Ш

УДК 519.63

О. А. Шевчук
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
286123, г. Макеевка, ул. Державина, 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛКИ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ

O. A. Shevshuk
State Educational Institution of Higher Professional Education «Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture»
286123, Makeyevka, str. Derzhavina, 2

MATHEMATICAL MODELING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A BEAM WITH A DISTRIBUTED LOAD

О. О. Шевчук
Державна освітня установа вищої професійної освіти «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»
286123, м. Макіївка, вул. Державіна, 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАЛКИ З РОЗПОДІЛЕНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

В статье предложена математическая модель расчета балки при одной равномерно-распределенной нагрузке, выполненная путем аппроксимации численного решения дифференциальных уравнений методами геометрического моделирования. Рассмотрено применение указанного метода для решения дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков с одной независимой переменной. Установлено совпадение с высокой степенью точности на уровне полиномиальных коэффициентов решений уравнений предложенным методом с точными решениями.
Ключевые слова: математическое моделирование, аппроксимация, численное решение, дифференциальные уравнения, напряжённо-деформированное состояние.

The article proposes a mathematical model for calculating a beam with a single uniformly distributed load, which is performed by approximating the numerical solution of differential equations by geometric modeling methods. The application of this method for solving second-and fourth-order differential equations with one independent variable is considered. It is established that the solutions of the equations by the proposed method coincide with exact solutions with a high degree of accuracy at the level of the polynomial coefficients.
Keywords: mathematical modeling, approximation, numerical solution, differential equations, stress-strain state.

У статті запропонована математична модель розрахунку балки при одному рівномірно-розподіленому навантаженні, виконана шляхом апроксимації чисельного розв'язку диференціальних рівнянь методами геометричного моделювання. Розглянуто застосування зазначеного методу для розв'язання диференціальних рівнянь другого та четвертого порядків з однією незалежною змінною. Встановлено збіг з високим ступенем точності на рівні поліноміальних коефіцієнтів розв'язків рівнянь запропонованим методом з точними розв'язками.
Ключові слова: математичне моделювання, апроксимація, чисельне рішення, диференціальні рівняння, напружено-деформований стан.

Введение

В связи со стремительным развитием информационных технологий и систем автоматизированного проектирования сокращаются сроки проектирования и подготовки производства для выпуска новой и модернизируемой продукции, оптимизируется и усовершенствуется процесс проектирования, возрастает оперативность и обоснованность принимаемых решений на различных уровнях предприятия.

В настоящее время любые пакеты автоматизированного проектирования используют численные методы решения дифференциальных уравнений (ДУ). Среди классических методов можно выделить такие, как метод Галеркина, метод конечных элементов [1], метод конечных разностей [2] и т.д.

Несмотря на достоинства этих методов, такие как относительная простота и наглядность, существует и ряд недостатков.

Например, в случае линейной постановки задачи расчеты выполняются быстро, но не всегда соответствует реальному протеканию процесса. В случае задачи нелинейного характера общим недостатком указанных методов является большое время расчета. К тому же, решение зависит от многих факторов, в том числе и от того, кто и как моделировал процесс.

Метод численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов предложен в работах [3-5]. Предполагается, что использование данного подхода позволит получать численное решение дифференциальных уравнений в частных производных и их систем требуемой точности в кратчайшие сроки даже с учетом нелинейной постановки исходной задачи моделирования. Автором ставится задача апробировать указанный метод, при этом для наглядности предлагается рассмотреть его на простых примерах.

Расчет напряженно-деформированного состояния металлической балки

Задачи расчетов пространственных конструкций представляют собой очень важную и актуальную составляющую современных прикладных задач в целом. Напряженно-деформированное состояние различных конструкций или их отдельных элементов описывается дифференциальными уравнениями. Вид этих уравнений для каждого конкретного случая зависит от физических и геометрических характеристик, которые принимаются при моделировании поведения системы.

Рассмотрим ДУ второго порядка, которое описывает напряженно-деформированное состояние балки [6],

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \tag{1}$$

где $M(x)$ – изгибающий момент; I – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной прямой, лежащей в плоскости сечения и проходящей через его центр тяжести; E – модуль Юнга материала балки.

Изгибающий момент $M(x)$ можно выразить через известную внешнюю нагрузку $q(x)$, действующую на балку

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} = q(x) \\ \dfrac{dM}{dx} = Q \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q(x).$$

С учетом этого выражения дифференциальное уравнение (1) принимает вид:

$$M(x) = EI\frac{d^2y}{dx^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = q(x).$$

В случае постоянной жесткости EI получим ДУ четвертого порядка, которое описывает напряженно-деформированное состояние балки [6]:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}. \tag{2}$$

Для решения уравнений (1) и (2) применимы указанные выше численные методы [7], а также существуют специальные расчетные формулы в технической литературе для вычисления максимальной нагрузки и прогиба балки [8].

В данной работе предлагается найти численное решение указанных ДУ методами геометрического моделирования [9]. Аппроксимация решения ДУ основана на построении геометрических объектов многомерного пространства, инцидентных узловым точкам, получившим название геометрических интерполянтов. Общий подход к аппроксимации решения дифференциальных уравнений изложен в работе [10].

Рассмотрим указанный метод решения ДУ на следующих примерах.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -0,00239x(9-x) \tag{3}$$

на интервале $x \in [0;9]$ с граничными условиями $y(0) = y(9) = 0$.

Данное уравнение при задании соответствующих граничных условий определяет прогиб балки, шарнирно опертой по концам и загруженной равномерно распределенной нагрузкой.

В качестве аппроксимирующей дуги кривой выберем модифицированную дугу кривой Безье 4-го порядка, которая описывается следующим точечным уравнением [11], [12]:

$$\begin{aligned} M = {} & M_1\left(\bar{t}^4 - \frac{13}{3}\bar{t}^3 t + \frac{13}{3}\bar{t}^2 t^2 - \bar{t}t^3\right) + M_2\left(16\bar{t}^3 t - \frac{64}{3}\bar{t}^2 t^2 + \frac{16}{3}\bar{t}t^3\right) + \\ & + M_3\left(-12\bar{t}^3 t + 40\bar{t}^2 t^2 - 12\bar{t}t^3\right) + M_4\left(\frac{16}{3}\bar{t}^3 t - \frac{64}{3}\bar{t}^2 t^2 + 16\bar{t}t^3\right) + \\ & + M_5\left(-\bar{t}^3 t + \frac{13}{3}\bar{t}^2 t^2 - \frac{13}{3}\bar{t}t^3 + t^4\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Выполнив покоординатный расчёт, получим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = x_1\left(\bar{t}^4 - \frac{13}{3}\bar{t}^3 t + \frac{13}{3}\bar{t}^2 t^2 - \bar{t}t^3\right) + x_2\left(16\bar{t}^3 t - \frac{64}{3}\bar{t}^2 t^2 + \frac{16}{3}\bar{t}t^3\right) + \\ + x_3\left(-12\bar{t}^3 t + 40\bar{t}^2 t^2 - 12\bar{t}t^3\right) + x_4\left(\frac{16}{3}\bar{t}^3 t - \frac{64}{3}\bar{t}^2 t^2 + 16\bar{t}t^3\right) + \\ + x_5\left(-\bar{t}^3 t + \frac{13}{3}\bar{t}^2 t^2 - \frac{13}{3}\bar{t}t^3 + t^4\right); \\ y = y_1\left(\bar{t}^4 - \frac{13}{3}\bar{t}^3 t + \frac{13}{3}\bar{t}^2 t^2 - \bar{t}t^3\right) + y_2\left(16\bar{t}^3 t - \frac{64}{3}\bar{t}^2 t^2 + \frac{16}{3}\bar{t}t^3\right) + \\ + y_3\left(-12\bar{t}^3 t + 40\bar{t}^2 t^2 - 12\bar{t}t^3\right) + y_4\left(\frac{16}{3}\bar{t}^3 t - \frac{64}{3}\bar{t}^2 t^2 + 16\bar{t}t^3\right) + \\ + y_5\left(-\bar{t}^3 t + \frac{13}{3}\bar{t}^2 t^2 - \frac{13}{3}\bar{t}t^3 + t^4\right). \end{cases} \quad (5)$$

Будем закладывать равномерное распределение точек по оси Ox. Для этого разобьем интервал $x \in [0,9]$ на 4 равные части и получим следующие значения координат узловых точек: $x_1 = 0;\ x_2 = 2,25;\ x_3 = 4,5;\ x_4 = 6,75;\ x_5 = 9$.

Тогда система параметрических уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} x = 9t; \\ y = y_1\left(\bar{t}^4 - \frac{13}{3}\bar{t}^3 t + \frac{13}{3}\bar{t}^2 t^2 - \bar{t}t^3\right) + y_2\left(16\bar{t}^3 t - \frac{64}{3}\bar{t}^2 t^2 + \frac{16}{3}\bar{t}t^3\right) + \\ + y_3\left(-12\bar{t}^3 t + 40\bar{t}^2 t^2 - 12\bar{t}t^3\right) + y_4\left(\frac{16}{3}\bar{t}^3 t - \frac{64}{3}\bar{t}^2 t^2 + 16\bar{t}t^3\right) + \\ + y_5\left(-\bar{t}^3 t + \frac{13}{3}\bar{t}^2 t^2 - \frac{13}{3}\bar{t}t^3 + t^4\right). \end{cases} \quad (6)$$

Выразив переменную t через x, получим уравнение дуги аппроксимирующей кривой в явном виде:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{9}; \\ y = y_1\left(1 - \frac{25}{27}x + \frac{70}{243}x^2 - \frac{80}{2187}x^3 + \frac{32}{19683}x^4\right) + y_2\left(\frac{16}{9}x - \frac{208}{243}x^2 + \frac{32}{243}x^3 - \frac{128}{19683}x^4\right) + \\ + y_3\left(-\frac{4}{3}x + \frac{76}{81}x^2 - \frac{128}{729}x^3 + \frac{64}{6561}x^4\right) + y_4\left(\frac{16}{27}x - \frac{112}{243}x^2 + \frac{224}{2187}x^3 - \frac{128}{19683}x^4\right) + \\ + y_5\left(-\frac{1}{9}x + \frac{22}{243}x^2 - \frac{16}{729}x^3 + \frac{32}{19683}x^4\right). \end{cases} \quad (7)$$

Продифференцировав уравнение дуги аппроксимирующей кривой дважды и подставив результат дифференцирования в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$y_1\left(\frac{140}{243} - \frac{160}{729}x + \frac{128}{6561}x^2\right) + y_2\left(-\frac{416}{243} + \frac{64}{81}x - \frac{512}{6561}x^2\right) + y_3\left(\frac{152}{81} - \frac{256}{243}x + \frac{256}{2187}x^2\right) + \\ + y_4\left(-\frac{224}{243} + \frac{448}{729}x - \frac{512}{6561}x^2\right) + y_5\left(\frac{44}{243} - \frac{32}{243}x + \frac{128}{6561}x^2\right) = -0,00239x(9-x) \quad (8)$$

Согласно условию, на концах интервала $[0;9]$ значение функции равно нулю. Таким образом, при $x=0$ и $x=9$ примем $y_1=y_5=0$.

При поочередной подстановке координат узловых точек $x_2=2,25$, $x_3=4,5$ и $x_4=6,75$ в (8) получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} y_1=0; \\ -0,32922y_2+0,09876y_3+0,06584y_4=-0,03625; \\ 0,26337y_2-0,49383y_3+0,26337y_4=-0,04833; \\ 0,06584y_2+0,09876y_3-0,32922y_4=-0,03625; \\ y_5=0; \end{cases} \tag{9}$$

решив которую, получим следующие значения:

$$y_1=0;\ y_2=0,29055;\ y_3=0,40779;\ y_4=0,29055;\ y_5=0. \tag{10}$$

После подстановки $y_i\ \left(i=\overline{1,5}\right)$ (10) в уравнение (7) получим искомое уравнение дуги аппроксимирующей кривой:

$$y=0,00020x^4-0,00358x^3+0,14499x. \tag{11}$$

Решение краевой задачи методом вариации произвольных постоянных [13] имеет вид:

$$y=0,0001989x^4-0,00358x^3+0,1449908x. \tag{12}$$

Заметим, что решения (11) и (12) совпадают с высокой степенью точности даже на уровне полиномиальных коэффициентов.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dx^4}=0,0048 \tag{13}$$

на интервале $x\in[0;9]$ со следующими граничными условиями $y(0)=y(9)=0$, $y'(9)=0,\ y''(0)=0$.

Данное уравнение при задании соответствующих граничных условий определяет прогиб балки, шарнирно опертой по концам и загруженной равномерно распределенной нагрузкой.

В качестве аппроксимирующей дуги кривой выберем модифицированную дугу кривой Безье 5-го порядка, которая описывается следующим точечным уравнением [11], [12]:

$$\begin{aligned} M=&M_1\left(\bar t^5-\frac{77}{12}\bar t^4t+\frac{269}{24}\bar t^3t^2-\frac{77}{12}\bar t^2t^3+\bar tt^4\right)+M_2\left(25\bar t^4t-\frac{725}{12}\bar t^3t^2+\frac{925}{24}\bar t^2t^3-\frac{25}{4}\bar tt^4\right)+\\ &+M_3\left(-25\bar t^4t+\frac{1475}{12}\bar t^3t^2-\frac{576}{6}\bar t^2t^3+\frac{50}{3}\bar tt^4\right)+M_4\left(\frac{50}{3}\bar t^4t-\frac{576}{6}\bar t^3t^2+\frac{1475}{12}\bar t^2t^3-25\bar tt^4\right)+\\ &+M_5\left(-\frac{25}{4}\bar t^4t+\frac{925}{24}\bar t^3t^2-\frac{725}{12}\bar t^2t^3+25\bar tt^4\right)+M_6\left(\bar t^4t-\frac{77}{12}\bar t^3t^2+\frac{269}{24}\bar t^2t^3-\frac{77}{12}\bar tt^4+t^5\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Выполнив покоординатный расчёт, получим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = x_1\left(\overline{t}^5 - \frac{77}{12}\overline{t}^4 t + \frac{269}{24}\overline{t}^3 t^2 - \frac{77}{12}\overline{t}^2 t^3 + \overline{t}t^4\right) + x_2\left(25\overline{t}^4 t - \frac{725}{12}\overline{t}^3 t^2 + \frac{925}{24}\overline{t}^2 t^3 - \frac{25}{4}\overline{t}t^4\right) + \\ + x_3\left(-25\overline{t}^4 t + \frac{1475}{12}\overline{t}^3 t^2 - \frac{576}{6}\overline{t}^2 t^3 + \frac{50}{3}\overline{t}t^4\right) + x_4\left(\frac{50}{3}\overline{t}^4 t - \frac{576}{6}\overline{t}^3 t^2 + \frac{1475}{12}\overline{t}^2 t^3 - 25\overline{t}t^4\right) + \\ + x_5\left(-\frac{25}{4}\overline{t}^4 t + \frac{925}{24}\overline{t}^3 t^2 - \frac{725}{12}\overline{t}^2 t^3 + 25\overline{t}t^4\right) + x_6\left(\overline{t}^4 t - \frac{77}{12}\overline{t}^3 t^2 + \frac{269}{24}\overline{t}^2 t^3 - \frac{77}{12}\overline{t}t^4 + t^5\right); \\ y = y_1\left(\overline{t}^5 - \frac{77}{12}\overline{t}^4 t + \frac{269}{24}\overline{t}^3 t^2 - \frac{77}{12}\overline{t}^2 t^3 + \overline{t}t^4\right) + y_2\left(25\overline{t}^4 t - \frac{725}{12}\overline{t}^3 t^2 + \frac{925}{24}\overline{t}^2 t^3 - \frac{25}{4}\overline{t}t^4\right) + \\ + y_3\left(-25\overline{t}^4 t + \frac{1475}{12}\overline{t}^3 t^2 - \frac{576}{6}\overline{t}^2 t^3 + \frac{50}{3}\overline{t}t^4\right) + y_4\left(\frac{50}{3}\overline{t}^4 t - \frac{576}{6}\overline{t}^3 t^2 + \frac{1475}{12}\overline{t}^2 t^3 - 25\overline{t}t^4\right) + \\ + y_5\left(-\frac{25}{4}\overline{t}^4 t + \frac{925}{24}\overline{t}^3 t^2 - \frac{725}{12}\overline{t}^2 t^3 + 25\overline{t}t^4\right) + y_6\left(\overline{t}^4 t - \frac{77}{12}\overline{t}^3 t^2 + \frac{269}{24}\overline{t}^2 t^3 - \frac{77}{12}\overline{t}t^4 + t^5\right). \end{cases} \quad (15)$$

Закладываем равномерное распределение точек по оси Ox . Для этого разобьем интервал $x \in [0,9]$ на 5 равных частей и получим значения координат узловых точек: $x_1 = 0;\ x_2 = 1,8;\ x_3 = 3,6;\ x_4 = 5,4;\ x_5 = 7,2;\ x_6 = 9$.

Тогда система параметрических уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} x = 9t; \\ y = y_1\left(\overline{t}^5 - \frac{77}{12}\overline{t}^4 t + \frac{269}{24}\overline{t}^3 t^2 - \frac{77}{12}\overline{t}^2 t^3 + \overline{t}t^4\right) + y_2\left(25\overline{t}^4 t - \frac{725}{12}\overline{t}^3 t^2 + \frac{925}{24}\overline{t}^2 t^3 - \frac{25}{4}\overline{t}t^4\right) + \\ + y_3\left(-25\overline{t}^4 t + \frac{1475}{12}\overline{t}^3 t^2 - \frac{576}{6}\overline{t}^2 t^3 + \frac{50}{3}\overline{t}t^4\right) + y_4\left(\frac{50}{3}\overline{t}^4 t - \frac{576}{6}\overline{t}^3 t^2 + \frac{1475}{12}\overline{t}^2 t^3 - 25\overline{t}t^4\right) + \\ + y_5\left(-\frac{25}{4}\overline{t}^4 t + \frac{925}{24}\overline{t}^3 t^2 - \frac{725}{12}\overline{t}^2 t^3 + 25\overline{t}t^4\right) + y_6\left(\overline{t}^4 t - \frac{77}{12}\overline{t}^3 t^2 + \frac{269}{24}\overline{t}^2 t^3 - \frac{77}{12}\overline{t}t^4 + t^5\right). \end{cases} \quad (16)$$

Выразив переменную t через x , получим уравнение дуги аппроксимирующей кривой в явном виде. Продифференцировав его четырежды и подставив результат дифференцирования в исходное дифференциальное уравнение, находим:

$$\begin{aligned} & y_1\left(\frac{625}{2187} - \frac{3125}{59049}x\right) + y_2\left(-\frac{8750}{6561} + \frac{15625}{59049}x\right) + y_3\left(\frac{16250}{6561} - \frac{31250}{59049}x\right) + \\ & + y_4\left(-\frac{5000}{2187} + \frac{31250}{59049}x\right) + y_5\left(\frac{6875}{6561} - \frac{15625}{59049}x\right) + y_6\left(-\frac{1250}{6561} + \frac{3125}{59049}x\right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно условию, на концах интервала $[0;9]$ значение функции равно нулю. Таким образом, при $x = 0$ и $x = 9$ примем $y_1 = y_6 = 0$.

Далее воспользуемся координатами узловых точек.

При $x = 3,6$ получим:

$$-0,38104y_2 + 0,57156y_3 - 0,38104y_4 + 0,09526y_5 = 0,00477.$$

При $x = 5,4$ получим:

$$0,09526y_2 - 0,38104y_3 + 0,57156y_4 - 0,38104y_5 = 0,00477.$$

В качестве уравнений в узловых точках $x = 1,8$ и $x = 7,2$ запишем уравнения граничных условий $y'(9)=0,\ y''(0)=0$ соответственно:

$$0,69444y_2-1,85185y_3+2,77778y_4-2,77778y_5=0,$$
$$-3,96091y_2+5,50412y_3-4,01235y_4+1,56893y_5=0.$$

Таким образом, получим СЛАУ:

$$\begin{cases} y_1=0; \\ -0,38104y_2+0,57156y_3-0,38104y_4+0,09526y_5=0,00477; \\ 0,09526y_2-0,38104y_3+0,57156y_4-0,38104y_5=0,00477; \\ 0,69444y_2-1,85185y_3+2,77778y_4-2,77778y_5=0; \\ -3,96091y_2+5,50412y_3-4,01235y_4+1,56893y_5=0; \\ y_6=0, \end{cases} \tag{18}$$

решив которую, находим:

$$y_1=0;\ y_2=0,11692;\ y_3=0,16912;\ y_4=0,13780;\ y_5=0,05428;\ y_6=0.$$

Подставив полученные значения $y_i\left(i=\overline{1,6}\right)$в (17), получим искомое уравнение дуги аппроксимирующей кривой:

$$y=0,00020x^4-0,00269x^3+0,07250x. \tag{19}$$

Следует отметить, что в качестве аппроксимирующей функции был выбран полином 5-й степени, но в результате аппроксимации в процессе решения коэффициент при x^5 оказался равным нулю. Это говорит о том, что даже при выборе избыточной степени полинома, метод отсечет лишние слагаемые и даст нужный результат.

В качестве эталонного примем решение, полученное методом вариации произвольных постоянных [13]:

$$y=0,0001989x^4-0,002685x^3+0,0724954x. \tag{20}$$

Выводы

В статье выполнена аппроксимация численного решения дифференциальных уравнений методами геометрического моделирования на примерах расчета балки на двух шарнирных опорах при одной равномерно-распределенной нагрузке. Сравнение полученных результатов с точными решениями демонстрирует высокую степень достоверности предложенного метода.

Перспективой дальнейших исследований является применение представленного метода аппроксимации для расчета напряженно-деформированного состояния балки с другими видами нагрузок, а также для расчета напряжённо-деформированного состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Список литературы

1. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы [Текст] / Р. Галлагер ; Пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
2. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Ортега, У. Пул ; Пер. с англ.; под ред. А.А. Абрамова. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
3. Konopatskiy E. V. Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application / E. V. Konopatskiy, A. A. Bezditnyi, O. A. Shevchuk // CEUR Workshop Proceedings, 2020. – Vol. 2744. – DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.

4. Шевчук О. А. Решение дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов [Текст] / О. А. Шевчук, Е. В. Конопацкий // Информационные технологии в проектировании и производстве. – М.: НТЦ «Компас», 2020. – № 3. – С. 29–33.
5. Конопацкий, Е. В. Использование геометрических интерполянтов для численного решения дифференциальных уравнений [Текст] / Е. В. Конопацкий, О. А. Шевчук // Информационные технологии: материалы 84-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 3–15 февраля 2020 года. – Минск : БГТУ, 2020. – С. 194–196.
6. Горшков А. Г. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. [Текст] / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
7. Лебедев, А. В. Численные методы расчета строительных конструкций: учеб. пособие [Текст] / А. В. Лебедев; СПбГАСУ. – СПб., 2012. – 55 с.
8. Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Писаренко Г. С, Яковлев А. П., Матвеев В. В.; отв. ред. Писаренко Г. С. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев : Наук, думка, 1988. – 736 с.
9. Конопацкий Е.В. Решение дифференциальных уравнений методами геометрического моделирования [Текст] / Е.В. Конопацкий // Труды 28-й Международной конференция по компьютерной графике и машинному зрению «GraphiCon 2018». 24–27 сентября 2018 г. – Томск : ТПУ, 2018. – С. 322–325.
10. Konopatskiy, E. V. About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants [Текст] / E. V. Konopatskiy, O. S. Voronova, O. A. Shevchuk, A. A. Bezditnyi. – CEUR Workshop Proceedings, 2020. – Vol. 2763. – pp. 213-219. – DOI: 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.
11. Найдыш, В. М. Алгебра БН-исчисления [Текст] / В. М. Найдыш, И. Г. Балюба, В. М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомчий науково-технічний збірник. – К. : КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 210–215.
12. Балюба И. Г. Точечное исчисление: учебно-методическое пособие [Текст] / Балюба И. Г., Конопацкий Е. В., Бумага А. И. – Макеевка : ДОННАСА, 2020. – 244 с.
13. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / Степанов В. В. – М. : Эдиториал УРСС. – Изд. 8, стер. – 2004. – 472 с.

References

1. Gallager R. *Metod konechnyx e'lementov. Osnovy* [Finite element method. Basics], Moscow, 1984, 428 p.
2. Ortega Dzh., Pul U. Vvedenie v chislennye metody resheniya differencial'nyx uravnenij [Introduction to numerical methods for solving differential equations], Moscow, 1986, 288 p.
3. Konopatskiy E.V., Bezditnyi A.A., Shevchuk O.A. Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020, Vol. 2744, DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.
4. Shevchuk O.A., Konopatskiy E.V. Reshenie differencial'nyx uravnenij s pomoshch'yu geometricheskix interpo'lantov [Solving differential equations by using geometric interpolants], *Informacionnye texnologii v proektirovanii i proizvodstve* [Information technology in design and production], Moscow, STC "Compass", 2020, No. 3, pp. 29-33.
5. Konopatskiy E.V., Shevchuk O.A. Ispol'zovanie geometricheskix interpo'lantov d'la chislennogo resheniya differencial'nyx uravnenij [Use of geometric interpolants for numerical solution of differential equations]. *Informacionnye texnologii: materialy 84-j nauchno-texnicheskoj konferencii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnyx sotrudnikov i aspirantov (s Mezhdunarodnym uchastiem)* [Information technology: materials of the 84th scientific and technical. conferences of faculty, researchers and graduate students (with international participation), Minsk, February 3-15, 2020] Minsk, BGTU, 2020, pp. 194-196.
6. Gorshkov, A.G., Troshin V.N., Shalashilin V.I. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials], Moscow, 2005, 544 p.
7. Lebedev, A. V. *Chislennye metody rascheta stroitel'nyx konstrukcij* [Numerical methods for calculating building structures], St. Petersburg, 2012, 55 p.
8. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P. , Matveev V.V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Reference for resistance of materials], Kiev, 1988, 736 p.

9. Konopackij E.V. Reshenie differencial'nyx uravnenij metodami geometricheskogo modelirovaniya [Solution of differential equations by methods of geometric modeling]. *Trudy 28-j Mezhdunarodnoj konferenciya po komp'yuternoj grafike i mashinnomu zreniyu «GraphiCon 2018»* [Proceedings of the 28th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision "GraphiCon 2018"], pp. 322-325.
10. Konopatskiy E.V., Voronova O.S., Shevchuk O.A., Bezditnyi A.A. *About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants*, CEUR Workshop Proceedings, 2020, Vol. 2763, pp. 213-219.
DOI: 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.
11. Najdysh, V.M., Balyuba I.G., Vereshchaga V.M. Algebra BN-ischisleniya [Algebra of BN-calculation]. *Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika: Mizhvidomchsj naukovo- texnichnij zbirnik* [Applied Geometry and Engineering Graphics: Interdisciplinary Science and Technology Institute], Kiev, 2012, pp. 210-215.
12. Balyuba I.G., Konopatskiy E.V., Bumaga A.I. *Tochechnoe ischislenie* [Point calculus: educational and methodological guide], Makeyevka, 2020, 244 p.
13. Stepanov, V.V. *Kurs differencial'nyx uravnenij* [Course of differential equations], Moscow, 2004, 472 p.

RESUME

O. A. Shevshuk

Mathematical modeling of the stress-strain state of a beam with a distributed load

The rapid development of information technologies and computer-aided design systems has contributed to the emergence of a huge number of specialized programs in various fields of human activity. The mathematical software of computer-aided design packages contains mathematical models, numerical methods, and algorithms for performing design procedures.

Among the classical numerical methods for solving differential equations, there are the Galerkin method, the finite element method, the finite difference method, etc. Despite the advantages of these methods, there are a number of disadvantages.

In this paper, the author sets the task of testing the method of numerical solution of differential equations using geometric interpolants. It is assumed that the use of this approach will allow us to obtain a numerical solution of the required accuracy in the shortest possible time, even taking into account the nonlinear formulation of the original modeling problem.

This method is considered using examples of calculating the deflection of a beam that is pivotally supported at the ends and loaded with a uniformly distributed load. The equations obtained as a result of the experiment coincide with a high degree of accuracy with the reference equations obtained by the method of variation of arbitrary constants, even at the level of polynomial coefficients.

The author sees the prospect of further research in the application of the proposed approximation method for calculating the stress-strain state of a beam with other types of loads, as well as for calculating the stress-strain state of thin-walled shells of engineering structures.

РЕЗЮМЕ

О. А. Шевчук
Математическое моделирование напряжённо-деформированного состояния балки с распределенной нагрузкой

Стремительное развитие информационных технологий и систем автоматизированного проектирования способствовало появлению огромного количества специализированных программ в различных отраслях деятельности человека. Математическое обеспечение пакетов автоматизированного проектирования содержит математические модели, численные методы, алгоритмы выполнения проектных процедур.

Среди классических численных методов решения дифференциальных уравнений выделяют метод Галеркина, метод конечных элементов, метод конечных разностей и т.д. Несмотря на достоинства этих методов, существует и ряд недостатков.

В работе автором ставится задача апробировать метод численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов. Предполагается, что использование данного подхода позволит получать численное решение требуемой точности в кратчайшие сроки даже с учетом нелинейной постановки исходной задачи моделирования.

Указанный метод рассмотрен на примерах расчета прогиба балки, шарнирно опертой на концах и загруженной равномерно-распределенной нагрузкой. Полученные в результате эксперимента уравнения совпадают с высокой степенью точности с эталонными уравнениями, полученными методом вариации произвольных постоянных, даже на уровне полиномиальных коэффициентов.

Перспективу дальнейших исследований автор видит в применении предложенного метода аппроксимации для расчета напряженно-деформированного состояния балки с другими видами нагрузок, а также для расчета напряжённо-деформированного состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Статья поступила в редакцию 25.12.2020.