

УДК 539.3:534.1

В. Н. Павлыш¹, С. В. Сторожев²

¹Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк 283001, г. Донецк, ул. Артема, 58

²Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», г. Макеевка 286123, г. Макеевка, ул. Державина, 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА

V. N. Pavlysh¹, S. V. Storozhev²

¹State educational institution of higher professional education «Donetsk National Technical University», Donetsk 283001, Donetsk, st. Artema, 58

²State educational institution of higher professional education «Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture», Makeevka 286123, Makeevka, st. Derzhavin, 2

MATHEMATICAL MODELING IN STABILITY PROBLEMS BASED ON THE THEORY OF FUZZY-MULTIPLE ANALYSIS

Представлено решение задачи распространения численно-аналитической нечетко-множественной методики описания эффектов влияния исходных физико-механических и геометрических параметров на случай анализа математической модели потери устойчивости тонкой замкнутой изотропной оболочки, подверженной воздействию интенсивных статических сжимающих усилий. Методика предполагает применение приема нормализации экзогенных параметров модели с переходом к их нечетко-интервальным представлениям с применением эвристического принципа обобщения. Приведены отдельные результаты численных исследований с применением излагаемой методики.

Ключевые слова: прикладные модели, статическое деформирование, неопределенные параметры, эвристические методы, теория нечетких множеств.

The solution of the problem of propagation of a numerical-analytical fuzzy-multiple methodology for describing the effects of the influence of the initial physical, mechanical and geometric parameters on the case of analyzing the mathematical model of buckling of a thin closed isotropic shell exposed to intense static compressive forces is presented. The technique involves the use of the technique of normalizing the exogenous parameters of the model with the transition to their fuzzy interval representations using the heuristic principle of generalization. Some results of numerical studies using the described technique are presented.

Key words: applied models, static deformation, undefined parameters, heuristic methods, theory of fuzzy sets.

Введение и цели исследования

Исследования статических деформационных моделей устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций [1], в частности оболочек замкнутой тороидальной формы, несмотря на достаточно длительную историю сохраняют важное фундаментальное и прикладное значение, практический интерес для инженерных применений в важнейших научно-промышленных отраслях, таких, как машиностроение, строительство, воздушный и подводный транспорт, аэрокосмическая техника [1-3], к которым в последнее время добавились междисциплинарные разработки в области термоядерной энергетики.

Развитая практика применения для учета отмеченных факторов неопределенности методов вероятностного стохастического анализа [4], [5] зачастую сталкивается с ситуацией отсутствия имеющей корректную статистическую природу исходной информации. Более мягкие условия к характеру неопределенных экзогенных данных дополнительные возможности в этом направлении, включая возможности использования **результатов обработки маломощных частотных выборок и данных субъективных экспертных заключений**, а наличие аппарата непосредственного оперирования неконтрастными величинами без процедур их усреднения открываются в рамках применения в таких исследованиях методов нечетких множеств (методов теории нечетких вычислений) [1-4]. Данный подход к получению оценок влияния разбросов исходных параметров предполагает осуществление процедуры фазсификации неконтрастных исходных параметров с разбросами значений путем перехода к нечетко-интервальным величинам, используемым далее в качестве нечетко-множественных аргументов в аналитических соотношениях детерминистических версий моделей расчета критических усилий на основе применения модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения [1], [5], [7].

В контексте изложенных соображений, целью осуществляемых в работе исследований является распространение нечетко-множественной методики получения оценок для эффектов влияния разбросов значений экзогенных механических и геометрических параметров в математических моделях механики деформирования применительно к задачам устойчивости тонкостенных конструкций в виде тонких замкнутых изотропных оболочек тороидальной формы, подверженных действию равномерно распределенных по граничной поверхности сжимающих внешних усилий.

Описание критических значений внешнего нормального давления в рамках детерминистической версии модели

В представляемом исследовании используются полученные в [1], [2] результаты решения в классической постановке. Оболочка характеризуется геометрическими параметрами толщины стенки h , радиуса круговых сечений R_s трубчатой части и расстояния R_l от оси симметрии оболочки до центров поперечных сечений, а также физико-механическими параметрами модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν материала оболочки. Для оболочки с описанными характеристиками, согласно [1], значения критических усилий q_n^* описываются соотношениями

$$q_n^* = \Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu) = EhR_s^{-1}(1-\nu^2)^{-1}(\delta_n(k) + (h^2/(12R_s^2))\lambda_n(k)) \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1)$$

в которых

$$k = R_s / R_l, \quad (2)$$

$$\delta_n(k) = (1+k^2/4)^{-1}((k^2/2)(n^2 + ((1-\nu^2)/2)n^2k^2 + (1+\nu)^2k^2 + \nu + 1)/(n^2(n^2(1+k^2/2) + (1+\nu)k^2/2)),$$

$$\lambda_n(k) = (1+k^2/4)^{-1}((n^2 - 1 + n^2k^2/2)(n^2(1+k^2/2) + k^2)/(n^2(1+k^2/2) + (1+\nu)k^2/2) + k^2/2).$$

При этом для функций $\Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu)$ во всей области их определения выполняются свойства

$$\partial\Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu) / \partial E > 0, \quad \Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu) / \partial h > 0, \quad (3)$$

учитываемые ниже при реализации процедуры перехода в функциональных отображениях (1) к нечетко-интервальным аргументам.

Для оценки меры влияния неконтрастности значений указанных исходных физико-механических и геометрических параметров в модели устойчивости рассматриваемой оболочки на определяемые соотношениями (1), (2) критические величины параметра внешнего нагружения в данных функциональных соотношениях реализуется переход к нечетко-множественным аргументам с применением α -уровневой формы эвристического принципа расширения [7], [8].

Получение нечетко-множественных оценок для параметров критических усилий и собственных частот

Исходным этапом процедуры расширения области определения аргументов h, R_s, R_l, E, ν функциональных соотношений (1), (2) на нечетко-множественные величины $\tilde{h}, \tilde{R}_s, \tilde{R}_l, \tilde{E}, \tilde{\nu}$ в виде нормальных трапециевидальных нечетких интервалов является ведение их представлений кортежами из значений границ носителей и границ интервалов модальных значений [1], [8]

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{R}_s = (R_{s1}, R_{s2}, R_{s3}, R_{s4}), \quad \tilde{R}_l = (R_{l1}, R_{l2}, R_{l3}, R_{l4}), \quad \tilde{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4), \quad \tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4). \quad (4)$$

Далее введенные интервалы представляются разложениями по множествам альфа-срезов в форме

$$\tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \tilde{R}_s = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{s\alpha}, \bar{R}_{s\alpha}], \quad \tilde{R}_l = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{l\alpha}, \bar{R}_{l\alpha}],$$

$$\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \quad \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha],$$

где

$$\underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4; \quad (6)$$

$$\underline{R}_{s\alpha} = (1-\alpha)R_{s1} + \alpha R_{s2}, \quad \bar{R}_{s\alpha} = \alpha R_{s3} + (1-\alpha)R_{s4};$$

$$\underline{R}_{l\alpha} = (1-\alpha)R_{l1} + \alpha R_{l2}, \quad \bar{R}_{l\alpha} = \alpha R_{l3} + (1-\alpha)R_{l4};$$

$$\underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1-\alpha)E_4;$$

$$\underline{\nu}_\alpha = (1-\alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, \quad \bar{\nu}_\alpha = \alpha \nu_3 + (1-\alpha)\nu_4.$$

Нечетко-множественные описания для эндогенных параметров интенсивности критических усилий с применением α -уровневой формы эвристического принципа расширения [5-7] при учете свойств (3) соответственно записываются в виде:

$$\tilde{q}_n^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_{n\alpha}^*, \bar{q}_{n\alpha}^*], \quad (7)$$

$$\underline{q}_{n\alpha}^* = \inf_{\substack{R_s \in [\underline{R}_{s\alpha}, \bar{R}_{s\alpha}] \\ R_l \in [\underline{R}_{l\alpha}, \bar{R}_{l\alpha}] \\ v \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha]}} \Phi_n(\underline{h}_\alpha, R_s, R_l, \underline{E}_\alpha, v),$$

$$\bar{q}_{n\alpha}^* = \sup_{\substack{R_s \in [\underline{R}_{s\alpha}, \bar{R}_{s\alpha}] \\ R_l \in [\underline{R}_{l\alpha}, \bar{R}_{l\alpha}] \\ v \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha]}} \Phi_n(\bar{h}_\alpha, R_s, R_l, \bar{E}_\alpha, v).$$

Данные соотношения позволяют провести расчеты, связанные с получением описаний для функций принадлежности $\mu_{\tilde{q}_n^*}^*(q_n^*)$ нечетко-множественных характеристик \tilde{q}_n^* .

Результаты численных исследований

На основе применения описанной методики реализован ряд расчетов, связанных с нечетко-множественным анализом рассматриваемой модели.

При этом полагается, что рассматриваемая оболочка изготовлена из стали, и в качестве первой задачи численного анализа подлежат расчету функции принадлежности для нечетко-множественных оценок \tilde{q}_n^* в случае задания совокупности нечетко-интервальных исходных параметров вида:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \quad \tilde{v} = (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \\ \tilde{R}_y &= (0.95R_*, 0.99R_*, 1.02R_*, 1.06R_*), \quad \tilde{R}_l = (104.95R_*, 104.99R_*, 105.02R_*, 105.06R_*), \\ \tilde{h} &= (0.0038R_*, 0.004R_*, 0.0042R_*, 0.0044R_*), \quad E_* = 10^{10}[\text{Па}], \quad R_* = 1[\text{М}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Результаты расчетов $\mu_{\tilde{q}_n^*}^*(q_n^*)$ с использованием соотношений (1), (2), (7) для этого варианта задания неконтрастных исходных параметров приведены на рис. 1-3. При этом с учетом немонотонной зависимости q_n^* от n и зависимости соответствующей минимальному значению q_n^* величины n от совокупности физико-механических и геометрических характеристик модели, для рассматриваемого варианта нечетких экзогенных параметров дано описание функции принадлежности для минимального по медианному значению нечетко-множественного показателя \tilde{q}_3^* и двух следующих по возрастанию медианных значений на носителях нечетко-множественных величин \tilde{q}_2^* и \tilde{q}_4^* .

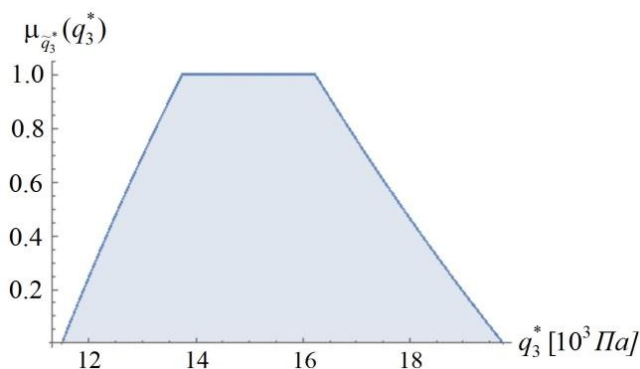
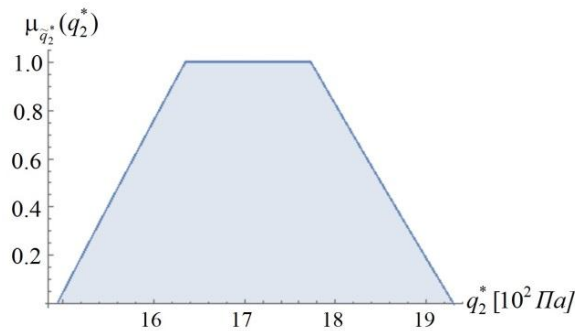
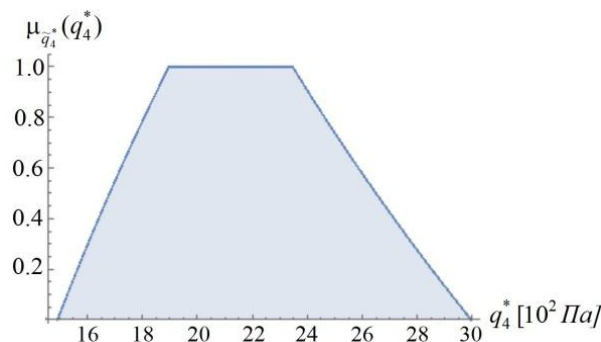


Рисунок 1 – Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{q}_3^*}^*(q_3^*)$

Рисунок 2 – Профиль функции принадлежности $\mu_{q_2^*}(q_2^*)$ Рисунок 3 – Профиль функции принадлежности $\mu_{q_4^*}(q_4^*)$

Анализ результатов расчетов позволяет заключить, что максимальные разбросы для задаваемых в виде (8) исходных нечетко-интервальных параметров $\tilde{E}, \tilde{\nu}, \tilde{R}_l$ относительно медианных значений на носителях составляют не более 1.6%, для исходного параметра \tilde{R}_s этот разброс составляет 5.5%, а для исходного параметра \tilde{h} – 7.3%. Расчетный оцениваемый максимально возможный разброс для параметров \tilde{q}_2^* и \tilde{q}_3^* относительно средних значений на интервалах их носителей составляет в данном случае порядка 26.4%, а в диапазонах наиболее достоверных значений на модальных интервалах относительно их средних значений – порядка 8.2%. Для параметра \tilde{q}_4^* оценка максимально возможного разброса на интервале носителя составляет порядка 33.5%, а в диапазоне наиболее достоверных значений на модальном интервале – порядка 10.5%. Вид рассчитанных функций принадлежности позволяет оценить меру возможности достижения соответствующих значений эндогенным параметром интенсивности критического давления q_n^* в случае задания рассматриваемых неконтрастных исходных параметров расчетной модели.

Выводы

Результатами представленных в данной статье исследований является распространение численно-аналитической нечетко-множественной методики учета факторов неопределенности обладающих разбросами значений исходных физико-механических геометрических параметров в процессе анализа модели устойчивости тонкой изотропной идеально упругой замкнутой оболочки тороидальной геометрической формы. Методика базируется на задании фазсифицированных неконтрастных исход-

ных параметров с разбросами значений нечетко-интервальными величинами и на расширении областей определения функциональных соотношений детерминистических версий рассматриваемых моделей на нечетко-множественные аргументы. На основании реализованных вычислительных экспериментов получены описания функций принадлежности для рассчитываемых нечетко-множественных эндогенных характеристик интенсивности критических усилий и представлен сопоставительный анализ величин разбросов исходных параметров и разбросов в получаемых нечетко-множественных оценках.

Описываемая методика дает возможность установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях эндогенных параметров расчетных моделей при оговариваемых разбросах исходных физико-механических и геометрических параметров и определить предельные границы возможных разбросов для значений исследуемых характеристик на минимальном уровне уверенности.

Список литературы

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / Вольмир А. С. – М. : Наука, 1976. – 984 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость тороидальных композитных оболочек [Текст] / А. С. Вольмир, К. З. Хайрнатов // Механика композитных материалов. – 1982. – № 3. – С. 454–459.
3. Wenmin R. A survey of works on the theory of toroidal shells and curved tubes [Текст] // ActaMechanicaSinica. – 1999. – Vol. 15. – No. 3. – P. 225–234. doi: 10.1007/BF02486150
4. Blachut J. On buckling of toroidal shells under external pressure [Текст] / J. Blachut, O. Jaiswal // Computers & Structures. – 2000. – Vol. 77, No 3. – P. 233–251. doi: 10.1016/S0045-7949(99)00226-6
5. Croll J.G.A. Stability in Shells [Текст] / J.G.A. Croll // Nonlinear Dynamics. – 2006. – Vol. 43. – P. 17–28.
6. Sun B. Closed-Form Solution of Axisymmetric Slender Elastic Toroidal Shells [Текст] / B. Sun // Journal of Engineering Mechanics. – 2010. – Vol. 136, No. 10. – P. 1281–1288. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000175
7. Asratyan M. G. Mixed boundary-value problems of thermoelasticity for anisotropic-in-plan inhomogeneous toroidal shells [Текст] / M. G. Asratyan, R. S. Gevorgyan // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2010. – Vol. 74, No. 3. – P. 306–312. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2010.07.006
8. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений [Текст] / В. В. Болотин – М. : Стройиздат, 1982. – 352 с.
9. Павлыш В. Н. Математическое моделирование процессов функционирования специализированных аппаратов конвективного типа [Текст] / В. Н. Павлыш, Е. В. Перинская // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2015. – № 0(1). – С. 89–98.
10. Математическое моделирование и анализ параметров устройства вихревой пароконденсации в прямоточной системе обессоливания шахтных вод [Текст] / В. Н. Павлыш, Г. В. Доценко, В. П. Овсянников, В. Б. Малеев // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2020. – № 4(19). – С. 30–44.
11. Pavlysh V. N. Modification of computer methods of presentation and analysis of geotechnical information [Text] / V. N. Pavlysh, G. I. Turchanin, O. A. Tikhonova // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2016. – № 1 (2). – С. 15–24.
12. Павлыш В. Н. Проект построения алгоритма классификации текстовых документов [Текст] / В. Н. Павлыш, Е. И. Бурлаева // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2017. – № 4 (7). – С. 24–32.
13. Павлыш В. Н. Математическое моделирование нестационарных процессов в среде с нечётко определёнными параметрами [Текст] / В. Н. Павлыш, Г. Б. Переголчина // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ ИПИИ. – 2018. – № 2 (9). – С. 33–45.

References

1. Vol'mir A. S. *Ustoychivost' deformiruyemykh sistem* [Stability of deformable systems]. M., Nauka, 1976, 984 s.
2. Vol'mir A. S., Khayrnasov K. Z. Ustoychivost' toroidal'nykh kompozitnykh obolochek [Stability of toroidal composite shells]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of composite materials], 1982, No 3, pp. 454–459.
3. Wenmin R. A survey of works on the theory of toroidal shells and curved tubes. *ActaMechanicaSinica*, 1999, Vol. 15, No. 3, pp. 225–234, doi: 10.1007/BF02486150
4. Blachut J., Jaiswal O. On buckling of toroidal shells under external pressure. *Computers & Structures*, 2000, Vol. 77, No. 3, P. 233–251. doi: 10.1016/S0045-7949(99)00226-6
5. Croll J.G.A. Stability in Shells. *Nonlinear Dynamics*, 2006, Vol. 43, pp. 17–28.
6. Sun B. Closed-Form Solution of Axisymmetric Slender Elastic Toroidal Shells. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, Vol. 136, No. 10, P. 1281–1288. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000175
7. Asratyan M. G., Gevorgyan R. S. Mixed boundary-value problems of thermoelasticity for anisotropic-in-plan inhomogeneous toroidal shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, Vol. 74, No. 3, pp. 306–312. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2010.07.006
8. Bolotin V. V. *Metody teorii veroyatnostey i teorii nadezhnosti v raschetakh sooruzheniy* [Methods of the theory of probability and the theory of reliability in the calculations of structures], M., Stroyizdat, 1982, 352 s.
9. Pavlysh V. N., Perinskaya E. V. Mathematical modeling of functioning processes of special convective type apparatus. *Problems of Artificial Intelligence*, Donetsk, 2015, No. 0(1), pp. 89–98.
10. Pavlysh V. N., Dotsenko G. V., Ovsyannikov V. P., Maleyev V. B. Matematicheskoye modelirovaniye i analiz parametrov ustroystva vikhrevoy parokondensatsii v pryamotochnoy sisteme obessolivaniya shakhtnykh vod [Mathematical modeling and analysis of the parameters of the vortex steam condensation device in the direct-flow system of mine water desalination]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of artificial intelligence], Donetsk, GU IPII, 2020, No. 4(19), pp. 30–44.
11. Pavlysh V. N., Turchanin G. I., Tikhonova O. A. Modification of computer methods of presentation and analysis of geotechnical information. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2016, No. 1 (2), pp. 15–24.
12. Pavlysh V. N., Burlayeva Ye. I. Proyekt postroyeniya algoritma klassifikatsii tekstovykh dokumentov [Draft of the algorithm for the classification of text documents]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2017, No. 4 (7), pp. 24–32.
13. Pavlysh V. N., Peretolchina G. B. Matematicheskoye modelirovaniye nestatsionarnykh protsessov v srede s nehotko opredelonnymi parametrami [Mathematical modeling of non-stationary processes in a medium with indistinctly defined parameters]. *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], 2018, No. 2 (9), pp. 33–45.

RESUME

V. N. Pavlysh, S. V. Storozhev

Mathematical Modeling in Stability Problems Based on the Theory of Fuzzy-Multiple Analysis

The results of the studies presented in this article are the dissemination of a numerical-analytical fuzzy-multiple method of accounting for uncertainty factors with scattering values of the initial physical and mechanical geometric parameters in the process of analyzing the stability model of a thin isotropic ideally elastic closed shell of a toroidal geometric shape. The technique is based on setting fuzzified non-contrasting initial parameters with scatter of values by fuzzy interval values and on expanding the domains of determining the functional relationships of deterministic versions of the models under consideration to fuzzy multiple arguments. On the basis of the implemented computational experiments, descriptions of the accessory functions for the calculated fuzzy-multiple endogenous characteristics of the intensity of critical efforts are obtained and a comparative analysis of the values of the scatter of the initial parameters and the scatter in the obtained fuzzy-multiple estimates is presented.

The described technique makes it possible to establish the ranges of the most reliable deviations in the values of the endogenous parameters of the computational models with the stipulated spreads of the initial physical-mechanical and geometric parameters and to determine the limiting boundaries of the possible spreads for the values of the studied characteristics at the minimum level of confidence.

РЕЗЮМЕ

В. Н. Павлыш, С. В. Сторожев

*Математическое моделирование в задачах устойчивости
на основе теории нечетко-множественного анализа*

Результатами представленных в данной статье исследований является распространение численно-аналитической нечетко-множественной методики учета факторов неопределенности обладающих разбросами значений исходных физико-механических геометрических параметров в процессе анализа модели устойчивости тонкой изотропной идеально упругой замкнутой оболочки тороидальной геометрической формы. Методика базируется на задании фазифицированных неконтрастных исходных параметров с разбросами значений нечетко-интервальными величинами и на расширении областей определения функциональных соотношений детерминистических версий рассматриваемых моделей на нечетко-множественные аргументы. На основании реализованных вычислительных экспериментов получены описания функций принадлежности для рассчитываемых нечетко-множественных эндогенных характеристик интенсивности критических усилий и представлен сопоставительный анализ величин разбросов исходных параметров и разбросов в получаемых нечетко-множественных оценках.

Описываемая методика дает возможность установить диапазоны наиболее достоверных отклонений в значениях эндогенных параметров расчетных моделей при оговариваемых разбросах исходных физико-механических и геометрических параметров и определить предельные границы возможных разбросов для значений исследуемых характеристик на минимальном уровне уверенности.

Статья поступила в редакцию 06.04.2021.