УДК 621.372.542

В. Ю. Пшекоп
Государственное учреждение «Институт проблем искусственного интеллекта», г. Донецк
83048, г. Донецк, ул. Артема, 118-б

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРСИСТЕНТНЫХ (АНТИПЕРСИСТЕНТНЫХ) РЯДОВ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ НИХ ПОКАЗАТЕЛЯ ХЕРСТА И ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИИ СТАНДАРТНОГО ОТКЛОНЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТА ЭКСЦЕССА

V. J. Przekop
Public institution «Institute of Problems of Artificial intelligence», Donetsk
83048, Donetsk, Artema st., 118b

MODELING AND INVESTIGATION OF PERSISTENT (ANTIPERSISTENT) SERIES, DETERMINATION OF THE HURST EXPONENT FOR THEM AND REGRESSION PARAMETERS OF STANDARD DEVIATION AND CURTITUDE COEFFICIENT

В данной работе проводится регрессионный анализ зависимости стандартного отклонения и коэффициента эксцесса от таймфрейма, а также расчет показателя Херста для случайных рядов с различными законами распределения, обладающими свойствами персистентности и антиперсистентности, для выявления влияния персистентности (антиперсистентности) на вышеперечисленные характеристики. Персистентность (антиперсистентность) достигается путем применения операции дробного интегро-дифференцирования, то есть спектральным окрашиванием случайного процесса.
Ключевые слова: фрактальная размерность, показатель Хёрста, персистентность, антиперсистентность.

In this paper, a regression analysis of the dependence of the standard deviation and kurtosis coefficient on the timeframe is carried out, as well as the calculation of the Hurst exponent for random series with different distribution laws that have the properties of persistence and antipersistence, to identify the effect of persistence (antipersistence) on the above characteristics. Persistence (anti-persistence) is achieved by applying the operation of fractional integro-differentiation, that is, by spectral coloring of a random process.
Keywords: fractal dimension, Hurst exponent, persistence, antipersistence.

Актуальность работы. Статистическому анализу случайных процессов, в частности, процессу прироста цены финансовых инструментов посвящено большое количество работ. «Классические» методы анализа не всегда адекватно работают с негауссовскими процессами и не всегда позволяют выявить скрытые зависимости, этим объясняется популярность, в последние годы, методов нелинейной динамики, к числу которых можно отнести R/S-анализ. Однако данных методов может быть недостаточно для разработки адекватной математической модели процесса ценообразования. Поэтому разработка новых методов статистического анализа является актуальной задачей.

Цель работы:

1) апробация метода выявления свойств персистентности (антиперсистентности) случайного процесса путем вычисления коэффициента регрессии зависимости стандартного отклонения от таймфрейма;

2) выявление влияния свойств персистентности (антиперсистентности) случайного процесса на коэффициент регрессии зависимости коэффициента эксцесса от таймфрейма;

3) оценка устойчивости вышеперечисленных методов анализа, а также R/S-анализа в зависимости от степени персистентности (антиперсистентности) и от вида распределения.

Определение показателя Херста

Одним из наиболее популярных методов нелинейной динамики является анализ временных рядов на основе вычисления показателя Херста, который получил название – R/S-анализ (*rescaled range analysis*). Метод был предложен английским исследователем Гарольдом Херстом [1]. Метод позволяет выявлять свойства персистентности (антиперсистентности) случайного процесса.

Показатель Херста определяется следующим образом:

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^{H}, \tag{1}$$

где: $R(\tau) = maxX(t,\tau) - minX(t,\tau)$ – разность между минимальным и максимальным значениями исследуемого ряда, $0 \leq t \leq \tau$;

$$X(t,\tau) = \sum_{u=1}^{t}[x(u) - \langle x(\tau)\rangle];$$

– накопившееся отклонение значений случайной величины x(t) от ее среднего значения *‹x›* за время *t*;

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{r}[x(t_i) - \langle x(\tau)\rangle]^2}$$

– стандартное отклонение *x*,

H – показатель или постоянная Херста.

Предполагается, что при H > 0,5 в ряду поддерживается тенденция, ряд обладает свойствами персистентности. При H $<$ 0,5 тенденции часто сменяются на противоположные (антиперсистентность). По сути, показатель Херста есть наклон линии регрессии функции R/S(τ) в двойном логарифмическом масштабе.

В данной работе проводится моделирование персистентных (антиперсистентных) рядов, со случайными приращениями, распределенными в соответствии с различными законами. Законы распределения следующие: нормальный гауссовский, α-устойчивые распределения с показателем 1<α<2, распределение *variance-gamma*. Все распределения с нулевым средним и нулевой асимметрией. Выбор распределения связан с тем, что они чаще других используются для статистического анализа финансовых процессов.

Персистентность (антиперсистентность) достигается путем применения операции дробного интегро-дифференцирования, то есть спектральным окрашиванием случайного процесса.

Определение дробной производной через преобразование Фурье

Существует несколько определений дробной производной. Для моделирования более подходящей будет определение дробной производной через преобразование Фурье.

$$\frac{d^q}{dt^q} f(t) = F^{-1}\{(i \times \omega)^q F\{f(t)\}\},$$

где: $F\{\,\}$ и $F^{-1}\{\,\}$ – соответственно, прямое и обратное преобразование Фурье; q – порядок дифференцирования.

Очевидно, порядок дифференцирования q однозначно определяет наклон спектральной функции в двойном логарифмическом масштабе.

$$\beta = -q,$$

где β – наклон спектральной функции в единицах измерения [дек/дек].

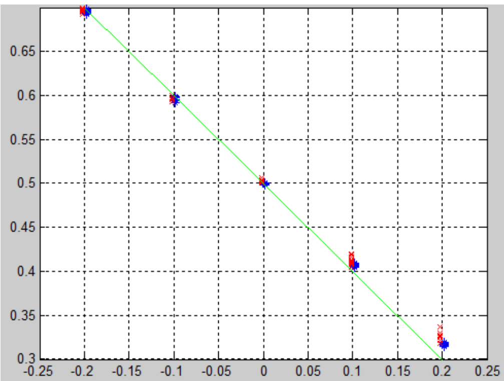
Алгоритм формирования случайных персистентных (антиперсистентных) рядов

1. Генерируется выборка случайных чисел с заданным распределением.
2. Производится преобразование Фурье выборки.
3. Умножаем спектральные отчеты на комплексное число $(jn)^q$; где n – номер спектрального отчета.
4. Производим обратное преобразование Фурье спектральных отчетов. Получаем выборку временных отчетов с необходимыми персистентными (антиперсистентными) свойствами.
5. Производим кумулятивное суммирование временных отчетов, получаем случайный процесс.
6. Производим децимацию процесса с коэффициентами децимации $k = 1, 2, 4, 8$ ...
7. Вычисляем приращения децимированного процесса. Получаем укороченные выборки случайных чисел.
8. Для укороченных выборок находим статистики: R/S, стандартного отклонения, коэффициента эксцесса.
9. Строим полученные зависимости статистик от коэффициента децимации в двойном логарифмическом масштабе. Находим коэффициенты уравнений регрессии.

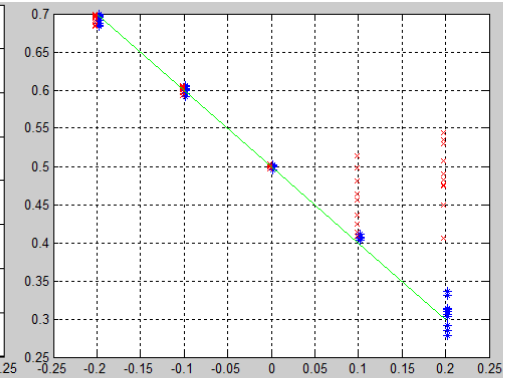
Для дальнейшего анализа будут использованы: коэффициент наклона линии регрессии R/S (показатель Херста); коэффициент наклона линии регрессии стандартного отклонения, как альтернатива R/S анализа; коэффициент наклона линии регрессии коэффициента эксцесса. Регрессия коэффициента эксцесса представляет интерес в том плане, что финансовые ряды показывают аномальное поведение данной статистики и изучается влияние персистентных (антиперсистентных) свойств на регрессию коэффициента эксцесса.

Для каждого из распределений при значении дробной производной $q = (-0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2)$ производились 10 независимых генераций ряда случайных чисел длиной 2^{20}= 1 048 576 отчетов.

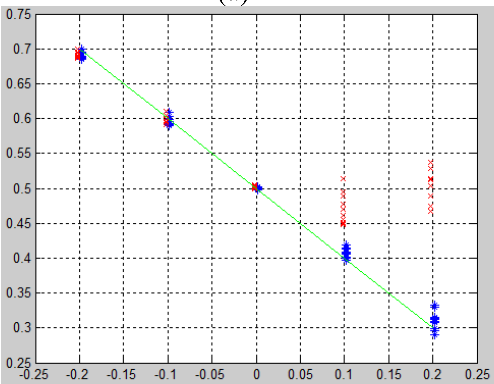
Результаты моделирования представлены на рис. 1 и в табл. 1.



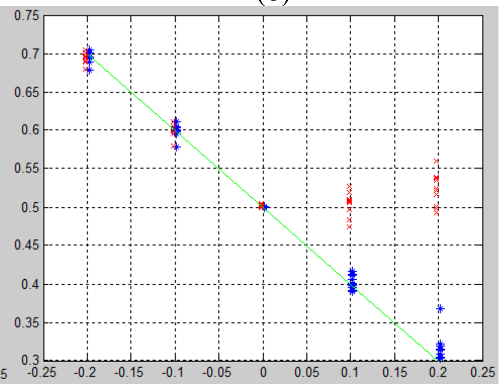
(а)



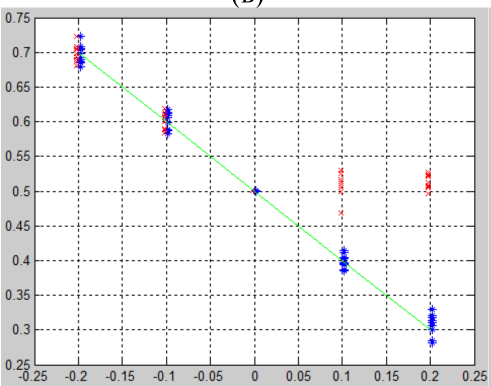
(б)



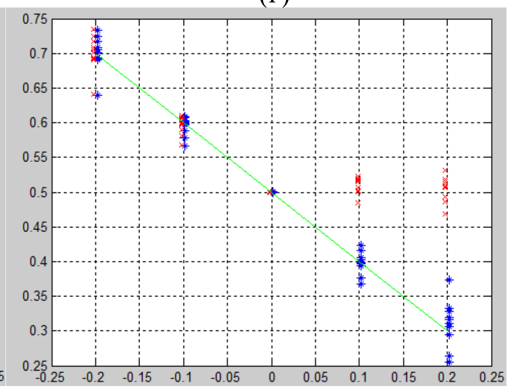
(в)



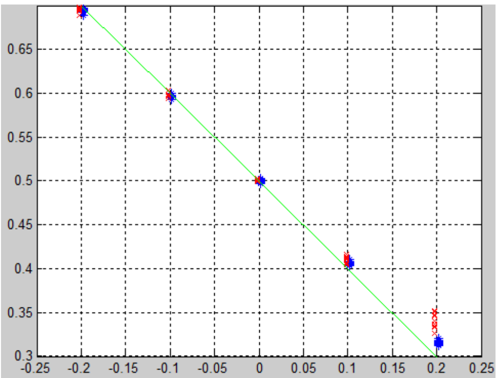
(г)



(д)



(е)



(ж)

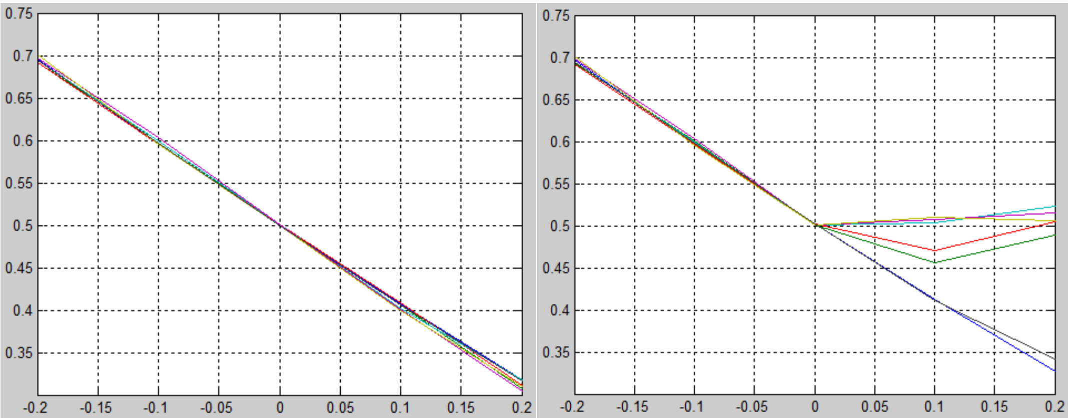
Рисунок 1 – Зависимость показателя Херста (x), коэффициента наклона линии регрессии стандартного отклонения (*), линия y(q) = 0,5-q (сплошная), для а) нормального распределения, б) α-устойчивого α = 1,8, в) α-устойчивого α = 1,6, г) α-устойчивого α = 1,4, д) α-устойчивого α = 1,2, е) α-устойчивого α = 1 (распределение Коши), ж) распределение variance-gamma

Таблица 1 – Математическое ожидание и стандартное отклонение коэффициента регрессии стандартного отклонения от параметра *q*

	q=0.2		q=0.1		q=0		q=-0.1		q=-0.2	
Распределение	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл
Нормальное	0,3176	0,0019	0,4068	0,0018	0,4998	0,0011	0,5953	0,0019	0,6954	0,0023
α-уст. α=1,8	0,3069	0,0185	0,4057	0,0026	0,4997	0,0016	0,5995	0,0043	0,6917	0,0064
α-уст. α=1,6	0,3107	0,0137	0,4087	0,0079	0,5001	0,0017	0,5951	0,0065	0,6912	0,0052
α-уст. α=1,4	0,3174	0,0189	0,402	0,009	0,5001	0,0007	0,5987	0,0083	0,6942	0,0073
α-уст. α=1,2	0,305	0,0171	0,4005	0,0108	0,5002	0,0003	0,6028	0,0125	0,6971	0,0132
α-уст. α=1,0	0,3101	0,0341	0,3997	0,0176	0,4999	0,0005	0,595	0,0133	0,7006	0,0257
variance-gamma	0,3165	0,0025	0,4062	0,0019	0,4999	0,0015	0,5967	0,0019	0,6938	0,0023

Таблица 2 – Математическое ожидание и стандартное отклонение показателя Херста от параметра *q*

	q=0.2		q=0.1		q=0		q=-0.1		q=-0.2	
Распределение	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл
Нормальное	0,3274	0,005	0,4125	0,0047	0,5023	0,0019	0,5964	0,002	0,6961	0,0024
α-уст. α=1,8	0,4893	0,0423	0,4559	0,0354	0,5007	0,0018	0,6006	0,0042	0,6921	0,0063
α-уст. α=1,6	0,5043	0,024	0,4709	0,0223	0,5014	0,0021	0,5961	0,0066	0,6916	0,0051
α-уст. α=1,4	0,5225	0,0211	0,5039	0,0155	0,5012	0,0017	0,5993	0,0084	0,6946	0,007
α-уст. α=1,2	0,5147	0,0103	0,5077	0,0172	0,5003	0,0003	0,6038	0,0121	0,6976	0,0131
α-уст. α=1,0	0,5058	0,0182	0,5094	0,0118	0,5003	0,0004	0,596	0,0131	0,7011	0,0255
variance-gamma	0,342	0,009	0,411	0,0041	0,5018	0,0011	0,5979	0,0025	0,6945	0,0025



(а) (б)

Рисунок 2 – Зависимости коэффициентов регрессии стандартного отклонения (а) и показателя Херста (б) от параметра q

Таблица 3 – Математическое ожидание и стандартное отклонение регрессии коэффициента эксцесса от параметра q

	$q = 0.2$		$q = 0.1$		$q = 0$		$q = -0.1$		$q = -0.2$	
Распределение*	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл	среднее	ст. откл
α-уст. α=1,8	-1,047	0,0863	-1,01	0,0257	-0,999	0,0072	-0,992	0,0568	-1,013	0,0607
α-уст. α=1,6	-1,016	0,0804	-0,99	0,0336	-0,995	0,0048	-1,003	0,0357	-1,026	0,0498
α-уст. α=1,4	-1,002	0,0494	-1,017	0,0198	-1,001	0,0029	-1,005	0,058	-0,999	0,0447
α-уст. α=1,2	-0,99	0,0386	-1,011	0,0188	-1,001	0,001	-0,992	0,0149	-0,98	0,0483
α-уст. α=1,0	-0,992	0,0222	-0,991	0,0144	-1,001	0,0009	-1,008	0,0264	-0,977	0,0721
variance-gamma	-0,939	0,0305	-1,005	0,0274	-1,009	0,0385	-1,02	0,032	-0,986	0,0412

* Для нормального гауссовского распределения регрессия коэффициента эксцесса не определялась, так как в этом случае эксцесс равен нулю, что дает неопределенность в двойном логарифмическом масштабе.

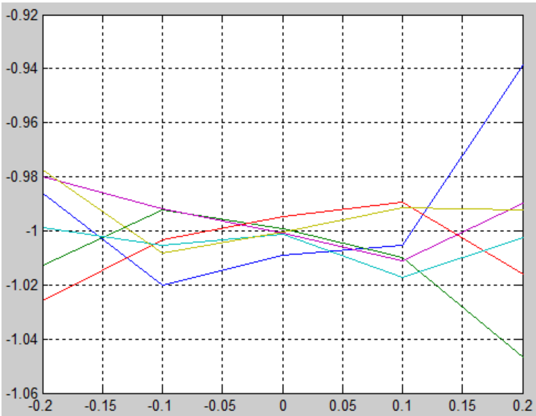


Рисунок 3 – Зависимости коэффициентов регрессии коэффициента эксцесса от параметра q

Выводы

По результатам моделирования (рис. 1, табл. 1, табл. 2) можно видеть, что получено достаточно близкое совпадение коэффициента регрессии стандартного отклонения и коэффициента Херста с линией прогноза $y(q) = 0{,}5 - q$, только для нормального распределения. Для распределений с тяжелыми хвостами, как например, α-устойчивое распределение с $\alpha < 2$, отклонение математического ожидания показателя Херста от прогноза значительное, в особенности это касается антиперсистентных рядов. Также зафиксировано увеличение стандартного отклонения показателя Херста при увеличении и уменьшении параметра q, то есть при ярко выраженных персистентных и антиперсистентных свойствах исследуемого процесса, заметно больше чем увеличение аналогичного показателя для коэффициента регрессии стандартного отклонения.

Для коэффициента регрессии коэффициента эксцесса отклонения от значения -1 незначительные и практически не зависят от параметра q и вида распределения. Даже для распределений, у которых эксцесс не определен, например, α-устойчивое распределение с $\alpha < 2$, коэффициент оценки регрессии сохраняет свое значение, близкое к -1, хотя заметно увеличение дисперсии оценки при отклонении параметра q от нуля. То есть можно сделать вывод о том, что нет прямой зависимости регрессии эксцесса от персистентности. Аномальность регрессии эксцесса, характерная для многих финансовых рядов, не может быть объяснена персистентностью и/или свойствами распределения вероятности и требует дальнейшего анализа.

Список литературы

1. Hurst H. E. Long-term storage capacity of reservoirs [Text] / H. E. Hurst // Transactions of American Society of Civil Engineers. – 1951. – Vol. 116. –S. 770.
2. Hurst H. E. Long-term storage: an experimental study [Text] / H. E. Hurst, R. P. Black, Y. M. Simaika. – London : Constable, 1965.
3. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем [Текст] / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – К. : НАНУ, 2008. – 256 с. – ISBN ISBN 978-966-02-4384-2.
4. Мандельброт Б. (Не)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах [Текст] / Б. Мандельброт, Р. Л. Хадсон. – М. : Вильямс, 2006. – 408 с. – ISBN 5-8459-0922-8.
5. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике [Текст] / Э. Петерс. – М. : Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с. – ISBN 5-902360-03-X.
6. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала [Текст] / Э. Петерс. – М. : Мир, 2000. – 333 с. – ISBN 5-03-003356-4.
7. Алмазов А. А. Фрактальная теория рынка Forex [Текст] / А. А. Алмазов. – М. : Admiral Markets, 2009. – 296 с. – ISBN 978-5-91258-095-6
8. Калуш Ю. А. Показатель Хёрста и его скрытые свойства [Текст] / Ю. А. Калуш, В. М. Логинов // Сиб. журн. индустр. матем. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 29–37.
9. Кашьяп Р. Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным [Текст] / Р. Л. Кашьяп, А. Р. Рао. – М. : Наука, 1983.
10. Федер Е. Фракталы [Текст] / Е. Федер. – М. : Мир, 1991.
11. Пшекоп В. Ю. Метод Вычисления коэффициентов импульсной характеристики оконных функций [Текст] / В. Ю. Пшекоп // Проблемы искусственного интеллекта. – Донецк : ГУ «ИПИИ». – 2015. – № 0 (1). – С. 99–106.

References

1. Hurst H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of American Society of Civil Engineers*, 1951, vol. 116, s. 770.
2. Hurst H. E., Black R. P., Simaika Y. M. *Long-term storage: an experimental study*, London, Constable, 1965.
3. Vasiliev V. V., Simak L. A. *Drobnoye ischisleniye i approksimatsionnyye metody v modelirovanii dinamicheskikh sistem* [Fractional calculus and approximation methods in modeling dynamic systems], K., NASU, 2008, 256 p., ISBN 978-966-02-4384-2
4. Mandelbrot B., Hudson R. L. (*Ne)poslushnyye rynki. Fraktal'naya revolyutsiya v finansakh* [(Not) obedient markets. Fractal revolution in finance], M., Williams, 2006, 408 p., ISBN 5-8459-0922-8.
5. Peters E. *Fraktal'nyy analiz finansovykh rynkov. Primeneniye teorii khaosa v investitsiyakh i ekonomike* [Fractal analysis of financial markets. Application of chaos theory in investment and economics], M., Internet trading, 2004, 304 p., ISBN 5-902360-03-X.
6. Peters E. *Khaos i poryadok na rynkakh kapitala* [Chaos and order in the capital markets], M., Mir, 2000, 333 p., ISBN 5-03-003356-4.
7. Almazov A. A. *Fraktal'naya teoriya rynka Forex* [Fractal theory of the Forex market], M., Admiral Markets, 2009, 296 p., ISBN 978-5-91258-095-6.
8. Kalush Yu. A., Loginov V. M. Pokazatel' Khorsta i yego skrytyye svoystva [The Hurst exponent and its hidden properties]. *Sib. zhurn. industr. matem.* [Sib. magazine industry math], 2002, vol. 5, no. 4, pp. 29-37.
9. Kashyap R. L., Rao A. R. *Postroyeniye dinamicheskikh stokhasticheskikh modeley po eksperimental'nym dannym* [Construction of dynamic stochastic models based on experimental data], M., Nauka, 1983.
10. Feder E. *Fraktaly* [Fractals], M., Mir, 1991.
11. Przekop V. Y. Modelirovanie i issledovanie persistentnyh (antipersistentnyh) ryadov, opredelenie dlya nih pokazatelya Hersta i parametrov regressii standartnogo otkloneniya i koefficienta ekscessa [Research of parameters and formation of a mathematical model of process of a growth of share indices], *Problemy iskusstvennogo intellekta* [Problems of Artificial Intelligence], Donetsk, 2015, no. 0(1), pp. 17–26.

RESUME

V. J. Przekop

Modeling and Investigation of Persistent (Antipersistent) Series, Determination of the hurst exponent for them and Regression Parameters of Standard Deviation and Curtitude Coefficient

In this article, modeling of random processes with different types of distribution of the generating series of random numbers was carried out. On the basis of the obtained process, processes with varying degrees of persistence/antipersistence were formed using the method of fractional integro-differentiation. Statistical characteristics of the generated random processes were studied using regression analysis methods for various timeframe values.

Methods have been proposed and substantiated that allow for a more “fine” analysis of the internal dependencies of random processes, resistant to distribution types. The proposed methods of analysis can be an alternative or addition to the methods of nonlinear dynamics, in particular R/S analysis.

It was revealed: the absence of a direct relationship between the degree of persistence of the kurtosis coefficient regression; low stability of the Hurst exponent to the type of distribution for antipersistence series.

РЕЗЮМЕ

В. Ю. Пшекоп

Моделирование и исследование персистентных (антиперсистентных) рядов, определение для них показателя Херста и параметров регрессии стандартного отклонения и коэффициента эксцесса

В настоящей статье производилось моделирование случайных процессов с различными типами распределения образующего ряда случайных чисел. На основе полученного процесса были сформированы процессы с различной степенью персистентности/антиперсистентности посредством метода дробного интегро-дифференцирования. Статистические характеристики сформированных случайных процессов исследовались методом регрессионного анализа при различных значениях таймфрейма.

Были предложены и обоснованы методы, позволяющие производить более «тонкий» анализ внутренних зависимостей случайных процессов, устойчивый к типам распределения. Предложенные методы анализа могут быть альтернативой или дополнением к методам нелинейной динамики, в частности R/S-анализа.

Было выявлено: отсутствие прямой зависимости между степенью персистентности регрессии коэффициента эксцесса; низкая устойчивость показателя Херста к виду распределения для антиперсистентностных рядов.

Статья поступила в редакцию 01.10.2021.