И

УДК 004.942:16

С. В. Иваница
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
83001, г. Донецк, ул. Артема, 58

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УНАРНЫХ ТЕТРАФУНКЦИЙ В ПОСТБИНАРНОЙ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

S. V. Ivanitsa
State Educational Institution of Higher Professional Education
«Donetsk National Technical University»
83001, Donetsk, st. Artema, 58

REPRESENTATION OF UNARY TETRAFUNCTIONS IN POSTBINARY DISJUNCTIVE NORMAL FORM

В статье рассматривается задача аналитического представления функций тетралогики от одного аргумента путем разработки методики перехода к нормальных формам. Выведены конституенты неопределенности, множественности и тетраединицы, с помощью которых показана возможность представления произвольной тетрафункции в постбинарной дизъюнктивной нормальной форме.
Ключевые слова: тетралогика, постбинарная нормальная форма, тетрафункция.

In the article the task of problem of analytical representation of tetralogical functions from one argument by developing a technique for passing to normal forms. The constituents of uncertainty, multiplicity and tetraone are derived with the help of which the possibility of representing an arbitrary tetrafunction is shown in postbinary disjunctive normal form.
Key words: tetralogic, postbinary normal form, tetrafunction.

В концепции тетралогики, широко освещенной в работах [1–5], ключевую позицию занимают функции тетралогики, т.е. тетрафункции. Под тетрафункцией понимается функция $\Im(x_1, x_2, ..., x_n)$, характеризующаяся тем, что ее аргументы x_i при $i = 1, 2, .., n$ и сама функция $\Im$ принимают произвольные значения из множества $\mathrm{L}_4 = \{\mathrm{A}, 0, 1, \mathrm{M}\}$, называется **функцией тетралогики** или **тетрафункцией**. Функция тетралогики от n аргументов представляет отображение $\mathrm{T}_4^n \Rightarrow \mathrm{L}_4$, где элемент $\Im \in \mathrm{T}_4^n$ – *тетрафункция* от n аргументов, имеющая область определения в пространстве L_4.

Тетрафункция, зависящая от всех аргументов несущественно, называется **константной**. В *k*-значных логиках всего существует *k* типов константных функций [6]. Следовательно, в тетралогике *определены четыре константы*: «0», «1», «A» и «M» (тетраноль, тетраединица, неопределенность и множественность соответственно).

Значения множества L_4 тетралогики определены так, что становится справедливым следующее включение

$$\left(\mathrm{T}_4^n \Rightarrow \mathrm{L}_4\right) \supset \left(\mathrm{B}_2^n \Rightarrow \mathrm{B}\right), \tag{1}$$

где выражение $\mathrm{B}_2^n \to \mathrm{B}$ определяет множество булевых функций, $\mathrm{B} = \{0, 1\}$.

Из выражения (1) следует, что множество булевых функций является подмножеством множества тетрафункций при очевидности равенства $\mathrm{L}_2 = \left(\mathrm{L}_4 \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{M}\}\right) \equiv \mathrm{B}$:

$$\mathrm{B}_2^n \subset \mathrm{T}_4^n. \tag{2}$$

Согласно записи (2), произвольная тетрафункция при значениях аргументов {0, 1} полностью соответствует аналогичной, определенной в булевом пространстве функции. Например, таблица истинности тетрафункции логического умножения (тетраконъюнкция [2], [4]) $t(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ полностью соответствует таблице истинности конъюнкции двоичной логики $f(x_3, x_4) = x_3 \wedge x_4$, если $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \left(\mathrm{L}_4 \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{M}\}\right)$ (табл. 1).

Таблица 1 – Таблицы истинности тетраконъюнкции и конъюнкции двоичной логики

$x \wedge y$		y			
		0	A	M	1
x	0	0	0	0	0
	A	0	A	0	A
	M	0	0	M	M
	1	0	A	M	1

$x \wedge y$		y	
		0	1
x	0	0	0
	1	0	1

В табл. 2 приведена таблицы истинности унарных тетрафункций (тетрафункций одного аргумента) инверсной группы, а в табл. 3 – таблицы истинности тетрафункции минимизации и максимизации множественности и неопределенности, а также константные тетрафункции.

Каждая из представленных тетрафункций выполняет определенную операцию тетралогики, которые приведены в табл. 4.

Для представления подобных тетрафункций в аналитическом виде, аналогично булевым функциям, необходима методика перехода и дальнейшего применения нормальных форм, однако принцип формирования дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм в тетралогике кардинально отличается от аналогичных нормальных форм булевой алгебры.

Таблица 2 – Таблица истинности унарных тетрафункций

x	$\varphi_1(x)=\overline{x}$	$\varphi_2(x)=\tilde{x}$	$\varphi_3(x)=\hat{x}$	$\varphi_4(x)=\overset{\frown}{x}$	$\varphi_5(x)=\breve{x}$
0	1	1	0	М	А
А	М	А	М	1	0
М	А	М	А	0	1
1	0	0	1	А	М

Таблица 3 – Тетрафункции минимизации и максимизации множественности и неопределенности, а также константные тетрафункции

x	$\overset{0}{\mathrm{M}}(x)$	$\overset{0}{\mathrm{A}}(x)$	$\overset{1}{\mathrm{M}}(x)$	$\overset{1}{\mathrm{A}}(x)$	$\overset{c}{\mathrm{M}}(x)$	$\overset{c}{\mathrm{A}}(x)$
0	0	0	0	0	М	А
А	А	0	А	1	М	А
М	0	М	1	М	М	А
1	1	1	1	1	М	А

Таблица 4 – Унарные операции тетралогики

Операнд x				Название операции тетралогики	Обозначение
0	А	М	1		
0	0	0	0	Тождественный ноль	0
0	0	М	1	Минимизация неопределенности	$\overset{0}{\mathrm{A}}(x)$
0	А	0	1	Минимизация множественности	$\overset{0}{\mathrm{M}}(x)$
0	А	М	1	Повторение x	x
0	А	1	1	Максимизация множественности	$\overset{1}{\mathrm{M}}(x)$
0	М	А	1	Неявное отрицание	$\hat{x}$
0	1	М	1	Максимизация неопределенности	$\overset{1}{\mathrm{A}}(x)$
А	0	1	М	Истинностное отрицание	$\breve{x}$
А	А	А	А	Абсолютная неопределенность	А
М	М	М	М	Абсолютная множественность	М
М	1	0	А	Неистинностное отрицание	$\overset{\frown}{x}$
1	А	М	0	Явное отрицание	$\tilde{x}$
1	М	А	0	Полное (постбинарное) отрицание	$\overline{x}$
1	1	1	1	Тождественная единица	1

Рассмотрим произвольную унарную тетрафункцию $\Im(x)$. Для представления такой тетрафункции в **постбинарной дизъюнктивной нормальной форме** (**ПДНФ**) $\Im_{\text{ПДНФ}}(x)$ требуют определения такие понятия, как *конституента множественности*, *конституента неопределенности* и *конституента тетраединицы:*

– конституента множественности $\alpha_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{M}}(x)$ в ПДНФ – тетраконъюнктивный терм (минтерм), равный значению множественности «М» на одном, вполне определенном наборе значений переменной x. В ПДНФ для каждого набора имеется своя i-я конституента $\alpha_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{M}}(x)$, принимающая значение «М» на этом наборе и значение «0» на всех остальных наборах. Запись $\mathrm{L}_4 \to \mathrm{M}$ определяет переход от значений $x \in \mathrm{L}_4$ к $\Im(x) = \mathrm{M}$, и, при $\mathrm{L}_4 = \{0, 1, \mathrm{A}, \mathrm{M}\}$, возможны четыре перехода (поэтому $i = 1..4$): $0 \to \mathrm{M}$, $\mathrm{A} \to \mathrm{M}$, $\mathrm{M} \to \mathrm{M}$, и $1 \to \mathrm{M}$. В таблице 5 приведены четыре конституенты множественности $\alpha_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{M}}(x)$, которые представляют систему тетрафункций:

$$\begin{cases} \alpha_1^{0\to\mathrm{M}}(x) = \bar{x}\,\tilde{x}\,\overset{\frown}{x}, \\ \alpha_2^{\mathrm{A}\to\mathrm{M}}(x) = \bar{x}\,\hat{x}\,\overset{\frown}{x}, \\ \alpha_3^{\mathrm{M}\to\mathrm{M}}(x) = x\,\tilde{x}\,\breve{x}, \\ \alpha_4^{1\to\mathrm{M}}(x) = x\,\hat{x}\,\breve{x}. \end{cases} \tag{3}$$

Таблица 5 – Конституенты множественности (α_i), неопределенности (β_i) и тетраединицы (γ_i)

x	$\alpha_1(x)$	$\alpha_2(x)$	$\alpha_3(x)$	$\alpha_4(x)$	$\beta_1(x)$	$\beta_2(x)$	$\beta_3(x)$	$\beta_4(x)$	$\gamma_1(x)$	$\gamma_2(x)$	$\gamma_3(x)$	$\gamma_4(x)$
0	**M**	0	0	0	**A**	0	0	0	**1**	0	0	0
A	0	**M**	0	0	0	**A**	0	0	0	**1**	0	0
M	0	0	**M**	0	0	0	**A**	0	0	0	**1**	0
1	0	0	0	**M**	0	0	0	**A**	0	0	0	**1**
Терм:	$\bar{x}\cdot\tilde{x}\cdot\overset{\frown}{x}$	$\bar{x}\cdot\hat{x}\cdot\overset{\frown}{x}$	$x\cdot\tilde{x}\cdot\breve{x}$	$x\cdot\hat{x}\cdot\breve{x}$	$\bar{x}\cdot\tilde{x}\cdot\breve{x}$	$x\cdot\tilde{x}\cdot\overset{\frown}{x}$	$\bar{x}\cdot\hat{x}\cdot\breve{x}$	$x\cdot\hat{x}\cdot\overset{\frown}{x}$	$\bar{x}\cdot\tilde{x}$	$\overset{\frown}{x}\cdot\overset{\frown}{\hat{x}}$	$\breve{x}\cdot\overset{\frown}{\hat{x}}$	$x\cdot\hat{x}$

Запись конституенты $\alpha_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{M}}(x)$ можно сократить до записи $\alpha_i(x)$, поскольку, согласно равенствам (3), каждому индексу i соответствует определенный переход $\mathrm{L}_4 \to \mathrm{M}$. Далее в работе будет использоваться как полное (если это необходимо для удобства восприятия), так и сокращенное обозначение.

– конституента неопределенности $\beta_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{A}}(x)$ – тетраконъюнктивный терм (минтерм), равный значению неопределенности «А» на одном, вполне определенном наборе значений переменной x, т.е. применительно к ПДНФ принимает значение «А» на этом наборе и значение «0» на всех остальных наборах. Сокращения записи $\beta_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{A}}(x)$ проводятся по такому же принципу, как и для конституенты $\alpha_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{M}}(x)$.

В табл. 5 приведены четыре конституенты неопределенности $\beta_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{A}}(x)$, которые представляют систему тетрафункций:

$$\begin{cases} \beta_1^{0\to\mathrm{A}}(x)=\bar{x}\,\tilde{x}\,\breve{x}, \\ \beta_2^{\mathrm{A}\to\mathrm{A}}(x)=x\,\tilde{x}\,\overset{\frown}{x}, \\ \beta_3^{\mathrm{M}\to\mathrm{A}}(x)=\bar{x}\,\hat{x}\,\breve{x}, \\ \beta_4^{1\to\mathrm{A}}(x)=x\,\hat{x}\,\overset{\frown}{x}. \end{cases} \tag{4}$$

Запись конституенты $\beta_i^{\mathrm{L}_4\to\mathrm{M}}(x)$, согласно (4), можно сократить до $\beta_i(x)$.

– конституента тетраединицы $\gamma_i^{\mathrm{L}_4\to 1}(x)$ – тетраконъюнктивный терм, соответствующий функции $\Im(x)$, равной тетраединице «1» на одном, вполне определенном наборе значений переменной x, т.е. функция принимает значение «1» на этом наборе и значение «0» на всех остальных наборах. Сокращенная запись конституенты тетраединицы – $\gamma_i(x)$.

В табл. 5 приведены четыре конституенты тетраединицы $\gamma_i^{\mathrm{L}_4\to 1}(x)$, которые представляют систему тетрафункций:

$$\begin{cases} \gamma_1^{0\to 1}(x)=\bar{x}\,\tilde{x}, \\ \gamma_2^{\mathrm{A}\to 1}(x)=\overset{\frown}{x}\,\hat{\overset{\frown}{x}}, \\ \gamma_3^{\mathrm{M}\to 1}(x)=\breve{x}\,\hat{\overset{\frown}{x}}, \\ \gamma_4^{1\to 1}(x)=x\,\hat{x}. \end{cases} \tag{5}$$

Запись конституенты $\gamma_i^{\mathrm{L}_4\to 1}(x)$, согласно системе (5), можно сократить до $\gamma_i(x)$.

Каждый из полученных минтермов обладает следующим свойством:

$$\gamma_i(x)=\alpha_i(x)\vee\beta_i(x). \tag{6}$$

Действительно,

$$\alpha_1^{0\to\mathrm{M}}(x)\vee\beta_1^{0\to\mathrm{A}}(x)=\gamma_1^{0\to(\mathrm{M}\vee\mathrm{A})}(x)=\gamma_1^{0\to 1}(x)=$$
$$=\bar{x}\,\tilde{x}\,\overset{\frown}{x}+\bar{x}\,\tilde{x}\,\breve{x}=\bar{x}\,\tilde{x}\cdot(\overset{\frown}{x}+\breve{x})=\bar{x}\,\tilde{x}\cdot 1=\bar{x}\,\tilde{x};$$
$$\alpha_4^{1\to\mathrm{M}}(x)\vee\beta_4^{1\to\mathrm{A}}(x)=\gamma_4^{1\to(\mathrm{M}\vee\mathrm{A})}(x)=\gamma_4^{1\to 1}(x)=$$
$$=x\,\hat{x}\,\breve{x}+x\,\hat{x}\,\overset{\frown}{x}=x\,\hat{x}\cdot(\overset{\frown}{x}+\breve{x})=x\,\hat{x}\cdot 1=x\,\hat{x}.$$

Свойство (6) особенно полезно для «неудобных» к сокращению минтермов $\gamma_2^{\mathrm{A}\to 1}(x)=\overset{\frown}{x}\,\hat{\overset{\frown}{x}}$ и $\gamma_3^{\mathrm{M}\to 1}(x)=\breve{x}\,\hat{\overset{\frown}{x}}$, в которых к аргументу x одновременно применены две унарные операции тетралогики ($\hat{\overset{\frown}{x}}$ и $\hat{\overset{\frown}{x}}$). В этом случае, согласно (6), получаем очень важные и неочевидные тождества:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{x}\,\hat{\overset{\frown}{x}} &\equiv \bar{x}\,\hat{x}\,\overset{\frown}{x}+x\,\tilde{x}\,\overset{\frown}{x}; \\ \breve{x}\,\hat{\overset{\frown}{x}} &\equiv x\,\tilde{x}\,\breve{x}+\bar{x}\,\hat{x}\,\breve{x}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Тождества (7) призваны облегчить сокращение (минимизацию) ПДНФ с помощью свойств операций тетралогики.

Для представления произвольной унарной тетрафункции $\Im(x)$ в постбинарной дизъюнктивной нормальной форме (ПДНФ) необходимо руководствоваться следующей зависимостью:

$$\Im_{\text{ПДНФ}}(x) = \bigvee_{i=1}^{4} \left\{ \begin{matrix} 0, \\ \alpha_i(x), \\ \beta_i(x), \\ \gamma_i(x) \end{matrix} \right\}. \tag{8}$$

В выражении (8) на каждом шаге тетрадизъюнкции используется только одна конституетна, определяющая переход от текущего значения аргумента x к значению функции $\Im(x)$. Четыре шага (i = 1..4) определяют перебор всех возможных значений аргумента $x = \{0, 1, \text{A}, \text{M}\}$. Ноль в качестве логического слагаемого используется, если на текущем шаге тетрадизъюнкции ни одна из конституент не применяется, т.е. исходная функция $\Im(x)$ принимает значение «0» при текущем значении аргумента x. Например, заданная вектором тетрафункция $\vartheta_1(x) = (0\ 0\ \text{M}\ \text{M})$, в ПДНФ имеет два перехода: $\text{M} \to \text{M}$ и $1 \to \text{M}$. Значит, согласно (8):

$$\vartheta_{1\,\text{ПДНФ}}(x) = 0 \vee 0 \vee \alpha_3^{\text{M}\to\text{M}}(x) \vee \alpha_4^{1\to\text{M}} = \alpha_3^{\text{M}\to\text{M}}(x) + \alpha_4^{1\to\text{M}}.$$

Выполним представление тетрафункций в ПДНФ из табл. 2:

а) унарную тетрафункцию $\varphi_1(x)$, реализующую операцию сильного (постбинарного) отрицания.

Исходя из таблицы истинности (табл. 2) определим необходимые минтермы и представим $\varphi_{1\,\text{ПДНФ}}(x)$:

$$\varphi_{1\,\text{ПДНФ}}(x) = \gamma_1^{0\to1}(x) + \alpha_2^{\text{A}\to\text{M}}(x) + \beta_3^{\text{M}\to\text{A}}(x) = \overline{x}\,\tilde{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\overset{\frown}{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\breve{x}.$$

Убедимся в справедливости найденного аналитического представления тетрафункции:

$$\overline{x}\,\tilde{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\overset{\frown}{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\breve{x} = \overline{x}\,(\tilde{x} + \hat{x}\,\overset{\frown}{x} + \hat{x}\,\breve{x}) =$$
$$= \overline{x}\,(\tilde{x} + \hat{x}(\overset{\frown}{x} + \breve{x})) = \overline{x}\,(\tilde{x} + \hat{x}\cdot 1) = \overline{x}\,(\tilde{x} + \hat{x}) = \overline{x}\cdot 1 = \overline{x}.$$

б) унарную тетрафункцию $\varphi_2(x)$, реализующую операцию слабого явного отрицания.

Исходя из таблицы истинности определим необходимые минтермы для $\varphi_{2\,\text{ПДНФ}}(x)$:

$$\varphi_{2\,\text{ПДНФ}}(x) = \gamma_1^{0\to1}(x) + \beta_2^{\text{A}\to\text{A}}(x) + \alpha_3^{\text{M}\to\text{M}}(x) = \overline{x}\,\tilde{x} + x\,\tilde{x}\,\overset{\frown}{x} + x\,\tilde{x}\,\breve{x}.$$

Убедимся в том, что $\varphi_{2\,\text{ПДНФ}}(x) = \tilde{x}$:

$$\overline{x}\,\tilde{x} + x\,\tilde{x}\,\overset{\frown}{x} + x\,\tilde{x}\,\breve{x} = \tilde{x}(\overline{x} + x\,\overset{\frown}{x} + x\,\breve{x}) = \tilde{x}(\overline{x} + x(\overset{\frown}{x} + \breve{x})) =$$
$$= \tilde{x}(\overline{x} + x\cdot 1) = \tilde{x}(\overline{x} + x) = \tilde{x}\cdot 1 = \tilde{x}.$$

в) унарную тетрафункцию $\varphi_3(x)$, реализующую операцию слабого неявного отрицания:

$$\varphi_{3\,\text{ПДНФ}}(x) = \alpha_2^{\text{A}\to\text{M}}(x) + \beta_3^{\text{M}\to\text{A}}(x) + \gamma_4^{1\to1}(x) = \overline{x}\,\hat{x}\,\overset{\frown}{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\breve{x} + x\,\hat{x}.$$

Убедимся в том, что полученная $\varphi_{3\,\text{ПДНФ}}(x) = \hat{x}$:

$$\overline{x}\,\hat{x}\,\widehat{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\breve{x} + x\,\hat{x} = \hat{x}(\overline{x}\,\widehat{x} + \overline{x}\,\breve{x} + x) = \hat{x}(\overline{x}\,(\widehat{x} + \breve{x}) + x) =$$

$$= \hat{x}(\overline{x}\cdot 1 + x) = \hat{x}(\overline{x} + x) = \hat{x}\cdot 1 = \hat{x}.$$

г) унарную тетрафункцию $\varphi_4(x)$, реализующую операцию слабого неистинностного отрицания:

$$\varphi_{4\,\text{ПДНФ}}(x) = \alpha_1^{0\to\text{M}}(x) + \gamma_2^{\text{A}\to 1}(x) + \beta_4^{1\to\text{A}}(x) = \overline{x}\,\tilde{x}\,\widehat{x} + \widehat{x}\,\hat{\widehat{x}} + x\,\hat{x}\,\widehat{x}.$$

Выполним проверку:

$$\overline{x}\,\tilde{x}\,\widehat{x} + \widehat{x}\,\hat{\widehat{x}} + x\,\hat{x}\,\widehat{x} = \overline{x}\,\tilde{x}\,\widehat{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\widehat{x} + x\,\tilde{x}\,\widehat{x} + x\,\hat{x}\,\widehat{x} =$$

$$= \overline{x}\,\widehat{x}\cdot(\tilde{x} + \hat{x}) + x\,\widehat{x}\cdot(\tilde{x} + \hat{x}) = \overline{x}\,\widehat{x} + x\,\widehat{x} = \widehat{x}\cdot(\overline{x} + x) = \widehat{x}.$$

д) унарную тетрафункцию $\varphi_5(x)$, реализующую операцию слабого истинностного отрицания:

$$\varphi_{5\,\text{ПДНФ}}(x) = \beta_1^{0\to\text{A}}(x) + \gamma_3^{\text{M}\to 1}(x) + \alpha_4^{1\to\text{M}}(x) = \overline{x}\,\tilde{x}\,\breve{x} + \breve{x}\,\hat{\breve{x}} + x\,\hat{x}\,\breve{x}.$$

Выполним минимизацию $\varphi_{5\,\text{ПДНФ}}(x)$ и убедимся, что тетрафункция действительно соответствует операции $\breve{x}$:

$$\overline{x}\,\tilde{x}\,\breve{x} + \breve{x}\,\hat{\breve{x}} + x\,\hat{x}\,\breve{x} = \overline{x}\,\tilde{x}\,\breve{x} + (x\,\tilde{x}\,\breve{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\breve{x}) + x\,\hat{x}\,\breve{x} = (\overline{x}\,\tilde{x}\,\breve{x} + \overline{x}\,\hat{x}\,\breve{x}) + (x\,\tilde{x}\,\breve{x} + x\,\hat{x}\,\breve{x}) =$$

$$= \overline{x}\,\breve{x}\cdot(\tilde{x} + \hat{x}) + x\,\breve{x}\cdot(\tilde{x} + \hat{x}) = \overline{x}\,\breve{x}\cdot 1 + x\,\breve{x}\cdot 1 = \breve{x}\cdot(\overline{x} + x) = \breve{x}.$$

При представлении в ПДНФ тетрафункций из табл. 3, получаем следующие нормальные формы:

а) для $\overset{0}{\text{A}}(x)$ – минимизации неопределенности:

$$\overset{0}{\text{A}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \alpha_3^{\text{M}\to\text{M}}(x) + \gamma_4^{1\to 1}(x) = x\,\tilde{x}\,\breve{x} + x\,\hat{x}.$$

Выполним соответствующие преобразования для получения минимальной ПДНФ:

$$\overset{0}{\text{A}}_{\text{ПДНФ}}(x) = x\,\tilde{x}\,\breve{x} + x\,\hat{x} = x\cdot(\tilde{x}\,\breve{x} + \overline{\tilde{x}}) = x\cdot(\breve{x} + \overline{\tilde{x}}) = x\,\breve{x} + x\,\hat{x}.$$

б) для $\overset{0}{\text{M}}(x)$ – минимизации множественности:

$$\overset{0}{\text{M}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \beta_2^{\text{A}\to\text{A}}(x) + \gamma_4^{1\to 1}(x) = x\,\tilde{x}\,\widehat{x} + x\,\hat{x}.$$

Минимизируем $\overset{0}{\text{M}}_{\text{ПДНФ}}(x)$:

$$\overset{0}{\text{M}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \beta_2^{\text{A}\to\text{A}}(x) + \gamma_4^{1\to 1}(x) = x\,\tilde{x}\,\widehat{x} + x\,\hat{x} =$$

$$= x(\tilde{x}\,\widehat{x} + \hat{x}) = x(\overline{\hat{x}}\,\widehat{x} + \hat{x}) = x(\widehat{x} + \hat{x}) = x\,\widehat{x} + x\,\hat{x}.$$

в) для $\overset{1}{\text{A}}(x)$ – максимизации неопределенности:

$$\overset{1}{\text{A}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \gamma_2^{\text{A}\to 1}(x) + \alpha_3^{\text{M}\to\text{M}}(x) + \gamma_4^{1\to 1}(x) = \widehat{x}\,\hat{\widehat{x}} + x\,\tilde{x}\,\breve{x} + x\,\hat{x}.$$

Минимизируем $\overset{1}{\text{A}}_{\text{ПДНФ}}(x)$:

$$\overset{1}{\text{A}}_{\text{ПДНФ}}(x) = (\overline{x}\,\hat{x}\,\widehat{x} + x\,\tilde{x}\,\widehat{x}) + x\,\tilde{x}\,\breve{x} + x\,\hat{x} = x\,\tilde{x}\cdot(\widehat{x} + \breve{x}) + \hat{x}\cdot(\overline{x}\,\widehat{x} + x) =$$

$$= x\,\tilde{x} + \hat{x}\cdot(\widehat{x} + x) = x\,\tilde{x} + \hat{x}\,\widehat{x} + x\,\hat{x} = x\cdot(\tilde{x} + \hat{x}) + \hat{x}\,\widehat{x} = x + \hat{x}\,\widehat{x}.$$

г) для $\overset{1}{\text{M}}(x)$ — максимизации множественности:

$$\overset{1}{\text{M}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \beta_2^{\text{A}\to\text{A}}(x) + \gamma_3^{\text{M}\to 1}(x) + \gamma_4^{1\to 1}(x) = x\,\tilde{x}\,\widehat{x} + \breve{x}\,\hat{\breve{x}} + x\,\hat{x}.$$

Получаем минимальную запись:

$$\overset{1}{\mathrm{M}}(x) = x\tilde{x}\overset{\frown}{x} + (x\tilde{x}\breve{x} + \bar{x}\hat{x}\breve{x}) + x\hat{x} = x\tilde{x}\cdot(\overset{\frown}{x} + \breve{x}) + \hat{x}\cdot(\bar{x}\breve{x} + x) =$$
$$= x\tilde{x} + \hat{x}\cdot(\breve{x} + x) = x\tilde{x} + \hat{x}\breve{x} + \hat{x}x = x\cdot(\tilde{x} + \hat{x}) + \hat{x}\breve{x} = x + \hat{x}\breve{x}.$$

д) для $\overset{c}{\mathrm{A}}(x)$ — тождественной неопределенности:

$$\overset{c}{\mathrm{A}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \beta_1^{0\to\mathrm{A}}(x) + \beta_2^{\mathrm{A}\to\mathrm{A}}(x) + \beta_3^{\mathrm{M}\to\mathrm{A}}(x) + \beta_4^{1\to\mathrm{A}}(x) = \bar{x}\tilde{x}\breve{x} + x\tilde{x}\overset{\frown}{x} + \bar{x}\hat{x}\breve{x} + x\hat{x}\overset{\frown}{x}.$$

Получаем минимальную запись:

$$\overset{c}{\mathrm{A}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \bar{x}\breve{x}(\tilde{x} + \hat{x}) + x\overset{\frown}{x}(\tilde{x} + \hat{x}) = \bar{x}\breve{x} + x\overset{\frown}{x} = \bar{x}\overline{\overset{\frown}{x}} + x\overset{\frown}{x} = \overline{x \oplus \overset{\frown}{x}}.$$

е) для $\overset{c}{\mathrm{M}}(x)$ — тождественной множественности:

$$\overset{c}{\mathrm{M}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \alpha_1^{0\to\mathrm{M}}(x) + \alpha_2^{\mathrm{A}\to\mathrm{M}}(x) + \alpha_3^{\mathrm{M}\to\mathrm{M}}(x) + \alpha_4^{1\to\mathrm{M}}(x) = \bar{x}\tilde{x}\overset{\frown}{x} + \bar{x}\hat{x}\overset{\frown}{x} + x\tilde{x}\breve{x} + x\hat{x}\breve{x}.$$

Минимизируем $\overset{c}{\mathrm{M}}_{\text{ПДНФ}}(x)$:

$$\overset{c}{\mathrm{M}}_{\text{ПДНФ}}(x) = \bar{x}\overset{\frown}{x}(\tilde{x} + \hat{x}) + x\breve{x}(\tilde{x} + \hat{x}) = \bar{x}\overset{\frown}{x} + x\breve{x} = \bar{x}\overset{\frown}{x} + x\overline{\overset{\frown}{x}} = x \oplus \overset{\frown}{x}.$$

Чтобы представить в постбинарной дизъюнктивной нормальной форме (ПДНФ) функцию, например, с двумя аргументами, нужно получить тетраконъюнкцию минтермов согласно переходам от значения первого аргумента к значению тетрафункции и от значения второго аргумента к значению тетрафункции. Так, аналогично формуле (8), получаем:

$$\Im_{\text{ПДНФ}}(x_1, x_2) = \bigvee_{i=1}^{4}\left(\bigvee_{j=1}^{4}\left(\begin{array}{l}\left\{0, \alpha_i(x_1), \beta_i(x_1), \gamma_i(x_1)\right\} \wedge \\ \wedge \left\{\alpha_j(x_2), \beta_j(x_2), \gamma_j(x_2)\right\}\end{array}\right)\right). \qquad (9)$$

В формуле (9) при $i = 1..4$ и $j = 1..4$ осуществляется $4^2 = 16$ переходов, что соответствует всем возможным значением тетрафункции от двух аргументов. Значение «0» в качестве значения минтерма на текущем шаге переходов $(x_1, x_2) \to \Im(x_1, x_2)$ используется, когда исходная функция $\Im(x_1, x_2) = 0$ при значениях аргументов x_1 и x_2 на этом шаге.

Выводы

Тетралогика как формальная логическая система, является ключевым фактором и основным инструментом расширения классического кодо-логического базиса современных компьютерных систем, т.е. является фундаментальной основой концепции постбинарного компьютинга.

Рассмотрение аксиоматических основ тетралогики дополнено важным аспектом, выраженном в формировании аналитического представления тетрафункций, аналогом которых выступила дизъюнктивная нормальная форма классической логики. Основным недостатком полученной нормальной форм ПДНФ является «громоздкость» по сравнению с классической ДНФ. Для устранения данного недостатка необходима разработка методов минимизации аналитического представления тетрафункций.

Список литературы

1. Иваница С. В. Обоснование тетралогики как неклассической объективной логики с информационной семантикой : монография [Текст] / С. В. Иваница. – ГОУВПО «ДОННТУ». – Донецк: УНИТЕХ, 2020. – 196 с.
2. Аноприенко, А. Я. Постбинарный компьютинг и интервальные вычисления в контексте кодологической эволюции [Текст] / А. Я. Аноприенко, С. В. Иваница. – Донецк : УНИТЕХ, 2011. – 248 с.
3. Аноприенко А. Я. Введение в постбинарный компьютинг. Арифметико-логические основы и программно-аппаратная реализация [Текст] / А. Я. Аноприенко, С. В. Иваница. – Донецк : ДОННТУ, 2017. – 308 с.
4. Иваница С. В. Особенности реализации операций тетралогики [Текст] / С. В. Иваница, А. Я. Аноприенко // Наукові праці Донецького національного технічного університету. – Донецьк, 2011. – С. 134–140. – (Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка» ; вип. 13(185).
5. Иваница С. В. Исследование унарных функций тетралогики с применением логико-математических конструкций [Текст] / С. В. Иваница // Вестник Академии гражданской защиты»: научный журнал. – Донецк: ГОУВПО «Академия гражданской защиты» МЧС ДНР, 2021. – Вып. 1(25). – С. 39–47.
6. Карпенко, А. С. Развитие многозначной логики [Текст] / А. С. Карпенко. – Москва : Издательство ЛКИ, 2010. – Изд. 3-е, пере-раб. и доп. – 448 с.
7. Зюзьков, В. М. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие [Текст] / В. М. Зюзьков. –Томск : Эль Контент, 2015. – 236 с.

References

1. Ivanitsa, S. *Substantiation of tetralogic as a non-classical objective logic with informational semantics: monograph* [Obosnovaniye tetralogiki kak neklassicheskoy ob"yektivnoy logiki s informatsionnoy semantikoy : monografiya]. Donetsk, 2020. 196 p.
2. Anoprienko A., Ivanitsa S. *Postbinary computing and interval computing in the context of code-logical evolution* [Postbinarnyy komp'yuting i interval'nyye vychisleniya v kontekste kodo-logicheskoy evolyutsii]. Donetsk, 2011. 248 p.
3. Anoprienko A., Ivanitsa S. *Introduction to post-binary computing. Arithmetic and logical foundations and software and hardware implementation* [Vvedeniye v postbinarnyy komp'yuting. Arifmetiko-logicheskiye osnovy i programmno-apparatnaya realizatsiya]. Donetsk, 2017. 308 p.
4. Ivanitsa S., Anoprienko A. Features of the implementation of tetralogical operations [Osobennosti realizatsii operatsiy tetralogiki]. *Science practices of the Donetsk National Technical University* [Naukoví pratsí Donets'kogo natsíonal'nogo tekhníchnogo uníversitetu]. Donetsk, 2011. S. 134–140.
5. Ivanitsa, S. *Study of unary functions of tetralogic using logical and mathematical constructions* [Issledovaniye unarnykh funktsiy tetralogiki s primeneniyem logiko-matematicheskikh konstruktsiy]. *Bulletin of the Academy of Civil Protection: scientific journal* [Vestnik Akademii grazhdanskoy zashchity»: nauchnyy zhurnal] Donetsk: "Academy of Civil Protection" of the Ministry of Emergency Situations of the DPR, 2021. Issue. 1 (25). pp. 39–47.
6. Karpenko A. *Development of multivalued logic* [Razvitiye mnogoznachnoy logiki] Ed. 3rd, rework. and additional. Moscow: LKI Publishing House, 2010. 448 p.
7. Zyuzkov, V. *Mathematical logic and theory of algorithms: textbook* [Matematicheskaya logika i teoriya algoritmov : uchebnoye posobiye] Tomsk : El Content, 2015. 236 p.

RESUME

S. Ivanitsa

Representation of Unary Tetrafunctions in Postbinary Disjunctive Normal Form

The study of the features of the development of the extended logical space seems relevant due to the fact that understanding the basic laws of the modern binary stage will make it possible to more effectively implement the transition to the post-binary stage in the development of computer technologies. Tetralogic, as a logic that expands the binary scale of classical logic, introduces other admissible values of logical features, propositions, and predicates. The purpose of this work is to determine methods for analytical writing of tetralogical functions (tetrafunctions) of one argument in normal form, which is the postbinary disjunctive normal form.

An important and still open question in the field of complexity of tetrafunctions is the establishment of exact and asymptotically exact bounds on the behavior of tetrafunctions of certain classes. Methods of the mathematical direction, geometric interpretation and engineering direction.

Consideration of the axiomatic foundations of tetralogic is supplemented by an important aspect, expressed in the formation of an analytical representation of tetrafunctions, the analogue of which was the disjunctive normal form of classical logic. The main disadvantage of the obtained normal form is its «unwieldy» in comparison with the classical DNF.

The analytical representation of tetrafunctions is a record of a logical formula according to a given truth table, or according to the vector representation of a tetrafunction. However, the principle of formation of disjunctive conjunctive normal forms in tetralogic is fundamentally different from similar normal forms in Boolean algebra. Further research includes solving problems related to minimizing DNF to ensure high speed and reliability of logical devices.

РЕЗЮМЕ

С. В. Иваница

Представление унарных тетрафункций
в постбинарной дизъюнктивной нормальной форме

Исследование особенностей развития расширенного логического пространства представляется актуальным в связи с тем, что понимание основных закономерностей современного бинарного этапа позволит более эффективно реализовать переход к постбинарному этапу в развитии компьютерных технологий. Тетралогика, как логика, расширяющая двоичную шкалу классической логики, вводит другие допустимые значения логических признаков, высказываний и предикатов. Целью этой работы является определение методов для аналитической записи функций тетралогики (тетрафункций) одного аргумента в нормальной форме, в качестве которой выступает постбинарная дизъюнктивная нормальная форма.

Важным и все еще открытым вопросом в области сложности тетрафункций является установление точных и асимптотически точных границ на поведение тетрафункций тех или иных классов. Использованы методы математического направления (теория синтеза управляющих систем, теорией полей и графов, теорией кодирования, теорией автоматов и др.), геометрической интерпретации (представление функций подмножествами вершин n-мерного куба и рассмотрением комплексов, составленных из граней единичного куба) и инженерного направления (в частности при построении схем для частично определенных функций).

Рассмотрение аксиоматических основ тетралогики дополнено важным аспектом, выраженном в формировании аналитического представления тетрафункций, аналогом которых выступила дизъюнктивная нормальная форма классической логики. Основным недостатком полученной нормальной формы является ее «громоздкость» по сравнению с классической ДНФ.

Аналитическое представление тетрафункций представляет собой запись логической формулы по заданной таблице истинности, либо по векторному представлению тетрафункции. Однако принцип формирования дизъюнктивной конъюнктивной нормальных форм в тетралогике кардинально отличается от аналогичных нормальных форм булевой алгебры. В дальнейшие исследования включено решение задач, связанных с минимизацией ДНФ для обеспечения высокого быстродействия и надежности логических устройств.

Статья поступила в редакцию 30.05.2022.