Ч

УДК 514.7; 514.74; 514.76; 517.1; 517.2; 536; 536.7; 536.71

Д. А. Червинский, В. В. Шелест
Государственное учреждение «Донецкий физико-технический институт им. А. А. Галкина»
283114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72

АСПЕКТЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ, ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

D. A. Chervinskii, V. V. Shelest
Public institution «A. A. Galkin Donetsk Institute for Physics and Engineering»
283114, Donetsk, R. Luxembourg str., 72

EXTERNAL DIFFERENTIAL FORMS CALCULATION ASPECTS AND ITS MATHEMATICAL AND PHYSICAL APPLICATIONS

Д. О. Червинський, В. В. Шелест
Державна установа «Донецький фізико-технічний інститут ім. О. О. Галкіна»
283114, м. Донецьк, вул. Р. Люксембург, 72

АСПЕКТИ ЧИСЛЕННЯ ЗОВНІШНІХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ ФОРМ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У МАТЕМАТИЦІ ТА ФІЗИЦІ

В работе представлен обзор основных положений исчисления внешних дифференциальных форм. Проведено сравнение данной дисциплины с традиционно применяемыми. Подчеркнуто, что такой аппарат является более кратким и удобным, чем обычно используемые математические дисциплины. Базовые интегральные соотношения векторного анализа представлены в новой форме. На примере термодинамики продемонстрированы принципы и эффективность применения исчисления внешних дифференциальных форм в физике.
Ключевые слова: Формула Стокса, формула Гаусса, векторное исчисление, внешние дифференциальные формы, термодинамические коэффициенты.

External differential forms calculation basic theses review presented. Mentioned discipline comparison with traditional methods made. Stressed that such an apparatus is shorter and handier than usually using mathematical disciplines. Vector analysis basic integral relations presented in the new form. External differential forms physical (thermodynamical) applications principles and effectiveness demonstrated.
Keywords: Stokes formula, Gauss formula, vector calculus, external differential forms, thermodynamical coefficients.

В роботі надано стислий огляд основних положень числення зовнішніх диференційних форм. Проведене порівняння цієї дисципліни із традиційно вживаними. Підкреслюється, що такий апарат є більш стислим та зручним, ніж математичні дисципліни, що використовуються звичайно. Базові інтегральні положення векторного аналізу наведені у новій формі. На прикладі термодинаміки продемонстровані принципи та ефективність застосування числення зовнішніх диференційних форм у фізиці.
Ключові слова: формула Стокса, формула Гауса, векторне числення, зовнішні диференційні форми, термодинамічні коефіцієнти.

Введение

Стремление к единству концепций, объединяющих понятия векторного пространства, привело к введению, развитию и осознанию значения такой математической дисциплины, как исчисление внешних дифференциальных форм.

Цель данной работы – формализовать исконные понятия вышеупомянутой дисциплины и продемонстрировать ее возможности в математике и физике. В этом смысле работа представляет собой, прежде всего, компиляцию определений и правил, необходимых для наглядного отображения физической реальности.

Известно, что внешние дифференциальные формы были использованы А. Пуанкаре в его методах изучения небесной механики и Э. Картаном в работах о непрерывных группах и системах Пфаффа в конце позапрошлого века [1-4]. Систематическое изучение этих форм было проведено Э. Картаном в его теории интегральных инвариантов [5]. Позже дифференциальные формы были включены в область алгебры, а в дальнейшем они стали широко и успешно использоваться в дифференциальной геометрии и математической физике [6].

Хотя целью работы является в основном компиляция основных положений исчисления внешних дифференциальных форм, в ней продемонстрированы и методологические аспекты применения данной математической дисциплины в физике на примере термодинамики.

1 Основные понятия исчисления внешних дифференциальных форм

По определению, внешняя дифференциальная форма 0-й степени (т.е. при $p = 0$) – это любая бесконечно дифференцируемая функция $\omega^{(p)}(x) \equiv \omega^{(0)}(x) = f(x)$, аргументы которой $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$. Далее, внешняя дифференциальная форма 1-й степени (т.е. при $p = 1$), иначе называемая 1-формой или Пфаффовой формой, есть выражение

$$\omega^{(1)}(x, \tilde{d}x) = a_1 \tilde{d}x_1 + a_2 \tilde{d}x_2 + ... + a_n \tilde{d}x_n , \tag{1.1}$$

которое может быть проинтегрировано по ориентированным кривым, и результат не зависит от параметризации кривой. Коэффициенты $a_i(x) = a_i(x_1, ..., x_n)$ – это вещественные функции от соответствующих аргументов, которые чаще всего считаются принадлежащими классу C^∞.

При замене переменных $x_i \to x_i'$ (где $x_i = x_i(x_1', ..., x_n')$), внешний дифференциал координат будет иметь вид $\tilde{d}x_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_i'} \tilde{d}x_i'$. Тогда 1-форма (1.1) может быть записана как

$$\omega^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{d}x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_h'} \tilde{d}x_h' = \sum_{h=1}^{n} a_h' \tilde{d}x_h' . \tag{1.2}$$

Таким образом, закон преобразования от коэффициентов a_i к a_i' задается уравнениями

$$a_h' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_h'} a_i . \tag{1.3}$$

Простейшим примером 1-формы является внешний дифференциал функции $f = f(x_1,...,x_n)$

$$\omega^{(1)} = \tilde{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \tilde{d}x_i \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{d}x_i \ . \quad (1.4)$$

Теперь определим внешние дифференциальные формы 2-й степени, или 2-формы.

Для этого вспомним, что выражения в двойных интегралах содержат «произведение» $dx_1 dx_2$, которое по правилам замены переменных $x_i \to x_i'$ имеет вид

$$dx_1 dx_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1', x_2')} dx_1' dx_2' \ , \quad (1.5)$$

где коэффициент преобразования – это якобиан перехода

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1', x_2')} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} \ . \quad (1.6)$$

В то же время, так называемое «произведение» $dx_1 dx_2$, стоящее под знаком двойного интеграла, не равняется обычному произведению дифференциалов $dx_i = (\partial x_i / \partial x_j')dx_j'$.

В свете же исчисления внешних дифференциальных форм при замене переменных в двойном интеграле мы имеем произведение иного рода, которое называется внешним произведением 1-форм и обозначается символом Λ. Основным свойством внешнего произведения является его антикоммутативность. В частности, для 2-форм имеем

$$\begin{aligned} &\tilde{d}x_1 \Lambda \tilde{d}x_2 = -\tilde{d}x_2 \Lambda \tilde{d}x_1, \\ &\tilde{d}x_i \Lambda \tilde{d}x_i = 0, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Таким образом, в соответствии с классическими методами внешнего дифференциального исчисления [1-10] мы автоматически получаем формулу, подобную (1.5), имеющую вид

$$\tilde{d}x_1 \Lambda \tilde{d}x_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1', x_2')} \tilde{d}x_1' \Lambda \tilde{d}x_2' \ . \quad (1.8)$$

С геометрической точки зрения внешнее произведение $\tilde{d}x_1 \Lambda \tilde{d}x_2$ обозначает элементарную ориентированную площадку на плоскости (x_1, x_2).

Обобщая 2-формы на большее число аргументов (т.е. на пространство R^n), их можно определить как выражения, которые имеют смысл под знаком двойного интеграла:

$$\omega^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \tilde{d}x_i \Lambda \tilde{d}x_j \ . \quad (1.9)$$

Такие 2-формы интегрируются по ориентированному двумерному многообразию.

Антисимметричные ($a_{ij} = -a_{ji}$) коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ij}(x_1,...,x_n)$, как и в случае 1-форм – это вещественные функции, которые чаще всего считаются принадлежащими классу C^∞.

При замене переменных по формуле (1.5) приходим к закону преобразования

$$\omega^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \tilde{d}x_i \Lambda \tilde{d}x_j = \sum_{h,k=1}^{n} a'_{hk} \tilde{d}x'_h \Lambda \tilde{d}x'_k \ , \quad (1.10)$$

где новые коэффициенты выражаются через старые по формуле

$$a'_{hk} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} J\left(\frac{x_i, x_j}{x'_h, x'_k}\right). \qquad (1.11)$$

Одним из способов образования 2-форм является внешнее умножение двух 1-форм. Другой способ – внешнее дифференцирование 1-форм (см. далее). Например, пусть заданы 1-формы $\omega^{(1)} = \sum_i a_i \tilde{d}x_i, \varphi^{(1)} = \sum_j b_j \tilde{d}x_j$. Тогда

$$\begin{aligned}\omega^{(2)} &\equiv \omega^{(1)} \Lambda \varphi^{(1)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \tilde{d}x_i \Lambda \tilde{d}x_j = \\ &= \sum_{i \neq j} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \tilde{d}x_i \Lambda \tilde{d}x_j\end{aligned} \qquad (1.12)$$

2-формы, являющиеся произведением двух 1-форм, называют разложимыми. Заметим, что не все 2-формы являются разложимыми [1-10].

Перейдем к обобщению. Внешние дифференциальные формы степени p есть не что иное как знакопеременная полилинейная форма, определенная на внешних дифференциалах

$$\omega^{(p)}(x, \tilde{d}x) = \sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1,\dots,i_p}(x) \tilde{d}x_{i_1} \Lambda \dots \Lambda \tilde{d}x_{i_p}. \qquad (1.13)$$

Здесь введены обозначения $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n$ и $\tilde{d}x = (\tilde{d}x_1,\dots,\tilde{d}x_n)$. Такие формы имеют смысл под знаком интеграла по p-мерным многообразиям в R^n. Коэффициенты $a_{i_1,\dots,i_p}(x)$ являются компонентами антисимметричного тензора p-го ранга.

Внешним произведением p-формы и q-формы является $p+q$-форма

$$\omega^{(p+q)} \equiv \omega^{(p)} \Lambda \omega^{(q)} = \sum_{i,j} a_{i_1,\dots,i_p} b_{j_1,\dots,j_q} \tilde{d}x_{i_1} \Lambda \dots \Lambda \tilde{d}x_{i_p} \Lambda \tilde{d}x_{j_1} \Lambda \dots \Lambda \tilde{d}x_{j_q}, \qquad (1.14)$$

которая обладает свойством

$$\omega^{(p)} \Lambda \omega^{(q)} = (-1)^{pq} \omega^{(q)} \Lambda \omega^{(p)}. \qquad (1.15)$$

2 Внешнее дифференцирование

Внешний дифференциал p-формы (1.13) определяется как $(p+1)$-форма

$$\begin{aligned}\tilde{d}\omega^{(p)} &= \sum_{i_1,\dots,i_p} \tilde{d}a_{i_1,\dots,i_p} \Lambda \tilde{d}x_{i_1} \Lambda \dots \Lambda \tilde{d}x_{i_p} = \\ &= \sum_{h,i_1,\dots,i_p} \frac{\partial a_{i_1,\dots,i_p}}{\partial x_h} \tilde{d}x_h \Lambda \tilde{d}x_{i_1} \Lambda \dots \Lambda \tilde{d}x_{i_p}\end{aligned}. \qquad (2.1)$$

В качестве простейших примеров рассмотрим следующие. Поскольку любая функция $f(x)$ является 0-формой, то ее внешний дифференциал – это 1-форма, совпадающая по форме с обычным дифференциалом:

$$\tilde{d}\omega^{(0)} \equiv \tilde{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \tilde{d}x_i. \qquad (2.2)$$

При вычислении внешних дифференциалов форм высших степеней проявляются некоторые особенности:

$$\begin{aligned}\tilde{d}\omega^{(1)} &= \tilde{d}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{d}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{d}a_i \Lambda \tilde{d}x_i = \\ &= \sum_{i,h=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_h} \tilde{d}x_h \Lambda \tilde{d}x_i = \sum_{i<h} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_h} - \frac{\partial a_h}{\partial x_i}\right) \tilde{d}x_h \Lambda \tilde{d}x_i\end{aligned}. \qquad (2.3)$$

Отметим основные свойства внешнего дифференцирования. Так, выполняется соотношение

$$\tilde{d}(\omega^{(p)}\Lambda\omega^{(q)}) = \tilde{d}\omega^{(p)}\Lambda\omega^{(q)} + (-1)^p \omega^{(p)}\Lambda\tilde{d}\omega^{(q)} . \qquad (2.4)$$

Далее, для любой p -формы повторное внешнее дифференцирование дает ноль:

$$\tilde{d}(\tilde{d}\omega^{(p)}) \equiv \tilde{d}^2\omega^{(p)} = 0 . \qquad (2.5)$$

3 Сопоставление внешнего дифференциального исчисления с традиционным векторным анализом в трехмерном евклидовом пространстве

Будем придерживаться математических положений, изложенных в [1-4], [9], [10].

Рассмотрим евклидово трехмерное пространство R^3 со стандартным ортонормированным базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, т.е., таким, что $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.

В этой связи вектор определяется как

$$\vec{A} \equiv (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 . \qquad (3.1)$$

В частности, векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ (набла) имеет вид

$$\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} . \qquad (3.2)$$

В таком пространстве векторное произведение может быть выражено как

$$\begin{aligned}\left[\vec{A}\times\vec{B}\right] &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1 + \begin{vmatrix} A_3 & A_1 \\ B_3 & B_1 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3 = \\ &= \left(A_2B_3 - A_3B_2\right)\vec{e}_1 + \left(A_3B_1 - A_1B_3\right)\vec{e}_2 + \left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\vec{e}_3 \equiv \\ &\equiv A_{23}\vec{e}_1 + A_{31}\vec{e}_2 + A_{12}\vec{e}_3\end{aligned} . \qquad (3.3)$$

Операции дифференцирования (в том числе с применением оператора $\vec{\nabla}$) определяются как

$$grad(f) \equiv \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\vec{e}_3, \qquad (3.4)$$

$$div(\vec{A}) \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}, \qquad (3.5)$$

$$\begin{aligned} rot(\vec{A}) &\equiv \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3 \equiv . \\ &\equiv a_{23}\vec{e}_1 + a_{31}\vec{e}_2 + a_{12}\vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Каждая 1-форма вида

$$\omega^{(1)} = a_1\tilde{d}x_1 + a_2\tilde{d}x_2 + a_3\tilde{d}x_3 \qquad (3.7)$$

определяет поле векторов

$$\vec{A}=\sum_{i=1}^{3}a_i\vec{e}_i\,. \qquad (3.8)$$

Каждая 2-форма вида

$$\omega^{(2)}=a_{12}\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2+a_{23}\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3+a_{31}\tilde{d}x_3\Lambda\tilde{d}x_1 \qquad (3.9)$$

определяет поле антисимметричных (при условии $a_{ij}=-a_{ji}$) тензоров 2-го ранга, или (по аналогии с векторным произведением) поле аксиальных векторов

$$\vec{k}=a_{23}\vec{e}_1+a_{31}\vec{e}_2+a_{12}\vec{e}_3\,. \qquad (3.10)$$

Напомним, что аксиальный (осевой) вектор – это величина, преобразующаяся как обычный (полярный) вектор при вращениях в евклидовом или псевдоевклидовом пространстве и (в отличие от обычного полярного вектора) не меняющая знака при отражении координатных осей.

Принятый геометрический образ полярного вектора – направленный отрезок, а аксиального – ориентированная площадка.

Рассмотрим следующие дифференциальные формы:

$$\omega^{(0)}=f\,, \qquad (3.11)$$

$$\omega^{(1)}=a_1\tilde{d}x_1+a_2\tilde{d}x_2+a_2\tilde{d}x_2\,, \qquad (3.12)$$

$$\varphi^{(1)}=b_1\tilde{d}x_1+b_2\tilde{d}x_2+b_2\tilde{d}x_2\,, \qquad (3.13)$$

$$\omega^{(2)}=c_1\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3+c_2\tilde{d}x_3\Lambda\tilde{d}x_1+c_3\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2\,, \qquad (3.14)$$

$$\omega^{(3)}=a\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3\,. \qquad (3.15)$$

Пусть символ Ψ обозначает оператор, который переводит каждую из вышеуказанных внешних дифференциальных форм в элемент соответствующего векторного пространства:

$$\Psi(\omega^{(1)})=\vec{A}; \qquad (3.16)$$

$$\Psi(\omega^{(2)})=\vec{C}; \qquad (3.17)$$

$$\Psi(\omega^{(3)})=a. \qquad (3.18)$$

Тогда в традиционных терминах векторного анализа можно записать:

$$\Psi(\omega^{(1)}\Lambda\varphi^{(1)})=\vec{A}\times\vec{B}; \qquad (3.19)$$

$$\Psi(\omega^{(1)}\Lambda\omega^{(2)})=\vec{A}\cdot\vec{C}. \qquad (3.20)$$

В соответствии с правилами исчисления внешних дифференциальных форм имеем

$$\Psi(\tilde{d}f)\equiv\Psi(\tilde{d}\omega^{(0)})=\Psi(\omega^{(1)})=grad(f)=\vec{A}; \qquad (3.21)$$

$$\Psi(\tilde{d}\omega^{(1)})=\Psi(\omega^{(2)})=rot(\vec{A}); \qquad (3.22)$$

$$\Psi(\tilde{d}\omega^{(2)})=\Psi(\omega^{(3)})=div(\vec{A}), \qquad (3.23)$$

то есть

$$a=div(\vec{A}) \qquad (3.24)$$

$$\vec{C}=rot(\vec{A})\,. \qquad (3.25)$$

Применяя вышеуказанные соотношения, можно установить следующие соответствия между тождествами стандартного векторного исчисления и исчисления внешних дифференциальных форм:

$$\tilde{d}(\tilde{d}f)=0\rightarrow rot(grad(f))\equiv\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)=0; \qquad (3.26)$$

$$\tilde{d}(\tilde{d}\omega^{(1)})=0\rightarrow div(rot(\vec{A}))\equiv\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]=0; \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{d}(fg)=f\tilde{d}g+g\tilde{d}f\rightarrow grad(fg)\equiv\vec{\nabla}(fg)=\\&=g\cdot grad(f)+f\cdot grad(g)\equiv g\vec{\nabla}f+f\vec{\nabla}g;\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{d}(f\omega^{(1)})=\tilde{d}f\Lambda\omega^{(1)}+f\tilde{d}\omega^{(1)}\rightarrow rot(f\vec{A})\equiv\vec{\nabla}\times(f\vec{A})=\\&=(grad(f))\times\vec{A}+f\cdot rot(\vec{A})\equiv(\vec{\nabla}f)\times\vec{A}+f\vec{\nabla}\times\vec{A};\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{d}(f\omega^{(2)})=\tilde{d}f\Lambda\omega^{(2)}+f\tilde{d}\omega^{(2)}\rightarrow div(f\vec{C})\equiv\vec{\nabla}\cdot(f\vec{C})=\\&=f\cdot div(\vec{C})+\vec{C}\cdot grad(f)\equiv f(\vec{\nabla}\cdot\vec{C})+\vec{C}\cdot\vec{\nabla}f.\end{aligned} \tag{3.30}$$

4 Обобщенная формула Стокса

Основной интегральной формулой исчисления внешних дифференциальных форм является формула Стокса [1-10]

$$\int_{\partial V_p}\omega^{(p-1)}=\int_{V_P}\tilde{d}\omega^{(p-1)}\equiv\int_{V_P}\varphi^{(p)}. \tag{4.1}$$

Здесь $\omega^{(p-1)}$ – это $(p-1)$-форма, заданная на p-мерном ориентированном многообразии V_p в R^n, ∂V_p – это граница V_p с соответствующей ориентацией, а $\varphi^{(p)}$ – форма степени p.

Рассмотрим теперь частные примеры применения формулы (4.1).

1. Если $p=1$, то мы имеем обобщенную формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_{V_1}\tilde{d}f=\int_{\partial V_1}f'(x)\tilde{d}x=f(B)-f(A), \tag{4.2}$$

которая при $n=1$ обращается в стандартную

$$\int_{[a,b]}\tilde{d}f=\int_a^b f'(x_1)\tilde{d}x_1=f(b)-f(a)\cdot \tag{4.3}$$

2. Если $p=2$ и $n=2$, то V_2 – это область, ограниченная замкнутой простой гладкой кривой ∂V_2. В этом случае $\omega^{(1)}=a_1\tilde{d}x_1+a_2\tilde{d}x_2$, а

$$\varphi^{(2)}\equiv\tilde{d}\omega^{(1)}=\sum_{i=1}^{2}\tilde{d}a_i\Lambda\tilde{d}x_i=\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\tilde{d}x_i\Lambda\tilde{d}x_j=\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2\cdot \tag{4.4}$$

Тогда формула (4.1) принимает вид

$$\int_{\partial V_2}(a_1\tilde{d}x_1+a_2\tilde{d}x_2)=\int_{V_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2, \tag{4.5}$$

что представляет собой классическую формулу Грина.

3. Пусть теперь $p=2$, а $n=3$. В таком случае V_2 – это гладкая ориентированная поверхность в R^3 с границей ∂V_2, являющейся гладкой ориентированной кривой с направлением обхода, соответствующим ориентации поверхности. Тогда, учитывая, что

$$\omega^{(1)}=a_1\tilde{d}x_1+a_2\tilde{d}x_2+a_3\tilde{d}x_3, \tag{4.6}$$

соответствующая 2-форма будет иметь вид

$$\begin{aligned}&\varphi^{(2)}\equiv\tilde{d}\omega^{(1)}=\sum_{i=1}^{3}\tilde{d}a_i\Lambda\tilde{d}x_i=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\tilde{d}x_i\Lambda\tilde{d}x_j=\\&=\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2+\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\tilde{d}x_3\Lambda\tilde{d}x_1.\end{aligned} \tag{4.7}$$

В силу этого из (26) следует стандартная формула Стокса

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial V_2}(a_1\tilde{d}x_1+a_2\tilde{d}x_2+a_3\tilde{d}x_3)=\int\limits_{V_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2+\\+\int\limits_{V_2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3+\int\limits_{V_2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\tilde{d}x_3\Lambda\tilde{d}x_1.\end{aligned}\tag{4.8}$$

4. Рассмотрим случай $p=3, n=3$. В этом варианте V_3 - это замкнутая область в R^3, ограниченная гладкой поверхностью ∂V_3. Тогда

$$\omega^{(2)}=a_1\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3+a_2\tilde{d}x_3\Lambda\tilde{d}x_1+a_3\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2\,.\tag{4.9}$$

Соответственно, 3-форма

$$\begin{aligned}\varphi^{(3)}\equiv\tilde{d}\,\omega^{(2)}=\tilde{d}a_1\Lambda\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3+\tilde{d}a_2\Lambda\tilde{d}x_3\Lambda\tilde{d}x_1+\tilde{d}a_3\Lambda\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2=\\=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Следовательно, согласно (4.1) имеет место равенство, называемое теоремой Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_{\partial V_3}(a_1\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3+a_2\tilde{d}x_3\Lambda\tilde{d}x_1+a_3\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2)=\int\limits_{V_3}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)\tilde{d}x_1\Lambda\tilde{d}x_2\Lambda\tilde{d}x_3.\tag{4.11}$$

5 Применение исчисления внешних дифференциальных форм в термодинамике

В работах [11-15] даны примеры вывода соотношений между термодинамическими коэффициентами. С математической точки зрения такая процедура связана с переходом от одних переменных к другим. В этом контексте продемонстрирована связь методологии внешних дифференциальных форм с методом якобианов.

Наиболее эффективна работа с внешними дифференциальными формами как альтернатива методу якобианов [11-15].

Как в физике, так и в математике часто ставится задача перехода от одних переменных к другим, традиционно решаемая при помощи якобианов [1-15]. В исчислении внешних дифференциальных форм переход от одних переменных (u,v) к другим (x,y) записывается как

$$\tilde{d}u\Lambda\tilde{d}v=J\tilde{d}x\Lambda\tilde{d}y\,.\tag{5.1}$$

Предлагается формально переписать указанное соотношение в виде дроби, выражающей коэффициент J (якобиан) в виде

$$J\equiv\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\tilde{d}u\Lambda\tilde{d}v}{\tilde{d}x\Lambda\tilde{d}y}\,.\tag{5.2}$$

По сути дела используется другая форма записи якобиана. В развернутом виде формула (5.2) записывается как

$$\begin{aligned}J=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y=\\=\frac{\tilde{d}u\Lambda\tilde{d}y}{\tilde{d}x\Lambda\tilde{d}y}\cdot\frac{\tilde{d}v\Lambda\tilde{d}x}{\tilde{d}y\Lambda\tilde{d}x}-\frac{\tilde{d}u\Lambda\tilde{d}x}{\tilde{d}y\Lambda\tilde{d}x}\cdot\frac{\tilde{d}v\Lambda\tilde{d}y}{\tilde{d}x\Lambda\tilde{d}y}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Связь, отражающая обратный переход, будет иметь вид

$$J^{-1} \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\tilde{d}x\Lambda\tilde{d}y}{\tilde{d}u\Lambda\tilde{d}v}. \tag{5.4}$$

Очевидно, что $J \cdot J^{-1} = 1$.

Опираясь на (5.1) – (5.4), в работах [11-15] продемонстрирована простота получения соотношений между термодинамическими величинами. Для этого удобно пользоваться калибровочным соотношением, переписанным с использованием 2-форм в виде

$$\frac{\partial(T,S)}{\partial(P,V)} = \frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}S}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}V} = 1. \tag{5.5}$$

По сути, (5.5) – это соотношение для термодинамических величин (T,S,P,V). Оно очень легко доказывается с помощью (5.1) (см. [15]). Пусть в левой части (5.1) стоит 2-форма $\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}S$. Тогда, используя разложение 1-форм по внешним дифференциалам независимых переменных (P,V) и выполняя вычисления с учетом правил исчисления внешних дифференциальных форм, будем иметь тождество, из которого делается вывод о равенстве якобиана единице [15].

Самое простое использование якобиана в форме (5.5) – это его непосредственное раскрытие согласно (5.3). Таким способом, в сочетании с использованием условных единиц (см. ниже), доказывается следующее равенство

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}S}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}V} = \frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}V}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}V}\cdot\frac{\tilde{d}S\Lambda\tilde{d}P}{\tilde{d}V\Lambda\tilde{d}P} - \frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}P}{\tilde{d}V\Lambda\tilde{d}P}\cdot\frac{\tilde{d}S\Lambda\tilde{d}V}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}V} = \\
&= \frac{1}{\left(\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}V / \tilde{d}T\Lambda\tilde{d}V\right)}\cdot\frac{\tilde{d}S\Lambda\tilde{d}P}{\tilde{d}V\Lambda\tilde{d}P}\cdot\frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}P}{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}P} - \frac{1}{\left(\tilde{d}V\Lambda\tilde{d}P / \tilde{d}T\Lambda\tilde{d}P\right)}\cdot\frac{\tilde{d}S\Lambda\tilde{d}V}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}V}\cdot\frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}V}{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}V} = \\
&= \frac{1}{P\beta_V}\cdot\frac{\tilde{d}S\Lambda\tilde{d}P}{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}P}\cdot\frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}P}{\tilde{d}V\Lambda\tilde{d}P} - \frac{1}{V\alpha_P}\cdot\frac{\tilde{d}S\Lambda\tilde{d}V}{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}V}\cdot\frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}V}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}V} = \\
&= \frac{1}{P\beta_V}\cdot\frac{C_P}{T}\cdot\frac{1}{V\alpha_P} - \frac{1}{V\alpha_P}\cdot\frac{C_V}{T}\cdot\frac{1}{P\beta_V} = \frac{C_P - C_V}{PV\alpha_P\beta_V}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Нетрудно показать, что при учете связей между термодинамическими коэффициентами $P\beta_V = K_T\alpha_P$ и $C_P - C_V = TC_V\gamma_G\alpha_P$ [13-15] мы получаем небезызвестное соотношение Грюнайзена (см. также ниже).

Формализм исчисления внешних дифференциальных форм допускает, как и методология якобианов, использование условных единиц, число которых равняется шести. Например, если использовать условную единицу $\frac{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}T}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}T} = 1$, то, умножая ее на калибровочное соотношение (5.5), получаем равенство

$$\frac{\tilde{d}T\Lambda\tilde{d}S}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}V}\cdot\frac{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}T}{\tilde{d}P\Lambda\tilde{d}T} = 1. \tag{5.7}$$

Преобразуем его.

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\tilde{d}T\wedge\tilde{d}S}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V}\cdot\frac{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T} = \frac{\tilde{d}T\wedge\tilde{d}S}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V} = -\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{1}{(\tilde{d}V\wedge\tilde{d}P)/(\tilde{d}T\wedge\tilde{d}P)} = \\
&= -\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{1}{(\partial V/\partial T)_P} = -\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{1}{V\alpha_P} = \\
&= -\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}\cdot\frac{1}{(\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T)/(\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T)}\cdot\frac{1}{V\alpha_P} = \\
&= -\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}\cdot\left(-\frac{V}{K_T}\right)\cdot\frac{1}{V\alpha_P} = -\frac{1}{V\alpha_S}\cdot\frac{C_V}{T}\cdot\frac{1}{K_T\alpha_P}.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Данное соотношение есть ни что иное как перефразированное соотношение Грюнайзена [11-15], поскольку, согласно [17], параметр Грюнайзена определяется как $\gamma_G = -1/(T\alpha_S)$. При этом доказательство этого соотношения можно провести указанным выше способом, исходя из определения параметра Грюнайзена для изотропной среды $\gamma_G = V(\partial P/\partial U)_V$ (где U – термодинамический потенциал).

Если же исходить из (5.3), то, используя другой путь преобразований, мы получим соотношение:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{\tilde{d}T\wedge\tilde{d}S}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V} = \frac{\tilde{d}T\wedge\tilde{d}V}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}P}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}P} - \frac{\tilde{d}T\wedge\tilde{d}P}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}P}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V} = \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}P}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}P}\cdot\frac{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T} - \frac{1}{(\partial V/\partial T)_P}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V}\cdot\frac{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T} = \\
&= \frac{1}{P\beta_V}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}P}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}P} - \frac{1}{V\alpha_P}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}V} = \\
&= \frac{1}{P\beta_V}\cdot\frac{C_P}{T}\cdot\frac{1}{V\alpha_P} - \frac{1}{(V\alpha_P)^2}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T} = \\
&= \frac{C_P}{PTV\beta_V\alpha_P} - \frac{1}{(V\alpha_P)^2}\cdot\frac{\tilde{d}S\wedge\tilde{d}V}{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}\cdot\frac{\tilde{d}V\wedge\tilde{d}T}{\tilde{d}P\wedge\tilde{d}T} = \\
&= \frac{C_P}{PTV\beta_V\alpha_P} - \frac{1}{(V\alpha_P)^2}\cdot\frac{C_V}{T}\cdot\frac{V}{K_T}
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Если вспомнить [15], что $C_P/C_V = K_S/K_T$ и $P\beta_V = \alpha_P K_T$, то будем иметь

$$
1 = \frac{C_P}{TV\alpha_P^2}\left(\frac{1}{K_T} - \frac{1}{K_S}\right). \tag{5.10}
$$

Выводы

Дан сжатый обзор фундаментальных понятий исчисления внешних дифференциальных форм и основополагающих принципов обращения с ними.

Проведено сравнение исчисления внешних дифференциальных форм с традиционным векторным исчислением.

Показано, в частности, что их применение является адекватной альтернативой методу якобианов.

Продемонстрировано, что внешние дифференциальные формы могут успешно применяться в физике, в частности, в термодинамике.

Впервые в сжатой, но наглядной форме представлен обзор-пособие для изучающих основополагающие принципы исчисления внешних дифференциальных форм, а также его приложений. В частности, к новизне можно отнести изложение способов применения вышеупомянутого аппарата, ранее не встречавшихся в литературе. К этому можно добавить, что цитируемые источники призваны помочь исследователю в ориентации в методах исчисления внешних дифференциальных форм (мало использовавшихся ранее в научной литературе). Следует сказать, что данная работа призвана привлечь внимание физиков (и не только) к фундаментальным аспектам устройства физического мира, показывая его с новой, практически не использовавшейся ранее стороны и подчеркивая его многогранность.

В дальнейшем авторы планируют применить излагаемую методику к большему числу переменных, то есть расширить используемый базис (в частности, за счет введения в рассмотрение электромагнитных величин). Например, планируется рассмотрение процессов, связанных с распространением света в неидеальных кристаллических структурах [18], [19].

Список литературы

1. Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних дифференциальных форм [Текст] / Н. В. Ефимов. – М. : Наука, 1977. – 88 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики [Текст] / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 473 с.
3. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере [Текст] / Э. Картан. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 207 с.
4. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С. П. Фиников. – Л. : Гостехиздат, 1948. – 433 с.
5. Картан Э. Интегральные инварианты [Текст] / Э. Картан. – М.-Л. : Гостехиздат, 1940. – 216 с.
6. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии [Текст] / С. Стернберг. – М .: Мир, 1970. – 412 с.
7. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы [Текст] / А. Картан. – М. : Мир, 1971. – 392 с.
8. Шутц Б. Геометрические методы математической физики [Текст] / Б. Шутц. – М. : Мир, 1984.– 303 с.
9. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности [Текст] / Л. Сантало. – М. : Наука, 1983. – 360 с.
10. Ильин В. А. Основы математического анализа. Часть 2 [Текст] / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1971. – 364 с.
11. Шелест В. В. Применение исчисления внешних дифференциальных форм в термодинамике. Часть 1. Основные положения термодинамики и теория потенциалов в представлении исчисления внешних дифференциальных форм [Текст] / В. В. Шелест, А. В. Христов, Д. А.. Червинский // ФТВД. – 2017. – Т. 27, № 4. – С. 5–49.
12. Шелест В. В. Применение исчисления внешних дифференциальных форм в термодинамике. II. Определение соотношений между термодинамическими коэффициентами на основе исчисления внешних дифференциальных форм [Текст] / В. В. Шелест, Д. А. Червинский // ФТВД. – 2018. – Т. 28, № 4. – С. 83–107.
13. Шелест В. В. Применение исчисления дифференциальных форм в термодинамике. IV. Калориметрия в свете исчисления внешних дифференциальных форм [Текст] / В. В. Шелест, Д. А. Червинский // ФТВД. – 2019. – Т. 29, № 3. – С. 47–64.
14. Шелест В. В. Сравнение формализма исчисления внешних дифференциальных форм с методом якобианов [Текст] / В. В. Шелест, Д. А. Червинский // ФТВД. – 2020. – Т. 30, № 3. – С. 33–36.
15. Шелест В. В. Влияние комплексного ангармонизма на дилатометрические и калориметрические свойства конденсированных систем в формализме термодинамики устойчивости равновесного фазового состояния [Текст] / В. В. Шелест, А. В. Христов, Д. А. Червинский // ФТВД. – 2020. – Т. 30, № 4. – С. 18–33.

16. Червинский Д. А. Некоторые особенности исчисления внешних дифференциальных форм в приложении к математическим и физическим задачам [Текст] / Д. А. Червинский, В. В. Шелест // ФТВД. – 2021. – Т. 31, № 3. (в печати)/
17. Червинский Д. А. Взаимосвязь термодинамических коэффициентов, их связь с комплексным ангармонизмом и акустикой, особенности их влияния на термодинамику устойчивости фазового равновесия в формализме внешних дифференциальных форм [Текст] / Д. А. Червинский, А. В. Христов, В. В. Шелест // ФТВД. – 2021. – Т. 31, № 2. – С. 12–27.
18. Паладян Ю. А. Численное моделирование зависимости удельного угла вращения плоскости поляризации упругой волны в неидеальном 1D фононном кристалле от концентрации структурных дефектов [Текст] / Ю. А. Паладян, В. В. Румянцев, С. А. Федоров // Проблемы искусственного интеллекта. – 2021. – № 2 (21). – С. 52–58.
19. Румянцев В. В. Математическое моделирование нестационарного состояния структурных единиц молекулярного кристалла и порождаемого ими электромагнитного поля [Текст] / В. В. Румянцев, А. Е. Рыбалка // Проблемы искусственного интеллекта. – 2021. – № 3(22). – С. 22–30.

References

1. Efimov N.V. *Vvedenie v teoriyu vneshnyh differencialnyh form* [External differential forms theory introduction], M., Nauka, 1977, 88 c.
2. Arnold V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoy mehaniki* [Classic mechanics mathematical methods], M., Nauka, 1989, 473 c.
3. Cartan E. *Rimanova geometriya v ortogonalnom repere* [Riman geometryin orthogonal reper], M., Izd. MGU, 1960, 207c.
4. Finikov S.P. *Metod vneshnyh differencialnyh form Kartana v differencialnoy geometrii* [Cartan external forms method in differential geometry], L., Gostehizdat, 1948, 433c.
5. Cartan E. *Integralnye invarianty* [Integral invariants], M.-L., Gostehizdat, 1940, 216 c.
6. Sternberg S. *Lekcii po differencialnoy geometrii* [Lectures on differential geometry], M., Mir, 1970, 412 c.
7. Kartan A. *Differencialnoye ischislenie. Differencialnye formy* [Differential calculus. Differential forms], M., Mir, 1971, 392 c.
8. Schutz B. *Geometricheskie metody matematicheskoy fiziki* [Mathematical physics geometrical methods], M., Mir, 1984, 303 c.
9. Santalo L. *Integralnaya geometriya i geometricheskiye veroyatnosti* [Integral geometry and geometrical probabilities], M., Nauka, 1983, 360 c.
10. Ilyin V.A., Poznyak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza. Chast 2* [Mathematical analysis bases. Part 2], M., Nauka, 1971, 364 c.
11. Shelest V.V., Hristov A.V., Chervinskii D.A. *Primeneniye ischisleniya vneshnih differencialnyh form v termodinamike. Chast 1. osnovnye polozheniya termodinamiki i teoriya potencialov v predstavlenii ischisleniya vneshnih differencialnyh form* [Application of calculation of exterior differential forms to thermodynamics. I. Basic frameworks of thermodynamics and theory of potentials in terms of calculation of exterior differential forms]. *FTVD*, 2017, T. 27, N.4, c.5-49.
12. Shelest V.V., Chervinskii D.A. *Primeneniye ischisleniya vneshnih differencialnyh form v termodinamike. II. Opredeleniye sootnosheniy mezhdu termodinamicheskimi koefficientami na osnove ischisleniya vneshnih differencialnyh form* [Application of calculation of exterior differential forms to thermodynamics. II. Relations between thermodynamic coefficients derived from calculation of external differential forms], *FTVD*, 2018, T. 28, N. 4, C. 83-107.
13. Shelest V.V., Chervinskii D.A. *Primeneniye ischisleniya vneshnih differencialnyh form v termodinamike. IV. Kalorimetriya v svete ischisleniya vneshnih differencialnyh form* [Application of calculation of differential forms to thermodynamics. IV. Calorimetry from the standpoint of external differential forms calculus]. *FTVD*, 2019, T. 29, N. 3, C.47-64.
14. Shelest V.V., Chervinskii D.A. *Sravneniye formalizma ischisleniya vneshnih differencialnyh form s metodom yakobianov* [Comparison of the formalism of external differential forms calculus and the method of Jacobeans]. *FTVD*, 2020, T. 30, N. 3, C. 33-36.
15. Shelest V.V., Hristov A.V., Chervinskii D.A. Vliyaniye kompleksnogo angarmonizma na dilatometricheskiye i kalorimetricheskiye svoystva kondensirovannyh sistem v formalizme termodinamiki ustoychivosti ravnovesnogo fazovogo sostoyaniya [Effect of complex anharmonicity on dilatometric and calorimetric properties of the condensed systems studied by the methods of thermodynamics of stability of the equilibrium phase state]. *FTVD*, 2020, T. 30, N. 4, C. 18-33.

16. Chervinskii D.A., Shelest V.V. Nekotorye osobennosti ischisleniya vneshnih differencialnyh form v prilozhenii k matematicheskim I fizicheskim zadacham [Some external differential forms calculation features applying to mathematical and physical problems]. *FTVD*, 2021, T. 31, N 3 (in printing).
17. Chervinskii D.A., Hrustov A.V., Shelest V.V. Vzaimosvyaz termodinamicheskih koeficientov, ih svyaz s kompleksnym angarmonizmom I akustikoy, osobennocti ih vliyaniya na termodinamiku ustoychivosti fazovogo ravnovesiya v formalizme vneshnih differencialnyh form [Interrelation of thermodynamic coefficients, relation to complex anharmonicity and acoustics, features of the effect on the thermodynamics of stability of the equilibrium phase state within the frameworks of formalism of external differential forms]. *FTVD*, 2021, T. 31, N. 2, C.12-27.
18. Paladyan Yu.A., Rumyantsev V.V., Fedorov S.A. Chislennoe modelirovanie zavisimosti udelnogo ugla vrasheniya ploskosti polyarizacii uprugoy volny v neidealnom 1D fononnom kristalle ot koncentracii strukturnyh defektov [Numerical simulationof the dependence of the specific rotation angle of the polarization plane of an elastic wave in a non-ideal 1D phonon crystal on the concentration of structural defects]. *Problems of Artificial Intelligence*, 2021, No.2 (21), Pp. 52-58.
19. Rumyantsev V.V., Rybalka A.Ye. Matematicheskoe modelirovanie nestacionarnogo sostoyaniya structurnyh edinic molekulyarnogo kristalla I porogdayemogo imi elektromagnitnogo polya [Mathematical modeling of the unsteady state of structural units of a molecular crystal and the electromagnetic field generated by them]. *Problems of Artificial Intelligence*, 2021, No. 3(22), Pp.22-30.

RESUME

D. A. Chervinskii, V. V. Shelest

External differential forms calculation aspects and its mathematical and physical applications.

External differential forms physical and mathematical application started from the 19-th century.

Their systematical studying has been realized by E. Cartan using his integral invariants theory.

Later such a methods has been applied in algebra, differential geometry and mathematical physics.

External differential forms calculus effective using have been demonstrated in papers, which are published before (in particular, by authors).

Basing on well-known relations and using external differential forms methodology authors received some thermodynamical laws.

In future referred apparatus may be applied to obtaining some unknown relations between thermodynamical parameters.

In perspective authors plan applying external differential forms calculation to the greater number of independent variables, i.e. extending using basis. In particular, proposing electromagnetic fields influence on the condensed matter physical properties. For example, planning processes, connected with light expansion in crystal structures of different nature, consideration [18], [19]. Noting, that such a crystals may be 1D, 2D etc.

РЕЗЮМЕ

Д. А. Червинский, В. В. Шелест
Аспекты исчисления внешних дифференциальных форм,
их применение в математике и физике

Внешние дифференциальные формы использовались в математике и физике еще в конце позапрошлого века.

Систематическое изучение этих форм было проведено Э. Картаном в его теории интегральных инвариантов.

Позже дифференциальные формы широко и успешно использовались в алгебре, дифференциальной геометрии и математической физике.

Опубликованные ранее работы позволяют говорить о том, что исчисление внешних дифференциальных форм может эффективно применяться для исследования физических процессов.

На основании известных результатов авторами выведены некоторые термодинамические соотношения с применением методологии внешних дифференциальных форм.

Хотя полученные соотношения и были известны, но новый, предлагаемый авторами метод представляет интерес, так как в перспективе с его помощью возможно получить и новые, ранее не известные связи между термодинамическими величинами.

В перспективе авторы планируют приложить исчисление внешних дифференциальных форм к большему числу независимых переменных, то есть расширить используемый базис. В частности, предполагается исследование влияния электромагнитных полей на физические свойства конденсированных сред. Например, планируется рассмотрение процессов, связанных с распространением света в кристаллических структурах различной природы [18], [19]. Также отметим, что упомянутые кристаллы могут быть различной размерности (1D, 2D и т.д.).

Статья поступила в редакцию 20.09.2021.