на углы $\varphi = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Алгоритмически это может быть реализовано различными способами, в частности,

- формирование первоначального изображения K_0 (рис.1);
- его отражение относительно Ox : $\overline{K_0}$;
- симметричное отображение полученных изображений относительно начала координат: $-K_0$ и $-\overline{K_0}$;
- поворот каждого из полученных, на предыдущих шагах, изображений на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $K_0 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\overline{K_0} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-K_0 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-\overline{K_0} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$;
- объединение всех полученных множеств:

$$K = K_0 \cup \overline{K_0} \cup (-K_0) \cup (-\overline{K_0}) \cup \left(K_0 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \right) \cup \left(\overline{K_0} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \right) \cup \left(-K_0 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \right) \cup \left(-\overline{K_0} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \right). (1)$$

Вывод итогового изображения на экран (рис. 6).

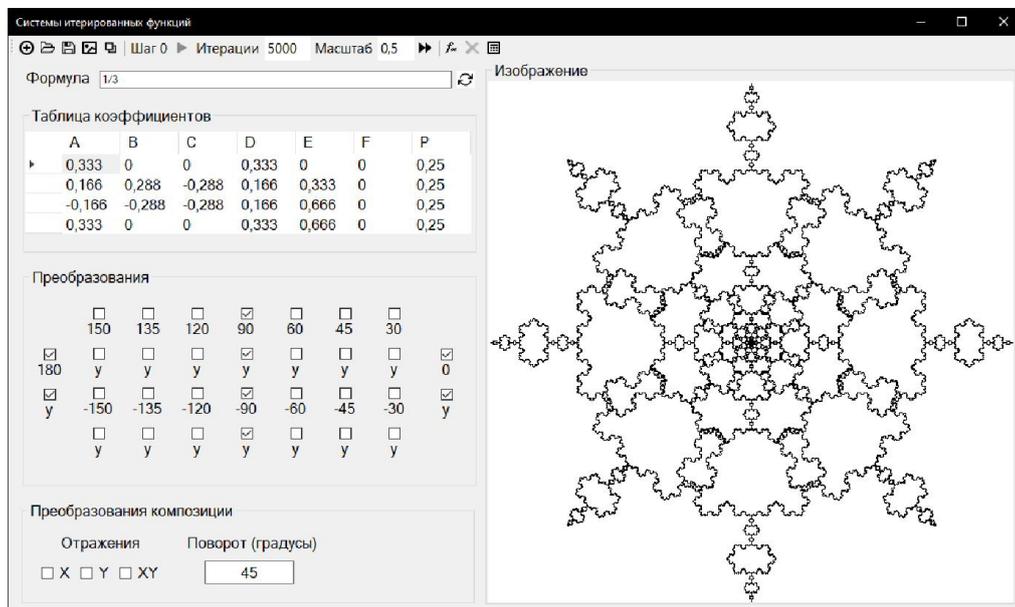


Рисунок 5 – Интерфейс программы

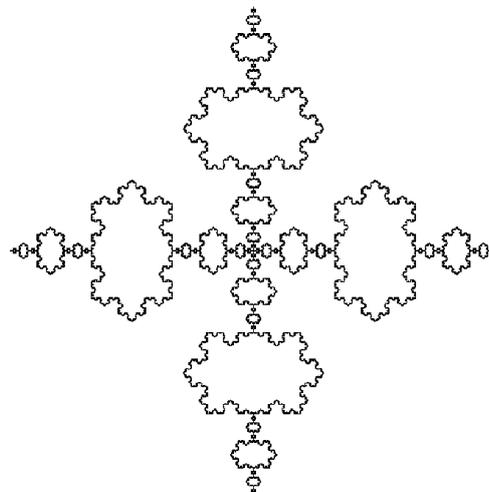


Рисунок 6 – Изображение K

Вар. б). Поворот полученного в Вар. а) изображения (рис. 5) на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и его композиция с исходным. Программно это может быть выполнено так:

$$\tilde{K} = K \cup K \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Результат представлен на рис. 7.

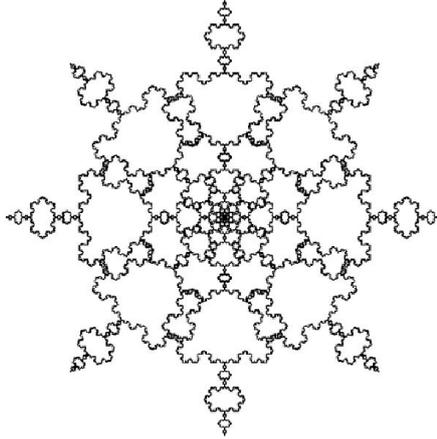


Рисунок 7 – Изображение множества \tilde{K}

3.2 Преобразование Контура Дракона

Выполним следующие построения:

- 1) формируем первоначальное изображение D_0 ;
- 2) выполняем поворот изображения D_0 на угол $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Получаем $D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$;
- 3) выполняем поворот изображения D_0 на угол $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Получаем $D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$;
- 4) выполняем поворот изображения D_0 на угол $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$. Получаем $D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}$;
- 5) выполняем поворот изображения D_0 на угол $\varphi = -\pi$. Получаем $D_0 \cdot e^{-i\pi}$;
- 6) выполняем отражение полученных на шагах 3), 4), 5) изображений относительно оси Oy . Получаем $\overline{-D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}$, $\overline{-D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$, $\overline{-D_0 \cdot e^{-i\pi}}$;

7) выполняем отражение изображений, полученных на шагах 1) – 6), относительно оси Ox . Получаем

$$\overline{\overline{D_0}}, \overline{\overline{D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}}}, \overline{\overline{D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}}, \overline{\overline{D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}}}, \overline{\overline{D_0 \cdot e^{-i\pi}}}, \overline{\overline{-D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}} = -D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\overline{\overline{-D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}}} = -D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \overline{\overline{-D_0 \cdot e^{-i\pi}}} = -D_0 \cdot e^{-i\pi}$$

- 8) выводим все полученные изображения на экран.

Получаем

$$D = D_0 \cup D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \cup D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \cup D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} \cup D_0 \cdot e^{-i\pi} \cup \left(\overline{-D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}} \right) \cup \left(\overline{-D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}} \right) \cup \\ \cup \left(\overline{-D_0 \cdot e^{-i\pi}} \right) \cup \overline{D_0} \cup D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \cup D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \cup D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} \cup D_0 \cdot e^{-i\pi} \cup \\ \cup \left(-D_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \right) \cup \left(-D_0 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) \cup \left(-D_0 \cdot e^{-i\pi} \right)$$

Заметим, что порядок следования преобразований и поэтапная компоновка изображений может быть и иной. То есть одна конечная композиция, вообще говоря, допускает различные алгоритмы ее реализации. Полученный результат представлен на рис. 8.

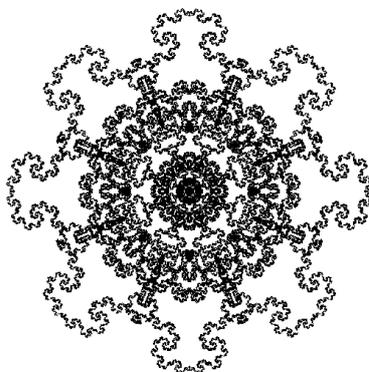


Рисунок 8 – Изображение множества D

3.3 Преобразование Листа папоротника

Преобразования, описанные в п. 3.2, но уже примененные к базовому изображению Листа папоротника (рис. 4), дают следующий результат (рис. 9).

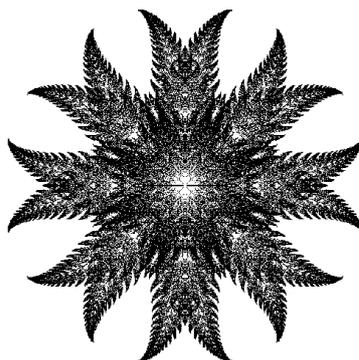


Рисунок 9 – Композиция на основе Листа папоротника

Процесс формирования новых изображений предложенным образом может быть продолжен. Коллекция некоторых из них представлена на рис. 10, где первый верхний ряд изображений получен на основе кривой Коха, следующий ряд – на основе контура Дракона, третий – Листа папоротника и, наконец, последний нижний ряд – на основе комбинации видоизмененного контура Дракона, кривой Коха и Листа папоротника.

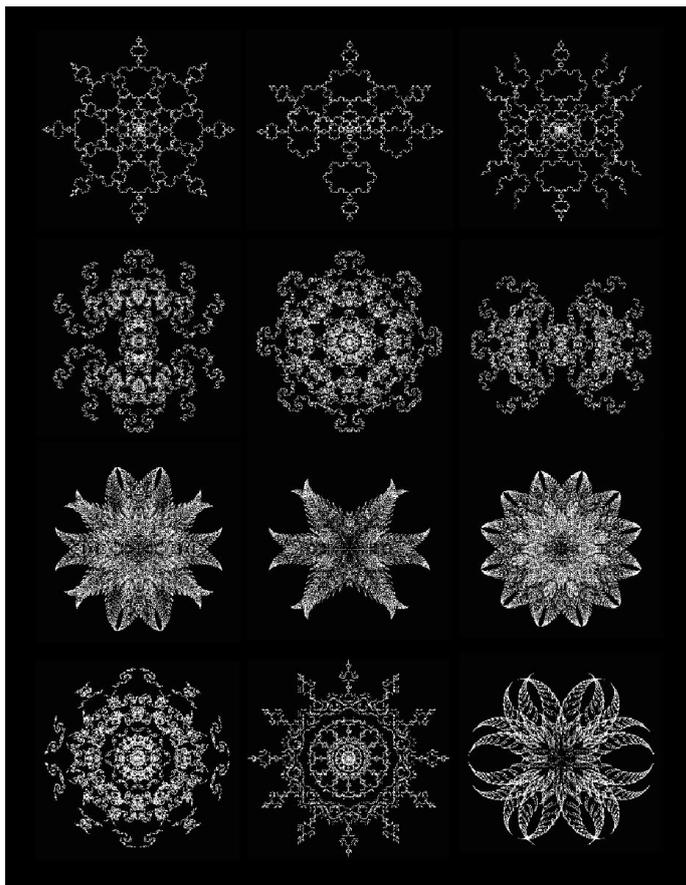


Рисунок 10 – Другие композиции

Заключение

В работе показана перспективность генерирования новых фрактальных изображений путем аффинных преобразований классических. Представленные результаты демонстрируют возможность конструирования простыми средствами новых изображений не менее интересных, чем первоначальные. С учетом правил композиции, такой подход может оказаться оправданным в изобразительном искусстве и дизайне. Сочетание переносной, скользящей, зеркальной и поворотной симметрий может помочь принимать оригинальные дизайнерские решения при создании компьютерной продукции, декоративном художественном творчестве, в процессе формирования орнаментов в полиграфической или строительной промышленности, настенной росписи.

Список литературы

1. Бойков А. А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними [Текст] / А. А. Бойков, Е. В. Орлова, А. В. Чернова, А. А. Шкилевич // Материалы VIII Международной научно-практической конференции «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации». – 2019. – Вып. 5. – Пермь : Пермский нац. исслед. политехн. ун-т. – С. 325–339.
2. Трубочкина Н. К. Новый промышленный дизайн и технологии как результат математико-компьютерных фрактальных исследований [Текст] / Н. К. Трубочкина // Качество. Инновация. Образование. Ежемесячный научно-практический журнал. – 2012. – № 5(84). – С. 76–81.
3. Симметрия [Электронный ресурс] // Википедия. – Режим доступа : <https://ru.wikipedia.org/wiki/Симметрия> (Дата обращения 31.01.2021).

4. Тарасов Л. В. Этот удивительно симметричный мир: Пособие для учащихся [Текст] / Л. В. Тарасов. – М. : Просвещение, 1982. – 176 с.
5. Barnsley, M. F. *Superfractals* [Текст] / M. F. Barnsley. – New York: Cambridge University Press, 2006. – 464 p.
6. Lawrence, H. R. *Heighway Dragon Boundary* [Электронный ресурс] / H. R. Lawrence. – Режим доступа : <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/heighway/heighwayBoundary.htm> (Дата обращения 31.01.2021).
7. Василенко С. Л. Фрактальные многоугольники и «золотое» сечение [Электронный ресурс] / С. Л. Василенко. – Режим доступа : <https://docplayer.ru/47747992-Fraktalnye-mnogougolniki-i-zolotoe-sechenie.html> (Дата обращения 02.02.2021).
8. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории [Текст] / Р. М. Кроновер. – Москва : Постмаркет, 2000. – 352 с.
9. Божокин С.В. Фракталы и мультифракталы [Текст] / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2019. – 128 с.
10. Беловодский В. Н. О скорости сходимости итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений [Текст] / В. Н. Беловодский, Г. Т. Клишко // Проблемы искусственного интеллекта. – 2020. – № 1(16). – С. 40–50.

References

1. Bojkov A. A., Orlova E.V., Chernova A. V., Shkilevich A. A. O sozdanii fraktal'nyh obrazov dlya dizajna i poligrafii i nekotoryh geometricheskikh obobshcheniyah, svyazannyh s nimi [On the creation of fractal images for design and printing and some geometric generalizations associated with them]. *Materialy VIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Problemy kachestva graficheskoy podgotovki studentov v tekhnicheskome vuze: tradicii i innovacii»* [Materials of the VIII International Scientific and Practical Conference "Problems of the quality of graphic training of students in a technical university: traditions and innovations"], 2019, Vyp. 5, Perm', Permskij nac. issled. politekh. un-t, pp. 325-339.
2. Trubochkina N. K. Novyj promyshlennyj dizajn i tekhnologii kak rezul'tat matematiko-komp'yuternyh fraktal'nyh issledovanij [New industrial design and technologies as a result of mathematical and computer fractal research] *Kachestvo. Innovaciya. Obrazovanie. Ezhemesyachnyj nauchno-prakticheskij zhurnal*. [Quality. Innovation. Education. Monthly scientific and practical journal], 2012, No. 5(84), pp. 76-81.
3. *Simmetriya* [Symmetry], Vikipediya. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Simmetriya> (Data obrashcheniya 31.01.2021).
4. Tarasov L. V. *Etot udivitel'no simmetrichnyj mir: Posobie dlya uchashchihsya* [This Wonderfully Symmetrical World: A Student's Handbook], M., Prosveshchenie, 1982, 176 s.
5. Barnsley, M.F. *Superfractals*, New York, Cambridge University Press, 2006, 464 p.
6. Lawrence, H.R. *Heighway Dragon Boundary* [Elektronnyj resurs] <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/heighway/heighwayBoundary.htm> (Data obrashcheniya 31.01.2021).
7. Vasilenko, S.L. *Fraktal'nye mnogougolniki i «zolotoe» sechenie* [Fractal polygons and the golden ratio] <https://docplayer.ru/47747992-Fraktalnye-mnogougolniki-i-zolotoe-sechenie.html> (Data obrashcheniya 02.02.2021).
8. Kronover, R.M. *Fraktaly i haos v dinamicheskikh sistemah. Osnovy teorii* [Fractals and chaos in dynamical systems. Fundamentals of Theory], Moskva, Postmarket, 2000, 352 s.
9. Bozhokin, S.V., Parshin D. A. *Fraktaly i mul'tifraktaly* [Fractals and multifractals], Izhevsk, NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», Institut komp'yuternyh issledovanij, 2019, 128 s.
10. Belovodskiy V. N., Klimko G. T. O skorosti skhodimosti iteratsionnykh metodov resheniya sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [On the Convergence Rate of Iterative Methods for Solving Systems of Linear Algebraic Equations]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of artificial intelligence], 2020, No. 1 (16), pp. 40–50.

RESUME

V. N. Belovodskiy, R. V. Chudin

Symmetric Transformations of Fractals

Currently fractal images are widely used in the design of computer products, printing and construction industries. One of the directions of their formation is the use of Julia, Mandelbrot or Newton fractals for specially selected functions of a complex variable. However, a person's intuitive striving for symmetry suggests the idea of using symmetric transformations to form new images based on already known ones.

The article discusses this approach on the base of three images. A group of classical fractals (Koch's curve, Dragon outline and Fern leaf) is considered, their affine transformations (reflection, translation and rotation) are performed and new images are constructed by composing the resulting ones.

The calculation procedure is described, the transformations carried out are indicated. A group of new images was obtained; their illustrations are shown. The work was performed using the C# programming language in the Microsoft Visual Studio programming environment.

The presented results demonstrate the possibility of constructing by simple means new images no less interesting than the original ones. Subject to the rules of composition, this approach may be justified in computer design and visual arts, architectural design of buildings and premises.

РЕЗЮМЕ

В. Н. Беловодский, Р. В. Чудин

Симметрические преобразования фракталов

В настоящее время фрактальные изображения широко используются в оформлении компьютерной продукции, полиграфической и строительной промышленности. Одним из направлений их формирования является использование фракталов Жюлиа, Мандельброта или Ньютона для специально подбираемых функций комплексного переменного. Однако интуитивное стремление человека к симметрии наталкивает на мысль об использовании симметрических преобразований для формирования новых изображений на основе уже известных.

В статье этот подход иллюстрируется на примере трех изображений. Рассматривается группа классических фракталов (кривая Коха, контур Дракона и лист Папоротника), выполняются их аффинные преобразования (отражение, трансляция и поворот) и производится конструирование новых изображений путем композиции получаемых.

Описан порядок расчетов, указаны проводимые преобразования. Получена группа новых изображений, приведены их иллюстрации. Работа выполнена с использованием языка программирования – C# в среде программирования Microsoft Visual Studio.

Представленные результаты демонстрируют возможность конструирования простыми средствами новых изображений, не менее интересных, чем первоначальные. С учетом правил композиции, такой подход может оказаться оправданным в компьютерном дизайне и изобразительном искусстве, архитектурном оформлении зданий и помещений.

Статья поступила в редакцию 14.01.2021.