

УДК 65.011.56:681.5.08

DOI 10.24412/2413-7383-2025-2-37-129-147

В. Ю. Подлесный, Е. В. Колесник, И. А. Третьяков, В. В. Данилов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования «Донецкий государственный университет»

283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Университетская, 24

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В АСУ И АСНИ

V. Yu. Podlesnyi, E. V. Kolesnik, I. A. Tretiakov., V. V. Danilov

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education

"Donetsk State University"

283001, Donetsk People's Republic, Donetsk, st. Universitetskaia, 24

OPTIMAL INTERPOLATION OF CONTINUOUS MEASUREMENT PROCESSES IN ACS AND ASRS

В настоящей работе продолжены результаты исследования основ информационно-измерительных технологий в автоматизированных системах управления и автоматизированных системах научных исследований, в частности, дискретной формы представления непрерывных измерительных процессов, а именно: оптимальный способ интерполяции, оценка методов интерполяции; непрерывные сообщения в виде регулярных выборок при восстановлении методом наименьших квадратов; разностные и дельта-дискретные представления; погрешность дискретного представления по показателю равномерного приближения; погрешности экстраполяции.

Ключевые слова: АСУ, АСНИ, ИИС, измерительные сообщения, информационные характеристики, дискретные представления, интерполяция, экстраполяция, погрешности, выборки, погрешности

This paper continues the results of the study of the basics of information and measurement technologies in automated control systems and automated scientific research systems, in particular, the discrete form of representation of continuous measurement processes, namely: the optimal method of interpolation, evaluation of interpolation methods; continuous messages in the form of regular samples during least squares reconstruction; difference and delta-discrete representations; the error of discrete representation by the indicator of uniform approximation; extrapolation errors.

Key words: ACS, ASRS, IMS, measurement messages, information characteristics, discrete representations, interpolation, extrapolation, errors, samples, errors

Введение

Повсеместный рост применения автоматизированных систем управления (АСУ) и автоматизированных систем научных исследований (АСНИ) в современных производственных процессах невозможен без постоянного качественного улучшения их информационно-измерительных систем (ИИС) и подсистем [1-11]. Особую актуальность приобретают информационные технологии при создании АСНИ, где остро стоит вопрос о точности обрабатываемой информации [2], [3], [6], [9].

Настоящая работа является логическим продолжением исследований авторов [12-14] по основам информационно-измерительных технологий в автоматизированных системах управления (АСУ) и автоматизированных системах научных исследований (АСНИ). Так в [12], следуя общей теме, рассматривались, в частности, модели измерительных сообщений, модели стационарных случайных измерительных процессов, модели нестационарных измерительных процессов, погрешности при измерениях и передаче. Продолжая работу в этом направлении в [13], [14] были представлены результаты исследования дискретной формы представления непрерывных измерительных процессов: дискретное представление непрерывных процессов и погрешности при их восстановлении; оптимальное дискретное представление; дискретизация полиномами Лежандра; восстановление непрерывных сообщений, интерполяционными алгебраическими полиномами; интерполятор по показателю среднего квадратического приближения.

В настоящей работе продолжены результаты исследования основ информационно-измерительных технологий в АСУ и АСНИ, в частности, дискретной формы представления непрерывных измерительных процессов, а именно, оптимальный способ интерполяции, оценка методов интерполяции; непрерывные сообщения в виде регулярных выборок при восстановлении методом наименьших квадратов; разностные и дельта-дискретные представления; погрешность дискретного представления по показателю равномерного приближения; погрешности экстраполяции. Сообщения измерительной информации описываются функциями непрерывного времени $\lambda(t)$. Процесс их преобразования в виде дискретного времени λ_i , как совокупности координат, представляет дискретное представление, по значениям которого может быть получена оценка исходного непрерывного сообщения $\lambda^*(t)$ [15], [16].

1 Оптимальный способ интерполяции

Поиск оптимального способа интерполирования сообщения с известной корреляционной функцией (спектральной плотностью) при регулярном опросе сводится к отысканию такой оптимальной весовой (передаточной) функции интерполирующего устройства, которая обеспечивает минимальную частоту опроса при фиксированной погрешности интерполяции. Математически эту задачу можно записать так: $W_{u,onn}[l-i, \xi]; \sigma_u = \min; T_0 = \text{const}$ или $W_{u,onn}[l-i, \xi]; T_0 = \text{max}; \sigma_u = \text{const}$. Исследования показывают, что при восстановлении реализаций стационарного случайного процесса при постоянном интервале дискретизации оптимальная интерполирующая (весовая) функция должна представлять собой линейную композицию взвешенных значений корреляционной функции восстанавливаемого процесса в точках опроса [3]:

$$W_{u,onn}(t-t_i) = \sum_{i=0}^{N_k} q_i r_{\lambda}(t, t_i), \text{ где } q_i - \text{весовые коэффициенты.}$$

Если при этом интервал корреляции восстанавливаемого процесса конечен, то оптимальной интерполирующей функцией является просто корреляционная функция процесса (без весовых коэффициентов). Получить выражение для дисперсии интерполяционной погрешности для широкого класса случайных процессов, например, с описываемой полиномом Баттерворта, при оптимальных методах интерполяции затруднительно. Вместе с тем представляет значительный интерес получить такое выражение хотя бы для некоторого квазиоптимального метода интерполяции. В качестве такого метода может быть принят метод введения предсказаний и интерполяции с помощью бесконечного ряда Котельникова (идеального фильтра нижних частот).

Предположим, что предсказание сообщения обеспечивается с помощью идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) с частотой среза $F_{cp} = F / (2F_c)$. Введение такого предсказания сводит любой процесс с неограниченным спектром к процессу с ограниченным спектром, который может быть восстановлен в соответствии с теоремой Котельникова без искажений. При введении идеального предсказывающего фильтра в сообщение вносятся искажения, дисперсия которых будет равна мощности обрезанных ФНЧ частотных составляющих спектра и определяться выражением:

$$\sigma_H^2 = 1 / (2\pi) \cdot \int_{F_{cp}}^{\infty} S_{\lambda}(\omega) d\omega. \quad (1)$$

Подставив в (1) выражение $S_{\lambda}(\omega) = \mu(k) / [1 + (\omega_c / \Omega_c)^{2k}]$; $k = 1, 2, \dots, \infty$ [12] спектра Баттерворта в $\sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_H^2 + \gamma_{\phi} \sigma_u^2$ [13], получим выражение средней квадратической погрешности интерполяции в развернутом виде (при условии равенства частот среза ФНЧ на передающей и приемной стороне и $F_{cp} = F_0 / 2$):

$$\delta_H^2 = v^{-(2k-1)} / (2k-1) \cdot \sin \pi / 2k / (\pi / 2k). \quad (2)$$

Результаты определения по полученной формуле (2) представлены на рисунке 1. Из полученных графиков и формул видно, что значение средней квадратической погрешности интерполяции зависит от вида спектральной плотности мощности передаваемого сообщения (степени полинома k), при заданных требованиях к δ_H^2 (2). Наименьшая тактовая частота опроса F_0 требуется при равномерной спектральной плотности мощности сообщения ($k \rightarrow \infty$), а наибольшая, при спектральной плотности мощности сообщения с $k = 1$. В предельном случае (при $k = 1$), $\delta_H^2 \approx 2 / (\pi v)$.

2 Методы интерполяции и их сравнительная оценка

Используем процедуру применения различных физически реализуемых фильтров и сравним их между собой [17], [18]. В основном будем ориентироваться на использование в качестве интерполирующих устройств фильтров Баттерворта, модуль передаточной функции которых определяется выражением $|W_H(j\omega)|^2 = 1 / [1 + (\omega / \Omega_{cp})^{2m}]$, где $m = 1, 2, \dots$ - порядок фильтра; Ω_{cp} - частота среза на уровне 0,5. Следует отметить, что в реальных условиях при расчете интерполяционных ошибок должна учитываться форма импульсов на входе интерполатора. К сожалению, получение аналитических зависимостей для дисперсии интерполяционной погрешности для рассматриваемых случаев встречает ряд математических трудностей. Некоторые результаты численных расчетов при использовании различных методов интерполяции представлены в таблице 1.

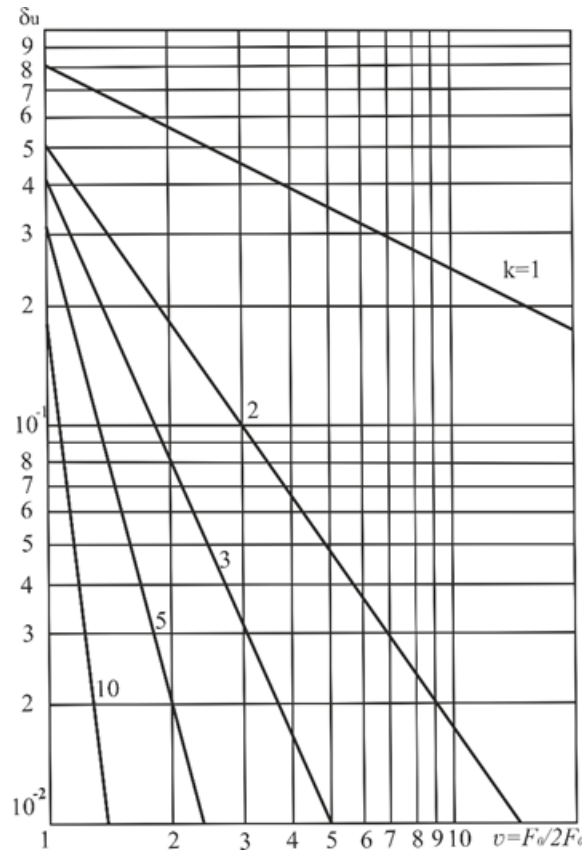


Рисунок 1 – Средняя квадратическая погрешность интерполяции баттервортовского процесса при использовании идеальных интерполирующего и предсказывающего фильтров нижних частот (k - степень полинома Баттерворта при описании спектральной плотности мощности процесса)

Таблица 1 - Результаты численных расчетов при использовании различных методов интерполяции

Интерполяция	$\nu = F_0 / (2F_c) \dots$ при $\delta_H = 2 \cdot 10^{-3}$					
	Степень полинома Баттерворта k при описании $S_\lambda(\omega)$					
	1	2	3	4	5	∞
Фильтр Винера	$2,05 \cdot 10^5$	46,5	9,5	5	1,7	1
Фильтр Баттерворта ($m=1$)	-	$0,55 \cdot 10^3$	150	80	80	80
Фильтр Баттерворта ($m=2$)	-	215	50	23	23	23
Фильтр Баттерворта ($m=3$)	-	145	30,5	13	13	13
Простейший RC фильтр	-	10^3	425	270	270	270
Ступенчатая (полиномом Лагранжа 0 порядка)	$3,0 \cdot 10^5$	445	315	260	255	255
Линейная (полиномом Лагранжа 1 порядка)	$2,05 \cdot 10^5$	60	21	14,5	14,5	14,5
Квадратичная (полиномом Лагранжа 2 порядка)	$2,05 \cdot 10^5$	52,5	12,5	8,5	-	6
Кубическая (полиномом Лагранжа 3 порядка)	$2,05 \cdot 10^5$	50	10,5	6,5	-	3,8

Из приведенных данных видно, что эффективность интерполяционного фильтра Баттерворта повышается с повышением его степени и степени полинома, описывающего спектр мощности восстанавливаемого случайного процесса, причем интерполяционный фильтр Баттерворта 4-го порядка примерно эквивалентен линейной интерполяции. Простейший RC - фильтр обладает наихудшими интерполирующими свойствами [16], [19].

3 Восстановление сообщений методом наименьших квадратов

При представлении непрерывного сообщения $\lambda(t)$ регулярными выборками $\lambda_i = \lambda(t_i)$, $t_i = iT_0$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, на интервале $T = t_n - t_0^* = nT_0$ его восстановление на приемной стороне по полученным $(n+1)$ выборкам предлагается выполнять методом наименьших квадратов. При этом восстанавливающий (аппроксимирующий) полином степени N_k определяется выражением:

$$\lambda^*(t) = \sum_{k=0}^{N_k} b_k W_k(t). \quad (3)$$

Коэффициенты b_k выбирают так, чтобы был минимальным квадрат среднего квадратического отклонения восстанавливающего полинома от исходного сообщения в полученных моментах опроса $\sigma_{\lambda}^2 = (n+1)^{-1} \sum_{i=0}^n [\lambda^*(t_i) - \lambda(t_i)]^2 = \min$. Последнее наиболее просто достигается вычислением коэффициентов по формуле $b_k = \sum_{i=0}^n \lambda_i W_k(t_i)$ при условии, что базисные функции $W_k(t)$ ортонормированы на множестве точек опроса:

$$\sum_{i=0}^n W_k(t) W_i(t_i) = \begin{cases} 1; & k=1; \\ 0; & k \neq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Оценим дисперсию погрешности представления непрерывного сообщения $\lambda(t)$ на интервале $T = nT_0$ полиномом (3). При использовании полиномов Чебышева в соответствии с общим выражением (3), которое в данном случае примет вид:

$$\sigma_{пп}^2 = 1 - 2/T \cdot \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{i=0}^n W_k(t_i) \int_0^T r_{\lambda}(t - t_i) \times W_k(t) dt + T^{-1} \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_{\lambda}(t_i - t_j) W_k(t_i) W_k(t_j) \|W_k\|^2. \quad (5)$$

Рассматриваемые полиномы Чебышева определяются следующим выражением:

$$W_k(t) = \left[\frac{(2k+1)n^{[k]}}{(n+k+1)^{[k+1]}} \right]^{0,5} \sum_{s=0}^k (-1)^{k+1} C_k^s C_{k+s}^s (t/T)^{[s]} n^{-[s]}, \quad 0 \leq t \leq nT_0,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, N_k$, $a^{[s]} = a(a-1)(a-2)\dots(a-s+1)$.

В частности, первые два полинома Чебышева определяются формулами:

$$W_0(t) = 1/\sqrt{n+1}; \quad W_1(t) = \sqrt{\frac{3}{n(n+1)(n+2)}} \left(\frac{2t}{T_0} - n \right); \quad n \geq 1; \quad 0 \leq t \leq nT_0.$$

Подставляя выражения $W_0(t)$, а затем $W_0(t)$ и $W_1(t)$ в (4), получим следующие выражения погрешностей представления при восстановлении по методу наименьших квадратов полиномами соответственно нулевой и первой степеней:

$$\delta_{пп}^2 = 1 - 2/(n+1) \cdot \sum_{i=0}^n (nT_0)^{-1} \int_0^{nT_0} r_{\lambda}(t - iT_0) dt + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_{\lambda}[(i-j)T_0]; \quad (6)$$

$$\delta_{пп}^2 = 1 - 2 / (n+1) \cdot \sum_{i=0}^n (nT_0)^{-1} \int_0^{nT_0} r_\lambda(t - iT_0) dt + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n r_\lambda[(i-j)T_0] -$$

$$- \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^n (2i-n)(nT_0)^{-1} \int_0^{nT_0} r_\lambda(t - iT_0)(2i-n) dt + \frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ((i-j)T_0)r_\lambda(t - iT_0)(2i-n)(2j-n). \quad (7)$$

Пусть, например, $\Lambda(t)$ бесконечно дифференцируемый процесс с корреляционной функцией $r_\lambda(\tau) = \frac{\sin \Omega_c \tau}{\Omega_c \tau} = \frac{\sin \frac{\pi}{vT_0} \tau}{\frac{\pi}{vT_0} \tau}$, где $v = F_0 / (2F_c)$. Пользуясь разложением $r_\lambda(\tau)$ в ряд

Тейлора, подставляя его в (7) и ограничиваясь в итоговом выражении для $\delta_{пп}^2$ первым не равным нулю членом, получим искомое расчетное выражение для погрешности представления этого процесса выборками при восстановлении по методу наименьших квадратов полиномом первой степени $\delta_{пп}^2 \approx (\pi n)^2 / (36v^2)$. При $v/n \geq \pi$ погрешность вычисления $\delta_{пп}^2$, вызванная отбрасыванием последующих членов ряда, меньше 1%.

Аналогичным образом на основании (6) и (7) получены расчетные формулы (табл. 2) для нескольких видов типовых корреляционных функций.

Таблица 2 - Расчетные формулы для нескольких видов типовых корреляционных функций

Метод представления	Метод восстановления	N_k	$\delta_{пп}^2$		
			$r_\lambda(\tau) = e^{(-\Omega_c \tau)}$	$r_\lambda(\tau) = (1 + \Omega_c \tau) \times \exp(-\Omega_c \tau)$	$r_\lambda(\tau) = \sin(\Omega_c\tau) / (\Omega_c\tau)$
Регулярные выборки	Метод наименьших квадратов	0	$\pi / (2v); n=1$ $\pi n / (3v); n \gg 1$	$n^2 \pi^2 / (12v^2)$	$n^2 \pi^2 / (36v^2)$
		1	$\pi / (3v); n=1$ $2\pi n / (15v); n > 10$	$2\pi^3 / (45v^3); n=1$ $\pi^3 n^3 / (105v^3); n > 10$	$\pi^4 n^4 / (600v^4); n=1$ $\pi^4 n^4 / (3000v^4); n > 10$
	Полином Лагранжа	0	$\pi / (2v)$	$\pi^2 / (12v^2)$	$\pi^3 / (36v^3)$
		1	$\pi / (3v)$	$2\pi^3 / (45v^3)$	$\pi^4 / (600v^4)$

При сравнении этих выражений с соответствующими оценками для ступенчатой и линейной интерполяции полиномами Лагранжа видно, что при $n=1$ (две выборки на интервале представления T) они совпадают, а при $n>1$ интерполяция дает меньшую погрешность.

Оценим коэффициент фильтрации γ_ϕ внешних помех при использовании метода наименьших квадратов. Пусть значения ординат $\lambda_i = \lambda(t_i)$, поступающих на устройство восстановления, искажены внешним аддитивным некоррелированным шумом z_i с дисперсией $\sigma_{ш}^2$: $\lambda_{ш}^* = \lambda_i + z_i$. Вычисленные по ним коэффициенты восстанавливающего полинома будут определяться выражением $b_k = \sum_{i=0}^n \lambda_i^* W_k(t_i) = \sum_{i=0}^n (\lambda_i + z_i) W_k(t_i)$. Подставляя это в (3), и проводя выкладки, получим $\delta_\Sigma^2 = \delta_{пп}^2 + \delta_\Pi^2$, где погрешность представления $\delta_{пп}^2$ по-прежнему определяется выражением (5), а составляющая δ_Π^2 вызванная помехами:

$$\delta_\Pi^2 = \sigma_\Pi^2 / \sigma_\lambda^2 = 1 / \sigma_\lambda^2 \cdot \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m[Z_i Z_j] W_k(t_i) W_l(t_j) \cdot T^{-1} \int_0^T W_k(t) W_l(t) dt.$$

Учитывая некоррелированность помех $m[Z_i Z_j] = \begin{cases} \sigma_w^2; & i = j; \\ 0; & i \neq j \end{cases}$ и считая, как и раньше, что базисные функции удовлетворяют условию (4), окончательно найдем $\sigma_{\Pi}^2 = T^{-1} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^N \|W_k\|^2 = \gamma_{\phi} \sigma_w^2$, откуда следует выражение $\gamma_{\phi} = (1/T) \sum_{i=0}^{N_k} \|W_i(t)\|^2$ [13].

В частности, при восстановлении сообщения полиномами нулевой и первой степеней по методу наименьших квадратов получим из $\gamma_{\phi} = (1/T) \sum_{i=0}^{N_k} \|W_i(t)\|^2$, используя выражения для первых двух полиномов Чебышева $W_0(t)$ и $W_1(t)$ при $N_k = 0$ $\gamma_{\phi} = (m+1)^{-1}$; при $N_k = 1$ $\gamma_{\phi} = 2(m+2)^{-1}$.

4 Дельта-дискретные и разностные представления

Известно большое число разновидностей разностных и дельта-дискретных представлений (например, с использованием разностей различного порядка; классическое, многоуровневое и дельта-сигма представление и т.п.) [17-19].

Суть разностных представлений непрерывных сообщений состоит в том, что вначале, как и при любом дискретном представлении, формируются выборки $\lambda(t_i)$, а затем на основании вероятностных свойств и конкретных N значений предыдущих выборок с условными номерами $i = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ осуществляется предсказание полиномом Лагранжа $(N-1)$ -го порядка $\lambda_{np}(t_i)$ очередной N -й выборки, которое сравнивается с действительным значением выборки, и формируется разность предсказания N -го порядка $\Delta^N \lambda(t_i) = \lambda(t_i) - \lambda_{np}(t_i)$. Последовательность этих конечных разностей запоминается или передается. По ним в последующем должно восстанавливаться исходное сообщение. Например, при использовании для предсказания полинома нулевого порядка (разностного представления первого порядка) передаются (запоминаются) разности $\Delta \lambda(t_i) = \lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})$, где в качестве прогнозирующего значения используется значение предыдущей выборки. Принципиально при удовлетворении некоторых условий могут использоваться различные алгоритмы разностного представления, отличающиеся комбинациями разностей различного порядка, и соответственно различным алгоритмом восстановления исходного процесса.

Конечная разность $\Delta^N \lambda(t)$ произвольного порядка N в понятиях смещенных решетчатых функций на основании $\Delta^N \lambda(t_i) = \sum_{k=0}^N (-1)^k C_N^k \lambda(t_i k T_0)$ [13] имеет вид: $\Delta^N \lambda(t) = \Delta^N \lambda(l + \xi) = \sum_{i=0}^N (-1)^i C_N^i \lambda(l + \xi - i)$ и для нормального стационарного случайного процесса $\lambda(t)$ с нулевым средним является также нормальным стационарным процессом с нулевым средним, причем дисперсия ее [15]:

$$\sigma_{\Delta N \lambda}^2 = \sigma_{\lambda}^2 \{C_{2N}^N + \sum_{i=0}^N \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (-1)^{i+j} C_N^i C_N^j r_{\lambda}[i-j]\}, \quad (8)$$

где i, j - целые натуральные числа; C_N^i - число сочетаний из N по i .

В частности, дисперсия разностей первых четырех порядков согласно (8) будет иметь вид [18]:

$$\begin{cases} \sigma_{\Delta\lambda}^2 = 2\sigma_\lambda^2[1 - r_\lambda[1]]; \\ \sigma_{\Delta^2\lambda}^2 = 2\sigma_\lambda^2(3 - 4r_\lambda[1] + r_\lambda[2]); \\ \sigma_{\Delta^3\lambda}^2 = 2\sigma_\lambda^2(10 - 15r_\lambda[1] + 6r_\lambda[2] - r_\lambda[3]); \\ \sigma_{\Delta^4\lambda}^2 = 2\sigma_\lambda^2(35 - 56r_\lambda[1] + 28r_\lambda[2] - 8r_\lambda[3] + r_\lambda[4]); \end{cases} \quad (9)$$

Результаты расчетов по (9) приведенных дисперсий разностных процессов для некоторых типов случайных процессов приведены в таблице 3. Соответственно, коэффициент передачи линейных устройств, может быть определен согласно [15] как $W_p(j\omega) = [1 - \exp(-j\omega T_0)]^N$.

Таблица 3 - Результаты расчетов приведенных дисперсий разностных процессов для некоторых типов случайных процессов

Характеристика процесса $\lambda(t)$		Приведенная дисперсия конечной разности $\sigma_{\Delta N_\lambda}^2$			
$r_\lambda(\tau)$	Порядок дифференцируемости процесса	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
$e^{-\Omega_c \tau }$	0	$2\pi / v$	$4\pi / v$	$12\pi / v$	$40\pi / v$
$e^{-\Omega_c \tau }(1 + \Omega_c \tau)$	1	π^2 / v^2	$8\pi^3 / (3v^3)$	$4\pi^3 / (v^3)$	$32\pi^3 / (3v^3)$
$e^{-\Omega_c \tau }(1 + \Omega_c \tau + \Omega_c^2\tau^2 / 3)$	2	$\pi^2 / (3v^2)$	π^4 / v^4	$44\pi^5 / (15v^5)$	$32\pi^5 / (9v^5)$
$\sin \Omega_c \tau / (\Omega_c \tau)$	∞	$\pi^2 / (3v^2)$	$\pi^4 / (5v^4)$	$\pi^6 / (7v^6)$	$\pi^8 / (9v^8)$

Как видно из таблицы 3, дисперсия разностного процесса соответствующего порядка имеет минимальное значение при порядке конечной разности, на единицу превышающем порядок дифференцируемости исходного процесса. С учетом требования простоты технической реализации квазиоптимальными при невысоких порядках дифференцируемости исходного процесса являются разности невысоких степеней (не выше 3-4). Важно также, что для разностного процесса характерно, что значения в соседних точках опроса оказываются существенно менее коррелированы, нежели выборки исходного процесса в тех же точках опроса.

Разностным представлениям свойствен известен недостаток, который заключается в накоплении и размножении ошибок при передаче и записи сигналов. Так, ошибка в восстановлении одной выборки (координаты) приводит к ошибочному восстановлению последующих предсказанных выборок сообщения и соответственно к искажению постоянной и низкочастотной составляющих восстанавливаемого сообщения.

При передаче сообщений, имеющих постоянную составляющую (например, при передаче измерительной информации), целесообразно передаваемые конечные разности объединить в блоки и в начале блока передавать полную (опорную) выборку и все разности низших порядков. Для сообщений, не содержащих постоянной составляющей (например, при передаче речевых сообщений), этого, как правило, не делается.

Дельта-представления в классическом понимании являются некоторым развитием дискретно-квантованного представления конечными разностями. При достаточно большой частоте опроса конечная разность между соседними выборками

ввиду ее малости может квантоваться на два уровня $|\Delta N_\lambda| \leq d_{\kappa\delta}$, где $d_{\kappa\delta}$ - шаг квантования. При этом может формироваться либо сигнал 0 (если $\Delta N_\lambda \leq 0$), либо сигнал 1 (если $\Delta N_\lambda \geq 0$). В литературе наиболее исследовано дельта-представление первыми разностями (классическое) [19].

Сигнал при классическом дельта-представлении без учета опорной выборки представляет собой последовательность символов 1 и 0, отображающих знак приращения входного непрерывного процесса (сообщения) в данной точке опроса относительно предыдущей выборки или относительно значения аппроксимирующего напряжения, восстановленного из выходного импульсного сигнала.

Отметим, что эффективность разностных и дельта-представлений зависит от правильного выбора алгоритмов работы прогнозирующего устройства, квантователя по уровню и интерполирующего устройства. Восстановление исходного процесса из разностного ведется путем первоначального восстановления выборок, из которых путем интерполяционной обработки восстанавливается исходное сообщение.

При разностных представлениях частоту опроса $F_0 = 1/T_0$ сообщения $\lambda(t)$ следует выбирать так же, как и при представлении регулярными выборками, т. е. исходя из требуемой точности восстановления при выбранном методе интерполяции. Таким образом, частота опроса F_0 и параметр ν при разностном представлении могут быть выбраны на основании данных, приведенных в [13].

При соответствующей процедуре формирования квантованных разностей и дельта-приращений накопления ошибок квантования не происходит. Если не считаться с возможным явлением накопления ошибок, то число координат при разностном представлении будет таким же, как и при любом другом представлении (например, по выборкам). Поэтому эффективность разностного представления может быть оценена лишь на основании учета объема каждой координаты. При разностном дискретно-квантованном представлении обычно образуются разности квантованных значений выборок. При дельта-дискретных представлениях имеют место два основных вида погрешностей: квантования и перегрузки по наклону. Восстановление исходного процесса из дельта-последовательности ведется обычно путем первоначального восстановления выборок, по которым соответствующей интерполяцией восстанавливается исходный процесс.

В этом случае погрешность дельта-представления будет определяться так же, как для разностного представления соответствующего порядка, с тем лишь отличием, что выбор частоты опроса должен быть подчинен дополнительному требованию:

$$\kappa_\Delta = 1 \text{ (при } a=2\text{)}, \quad (10)$$

где κ_Δ - число двоичных разрядов кода, используемое для передачи значения одной дельта-разности; a - основание кода. Вполне очевидно, что для того, чтобы не наступали перегрузки по наклону, период опроса следует выбирать исходя из следующего равенства по критерию равномерного доверительного приближения [19]:

$$\max_i \max_{t \in T} |\Delta N_{\lambda_i}(t)| \leq d_{\kappa\delta} / 2. \quad (11)$$

Учитывая, что здесь мы рассматривали лишь нормальные случайные процессы и их конечные нормальные разности, в качестве первого инженерного приближения можно принять для соблюдения неравенства (11) условие:

$$d_{\kappa\delta} = \chi_p \sigma_{\Delta N_\lambda}, \quad (12)$$

т. е. принятый шаг квантования $d_{\kappa\delta}$ для рассматриваемого разностного процесса должен представлять собой динамический диапазон изменения этой конечной разности.

Значение коэффициента χ_p следует выбирать в зависимости от допустимой доверительной вероятности. Так, например, для доверительных вероятностей $P = 0.997 \div 0.9999$ можно принять $\chi_p = 6 \div 8$. В дальнейших исследованиях будем принимать $\chi_p = 6$, что соответствует $P = 0.997$. В самом общем случае значение P (соответственно и значение χ_p) можно назначать исходя из требований к точности представления, например из условия $P \approx \delta_{\kappa\delta}^2$. Как видно из данных (табл. 3), $\sigma_{\Delta N_\lambda}^2$ зависит от вида исходного процесса, степени используемой разности и коэффициента $\nu = F_0 / (2F_c)$. Вполне очевидно, что при заданных $R_\lambda(\tau)$, N и $d_{\kappa\delta}$ параметр ν должен быть выбран таким, чтобы выполнялось неравенство (11).

В частности, при дельта-представлении процесса с ограниченным спектром $[r_\lambda(\tau) = \sin \Omega_c \tau / (\Omega_c \tau)]$, восстановлении путем интерполяции полиномом нулевого порядка $N_k = 0$ и использовании конечной разности первого порядка ($N = 1$) на основании данных (табл. 3) и формул (10) и (12) получим $\delta_{PP\Delta}^2 + \delta_{\kappa\delta\Sigma\Delta}^2 = \pi^4 \cdot (36\nu^2)^{-1} + 3\delta_{\Delta\lambda}^2 \approx \pi^2 / \nu^2$. Соответственно при использовании интерполяции полиномом первого порядка ($N-1$) и конечной разности второго порядка ($N-2$): $\sigma_{PP\Delta}^2 + \sigma_{\kappa\delta\Sigma\Delta}^2 = \pi^4 \cdot (600\nu^4)^{-1} + 2\pi^4 \cdot (5\nu^4)^{-1} \approx 2\pi^4 / (5\nu^4)$.

Используя $\delta_{PP}^2 = \sigma_{PP}^2 / (\sigma_\lambda^2) = 1 - \sum_{i=0}^{N_k} \delta_i^2$ [13] и считая, например, что $\delta_{PP}^2 = \delta_{\kappa\delta\Sigma}^2 = \delta_{ПЕР\Sigma}^2 = (1/3)\delta_\Sigma^2$, можно вычислить ν как функцию δ_Σ . Полученные таким образом соотношения $\nu = f(\delta_\Sigma)$ для рассматриваемых видов исходного процесса (сообщений) в предположении, что степень интерполирующего полинома N_k и порядок используемой конечной разности связаны соотношением $N_k = N-1$, представлены в таблице 4.

Таблица 4 - Коэффициент избыточности временной дискретизации при разных методах представления

Метод представления	N_k	Коэффициент избыточности временной дискретизации ν		
		$r_\lambda(\tau) = e^{(-\Omega_c \tau)}$	$r_\lambda(\tau) = (1 + \Omega_c \tau) \times \exp(-\Omega_c \tau)$	$r_\lambda(\tau) = \sin(\Omega_c\tau) / (\Omega_c\tau)$
Выборками или конечными разностями	0	$3\pi / (2\delta_\Sigma^2)$	$[\frac{\pi^2}{4\delta_\Sigma^2}]^{1/2}$	$[\frac{\pi^2}{12\delta_\Sigma^2}]^{1/2}$
	1	$\pi / (\delta_\Sigma^2)$	$[\frac{2\pi^3}{15\delta_\Sigma^2}]^{1/3}$	$[\frac{\pi^4}{200\delta_\Sigma^2}]^{1/4}$
Дельта-приращениями	0	$39\pi / (4\delta_\Sigma^2)$	$[\frac{37\pi^2}{8\delta_\Sigma^2}]^{1/2}$	$[\frac{37\pi^2}{24\delta_\Sigma^2}]^{1/2}$
	1	$25\pi / (2\delta_\Sigma^2)$	$[\frac{121\pi^3}{15\delta_\Sigma^2}]^{1/3}$	$[\frac{241\pi^4}{400\delta_\Sigma^2}]^{1/4}$

5 Показатель равномерного приближения для погрешности дискретного представления

При синтезе устройств АСНИ и ИИС для обработки текущих реализаций случайного процесса в реальном масштабе времени (например, устройств сжатия данных), а также в тех случаях, когда необходимо оценить предельные отклонения измеряемых параметров от номинальных значений, наиболее удобным является показатель равномерного приближения $\varepsilon_{\max}$. Известные оценки [8] величины $\varepsilon_{\max}$ базируются на оценках максимальных значений производных процесса $\Lambda(t)$, априорное получение которых с необходимой точностью обычно весьма затруднительно, особенно, если $\Lambda(t)$ - случайный процесс.

Ниже предлагается процедура определения $\varepsilon_{\max}$ с использованием оценок средней квадратической погрешности, полученных в данной работе. Предполагая, что исследуемый процесс $\Lambda(t)$ имеет нормальное распределение, а поэтому значения восстанавливающего полинома $\Lambda^*(t)$ распределены также нормально в силу линейности преобразований [13]

$$\Lambda\lambda(t) = \int_T V_i(t)\lambda(t)dt = \lambda_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_k \quad \text{и} \quad B(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N_k}) = \sum_{i=0}^{N_k} \lambda_i W_i(t) = \lambda^*(t), \quad \text{получим, что}$$

погрешность дискретного представления также имеет нормальное распределение для каждого момента времени t . Тогда при заданной доверительной вероятности P максимальное по множеству значение $E(t)$ можно определить как квантиль $|E(t)|_p$ порядка P нормального распределения, который в свою очередь, можно связать со средним квадратическим значением погрешности представления $\delta_{пп}(t)$ через так называемый энтропийный коэффициент χ'_p , который нетрудно найти по таблицам нормального распределения (например, для $P=0,997$; $\chi'_p=3$): $\max_i |\varepsilon_i(t)| = |E(t)|_p = \chi'_p \delta_{пп}(t)$

При этих рассуждениях математическое ожидание процесса $\Lambda(t)$, а следовательно, и погрешности $E(t)$ предполагалась равным нулю. Выражение для $\varepsilon_{\max}$ теперь принимает вид:

$$\varepsilon_{\max} = \chi'_p \max_{i \in T} \delta_{пп}(t), \quad (13)$$

и, следовательно, определение сводится к нахождению максимального на интервале представления значения дисперсии погрешности представления $\sigma_{пп}^2$. Для этого необходимо задать конкретный вид восстанавливающего полинома и класс процесса. Оценим максимальную погрешность представления сообщения выборками при интерполяции полиномами Лагранжа нулевой и первой степеней. В этом случае дисперсия текущей погрешности определяется выражением [13]

$$\sigma_{пп}^2[l, \xi] = \sigma_\lambda^2 - 2 \sum_{i=0}^{N_k} \lambda[i, 0] W_{II}[l-i, \xi] + \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{k=0}^{N_k} R_\lambda[i-k, 0] W_{II}[l-i, \xi] W_{II}[l-k, \xi],$$

из которого для $N_k = 0$ и $N_k = 1$ соответственно получим выражения:

$$\sigma_{пп}^2(t) = \sigma_{пп}^2(\xi) = 2\sigma_\lambda^2(1 - r_\lambda[\xi]), \quad (14)$$

$$\sigma_{пп}^2(t) = \sigma_{пп}^2(\xi) = 2\sigma_\lambda^2\{1 + \xi^2 - \xi + \xi(1-\xi)r_\lambda[1] - (1-\xi)r_\lambda[\xi] = \xi r_\lambda[1-\xi]\}. \quad (15)$$

При симметричной ступенчатой интерполяции на $\pm T_0/2$ влево и вправо от каждой выборки дисперсия погрешности достигает максимума, как видно из (13), на краях интервала ($\xi = \pm 1/2$):

$$\max_{i \in T} \sigma_{пп}^2(t) = 2\sigma_\lambda^2(1 - r_\lambda[0,5]). \quad (16)$$

С погрешностью линейной интерполяции дело обстоит сложнее. Дифференцируя выражение (15) по ξ и приравнявая производную к нулю, получим трансцендентное уравнение, решение которого зависит от класса процесса (вида его корреляционной функции):

$$2(2\xi - 1) + r_\lambda[1](1 - 2\xi) + r_\lambda[\xi] - (1 - \xi)r'_\lambda[\xi] - r_\lambda[1 - \xi] + \xi r'_\lambda[1 - \xi] = 0. \quad (17)$$

Для приближенного решения этого уравнения используем разложение корреляционной функции в ряд Тейлора вблизи $\xi = 0$. Тогда в зависимости от класса процесса, а именно, от порядка его дифференцируемости в среднем квадратическом, получим:

- для недифференцируемых процессов:

$$r_\lambda[\xi] = 1 - \xi |r'_\lambda[0]| + \xi^2 / 2 \cdot |r''_\lambda[0]| - \dots; \quad (18)$$

- для однократно и многократно дифференцируемых процессов

$$r_\lambda[\xi] = 1 - \xi^2 / 2 \cdot |r''_\lambda[0]| + \dots. \quad (19)$$

Подставляя поочередно разложения (18) и (19) в уравнение (17), найдем, что приближенное значение ξ , обеспечивающее максимум выражения (15) как для недифференцируемых процессов, так и для однократно и многократно дифференцируемых процессов, одинаково: $\xi \approx 0,5$. Эта оценка тем точнее, чем сильнее неравенство $T_0 \ll \tau_k$ ($v \gg 1$), т.е. чем меньше допустимая погрешность дискретного представления. Она совпадает с той, которая получена в теории интерполирования функций [21] на основе расчета погрешности интерполяции через остаточный член формулы Лагранжа, куда входят оценки производных процесса $\Lambda(t)$.

Однако полученный результат распространяется также на не дифференцируемые процессы. Через оценки производных этот результат не мог быть получен, так как процесс не дифференцируем. Подставляя $\xi \approx 0,5$ в (14), найдем максимальное значение дисперсии погрешности линейной интерполяции [20], [22]:

$$\max_{i \in T} \sigma_{np}^2(t) = \sigma_\lambda^2(1,5 - 2r_\lambda[0,5] + 0,5r_\lambda[1]). \quad (20)$$

Подставляя далее выражения (16) и (20) в формулу (13) и принимая доверительную вероятность $P=0,997$, получим следующие искомые окончательные выражения максимальной по модулю погрешности, приведенной к размаху $\Lambda/2 + 3\sigma_\lambda$ процесса:

- ступенчатая симметричная интерполяция $\delta_m = \varepsilon_{\max}(\Lambda/2)^{-1} = \sqrt{2(1 - r_\lambda[0,5])}$;

- линейная интерполяция $\delta_m = \varepsilon_{\max}(\Lambda/2)^{-1} = \sqrt{1,5 - 2r_\lambda[0,5] + 0,5r_\lambda[1]} \quad (21).$

В качестве примера вычислим максимальную погрешность линейной интерполяции бесконечно дифференцируемого процесса с нормированной корреляционной функцией $r_\lambda(\tau) = \sin \Omega_c \tau / (\Omega_c \tau)$; $\sigma_\lambda^2 = 1$.

Разлагая $r_\lambda(\tau)$ в ряд Тейлора при $T = T_0$ подставляя его в (21) и ограничиваясь в итоговом выражении первым не равным нулю членом, получим оценку максимальной по модулю погрешности линейной интерполяции рассматриваемого процесса с доверительной вероятностью $P=0,997$: $\delta_m \approx [\pi^4 / (274v^4)]^{0,5}$.

Оценки максимальной погрешности ступенчатой и линейной интерполяции, полученные аналогичным образом для процессов с различными корреляционными функциями, приведены в таблице 5.

Таблица 5 - Оценки максимальной погрешности ступенчатой и линейной интерполяции, полученные аналогичным образом для процессов с различными корреляционными функциями

N_k	δ_m		
	$r_\lambda(\tau) = \exp(-\Omega_c \tau)$	$r_\lambda(\tau) = \exp(1 + \Omega_c \tau) \exp(-\Omega_c \tau)$	$r_\lambda(\tau) = \sin(\Omega_c \tau) / (\Omega_c \tau)$
0	$(\pi / v)^{1/2}$	$[\pi^2 / (4v^2)]^{1/2}$	$[\pi^2 / (12v^2)]^{1/2}$
1	$[\pi / (2v)]^{1/2}$	$[\pi^3 / (12v^3)]^{1/2}$	$[\pi^4 / (274v^4)]^{1/2}$

6 Погрешности экстраполяции

Продление полинома за пределы интервала представления, на котором этот полином построен (экстраполяция), причем внутри интервала полином может быть как интерполирующим, так и аппроксимирующим. Экстраполяцию вправо от правой границы интервала (т.е. в сторону увеличения аргумента) обычно называют предсказанием (прогнозом), если аргументом является время. Средний (по реализациям) квадрат погрешности экстраполяции $\delta_s^2(t)$ в точке t ($t \in T$) (T - интервал представления) по форме исходной записи не отличается от погрешности представления $\delta_{пп}^2(t)$ внутри интервала [23].

В частности, для стационарного процесса $\lambda(t)$ с нулевым: средним при использовании полиномов Лагранжа [13] выражение для $\sigma_s^2(t)$ удобнее переписать в натуральном времени:

$$\sigma_s^2(t) = \sigma_\lambda^2 - 2 \sum_{i=0}^{N_k} R_\lambda(t-t_i) W_u(t-t_i) + \sum_{i=0}^{N_k} \sum_{j=0}^{N_k} R_\lambda(t_i-t_j) W_u(t-t_i) W_u(t-t_j); t > t_{N_k}. \quad (22)$$

При использовании для экстраполяции полиномов нулевой и первой степеней (ступенчатая или линейная экстраполяция) на основании (22) получим соответственно:

$$\text{- при } N_k = 0: \quad \delta_s^2(\theta) = \sigma_s^2(\theta) / \sigma_\lambda^2 = 2[1 - r_\lambda(\theta T_0)]; \quad (23)$$

$$\text{- при } N_k = 1: \quad \delta_s^2(\theta) = \theta^2 + (\theta+1)^2 - 2r_\lambda(T_0)\theta(\theta+1) - 2(\theta+1)r_\lambda(\theta T_0) + 2\theta r_\lambda[(\theta+1)T_0], \quad (24)$$

где $\theta = 0, 1, 2, 3, \dots$ - число шагов экстраполяции вправо от правой (или влево от левой) границы интервала представления, длина которого в данных случаях $T = T_0$.

При $\theta = 1$ (экстраполяция на один шаг) выражения (23) и (24) совпадают, с приведенными дисперсиями конечных разностей соответственно первого и второго порядков (9):

$$\text{- при } N_k = 0: \quad \sigma_s^2(1) = 2(1 - r_\lambda(T_0)) = \sigma_{\Delta\lambda}^2;$$

$$\text{- при } N_k = 1: \quad \sigma_s^2(1) = 2(3 - 4r_\lambda(T_0)) + r_\lambda(2T_0) = \sigma_{\Delta^2\lambda}^2.$$

Приближенные оценки погрешности экстраполяции, определены на основании формул (21) и (22) для нескольких моделей процессов. Результаты приведены в таблице 6.

Таблица 6. Приближенные оценки погрешности экстраполяции для нескольких моделей процессов

$r_\lambda(\tau)$	$\sigma_s^2(\theta)$	
	$N_k = 0$	$N_k = 1$
$e^{-\Omega_c \tau }$	$2\pi\theta / \nu$	$2\pi\theta(\theta+1) / \nu$
$(1 + \Omega_c \tau)e^{-\Omega_c \tau }$	$\pi^2\theta^2 / \nu^2$	$4/3 \cdot \theta^2(\theta+1)\pi^3 / \nu^3$
$\sin \Omega_c \tau / (\Omega_c \tau)$	$\pi^2\theta^2 / (3\nu^2)$	$\theta^2(\theta+1)^2\pi^4 / (20\nu^4)$

Погрешность приближения при $\Omega_c T_0 \theta = \pi\theta / \nu \ll 1$ не превышает 1-3%. Из сравнения с соответствующими значениями средней на интервале погрешности представления δ_{np}^2 видно, что при фиксированном шаге дискретизации $\delta_s^2(\theta) > \delta_{np}^2$ для любого θ .

Заключение

Проведен поиск оптимального способа интерполяции. Предложен метод дискретизации с введением предискажений, для рассматриваемого сообщения, обеспечивающий даже несколько меньшее значение дисперсии интерполяционной погрешности, чем при оптимальной интерполяции без предискажений. Проведена оценка различных методов интерполяции. Приведенные данные позволяют сделать следующие выводы:

- использование оптимальных способов интерполяции даже для простейших моделей сообщения из-за сложности реализации и трудоемкости вычислений вряд ли является целесообразным;
- из-за высокой эффективности и сравнительной простоты технической реализации наиболее широко используется интерполяционный полином Лагранжа;
- при интерполяции случайных процессов полиномом Лагранжа погрешность интерполяции убывает с повышением его степени, однако близкой к оптимальной является степень полинома Лагранжа, примерно равная степени полинома, описывающего спектральную плотность мощности восстанавливаемого случайного процесса;
- в большинстве практических случаев достаточно высокой эффективностью обладает полином Лагранжа первой-третьей степеней. При работе в шумах дальнейшее повышение степени полинома нецелесообразно;
- при регулярном представлении непрерывных сообщений выборками с гарантированной погрешностью $\sigma_{np} = 10^{-1} \div 10^{-3}$ период опроса должен выбираться значительно меньше интервала корреляции сообщения. При этом между отдельными дискретными выборками будут сильные корреляционные связи.

В полученных оценках погрешности восстановления не учитывалась задержка восстановления (интерполяции, аппроксимации). Учет задержки сопровождается увеличением погрешности. Он необходим при рассмотрении восстановления в замкнутых (следящих) системах, в которых, как показывает анализ, из-за быстрого роста составляющей погрешности, вызванной задержкой, с увеличением степени восстанавливаемого полинома следует рекомендовать использование восстанавливающих полиномов нулевого порядка.

Исследованы непрерывные сообщения в виде регулярных выборок при восстановлении методом наименьших квадратов. Установлено, при представлении непрерывных сообщений выборками восстановление методом наименьших квадратов не позволяет снизить частоту регулярного опроса по сравнению с интерполяцией: интерполяция обеспечивает меньшую по сравнению с аппроксимацией (методом наименьших квадратов) частоту опроса (при заданной степени полинома). Обосновано, что коэффициент фильтрации внешних помех при использовании метода уменьшается с ростом числа узлов интерполяции $(n+1)$ на интервале T и может быть меньше, чем при представлении коэффициентами ортогонального ряда (17) или при представлении выборками с интерполяцией полиномом Лагранжа.

Исследованы разностные и дельта-дискретные представления. Установлено, что отличительной особенностью дельта-представлений по сравнению с представлением по выборкам является наличие дополнительной составляющей погрешности из-за перегрузки системы квантования по наклону (крутизне). Это происходит в том случае, если скорость изменения сообщения больше, чем скорость аппроксимирующего (прогнозирующего) напряжения. При разностных, и дельта-представлениях имеет место фактически одна и та же структурная схема дискретизации и восстановления. В интересах доведения результатов исследования до инженерных расчетных зависимостей при дельта-представлениях широкого класса стационарных случайных процессов целесообразно параметры дискретизации выбирать так, чтобы вероятность появления перегрузок по наклону была пренебрежимо малой (при этом погрешность перегрузок можно не учитывать).

Сопоставление приведенных в табл. 2 выражений для дельта - представлений, с одной стороны, и представлений по выборкам и разностных, с другой, показывает, что при одинаковых требованиях к точности представления при дельта-представлениях требуется значительно большая частота опроса (параметр ν), что является вполне естественным.

Исследования погрешности дискретного представления по показателю равномерного приближения. Определена максимальная погрешность линейной интерполяции бесконечно дифференцируемого процесса с корреляционной функцией $r_\lambda(\tau) = \sin \Omega_c \tau / (\Omega_c \tau)$, $\sigma_\lambda^2 = 1$. Сделана оценка максимальной по модулю погрешности линейной интерполяции рассматриваемого процесса с доверительной вероятностью $P=0,997$: $\delta_m \approx [\pi^4 / (274\nu^4)]^{0,5}$. Оценки максимальной погрешности ступенчатой и линейной интерполяции, полученные аналогичным образом для процессов с различными корреляционными функциями, приведены в таблице 5.

Приближенные оценки погрешности экстраполяции, определены на основании формул (21) и (22) для нескольких моделей процессов. Результаты приведены в таблице 6. Погрешность приближения при $\Omega_c T_0 \theta = \pi \theta / \nu \ll 1$ не превышает 1-3%.

Список литературы

1. Кузнецов, С. В. Модель единой централизованной автоматизированной системы управления техническим состоянием вооружения, военной и специальной техники / С. В. Кузнецов, А. М. Винограденко. *Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли*. 2018. Т. 10, № 4. С. 48-54. DOI 10.24411/2409-5419-2018-10096. EDN YATSQX.
2. Обеспечение эффективности информационно-измерительных и управляющих систем / О. Е. Безбородова, О. Н. Бодин, М. Н. Крамм, В. В. Шерстнев. *Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль*. 2020. № 4(34). С. 5-16. DOI 10.21685/2307-5538-2020-4-1. EDN JXMQUIW.

3. Пометун, Е. Д. Разработка автоматизированной системы научных исследований для аэродинамического эксперимента / Е. Д. Пометун, Р. А. Хрипунов, А. В. Васильева. *Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки*. 2020. № 1. С. 4-8. EDN BAUJKR.
4. Пометун, Е. Д. Разработка автоматизированной системы измерения параметров турбулентности / Е. Д. Пометун, В. Н. Лебедев. *Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки*. 2025. № 1. С. 20-25. DOI 10.5281/zenodo.15056665. EDN BEWEYW.
5. Полтавский, А. В. Оптимизация информационно-измерительной системы беспилотного воздушного судна / А. В. Полтавский, А. А. Тюгашев, Н. К. Юрков. *Надежность и качество сложных систем*. 2021. № 4(36). С. 44-55. DOI 10.21685/2307-4205-2021-4-6. EDN UOUUMU.
6. Безбородова, О. Е. Интеллектуальная информационно-измерительная и управляющая система контроля состояния территориальной техносферы / О. Е. Безбородова. *Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль*. 2022. № 2(40). С. 21-28 DOI 10.21685/2307-5538-2022-2-3. EDN ZPLXVQ.
7. Валеев, А. Ф. Информационно-программное обеспечение автоматизированной системы научных исследований живучести объектов добычи газа / А. Ф. Валеев. *Программные продукты и системы*. 2023. № 2. С. 263-271. DOI 10.15827/0236-235X.142.263-271. EDN BYTWNH.
8. Теплова, О. В. Принципы распознавания психоэмоционального состояния личности в автоматизированных системах управления / О. В. Теплова, О. А. Криводубский. *Проблемы искусственного интеллекта*. 2023. № 4(31). С. 20-28. DOI 10.34757/2413-7383.2023.31.4.003. EDN LEPEBB.
9. Полтавский, А. В. Модель управления состоянием оптико-электронного тракта информационно-измерительных и управляющих систем / А. В. Полтавский, Н. А. Кузин, Н. К. Юрков. *Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль*. 2023. № 3(45). С. 5-15. DOI 10.21685/2307-5538-2023-3-1. EDN ZBTOQU.
10. Анцыферов, С. С. Интеллектуальные системы управления технологическими процессами / С. С. Анцыферов, К. Н. Фазилова, К. Е. Русанов. *Проблемы искусственного интеллекта*. 2024. № 2(33). С. 37-44. DOI 10.24412/2413-7383-2024-2-37-44. – EDN WLSZIT.
11. Синтез методов цифровой регистрации в системах сбора и обработки измерительной информации для обеспечения достоверности в информационно-управляющих системах / Ж. У. Севинов, Б. М. Темербекова, У. Б. Маманазаров, Б. М. Бекимбетов. *Потомки Аль-Фаргани*. 2024. № 4. С. 91-96. DOI 10.5281/zenodo.14555403.
12. Основы информационно-измерительных технологий в АСУ и АСНИ / В. Ю. Подлесный, В. В. Данилов, И. А. Третьяков, Е. В. Колесник. *Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки*. 2024. № 3. С. 64-74. DOI 10.5281/zenodo.14018604. EDN SDSQAP.
13. Оптимальное дискретное представление непрерывных измерительных процессов в АСУ и АСНИ / В. Ю. Подлесный, В. В. Данилов, И. А. Третьяков [и др.] *Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки*. 2024. № 4. С. 52-62. DOI 10.5281/zenodo.14514529. EDN VEQGYZ.
14. Процедура восстановления непрерывных сообщений в измерительных процессах в АСУ И АСНИ / В. Ю. Подлесный, И. А. Третьяков, В. В. Данилов [и др.]. *Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки*. 2025. № 1. С. 112-120. DOI 10.5281/zenodo.15056709. EDN MFJTTH.
15. *Цифровые информационно-измерительные системы: Теория и практика* / А. Ф. Фомин, О. Н. Новоселов, К. А. Победоносцев [и др.]. М.: Энергоатомиздат, 1996. 445 с.
16. Волков, В. Л. *Программное обеспечение цифровых вычислительных устройств* / В. Л. Волков. Арзамас: НГТУ, 1999. 98 с.
17. Сурогица, В. А. *Информационно-измерительная техника и электроника* / В. А. Сурогица, В. И. Калашников, Г. Г. Раннев. М.: Высшая школа, 2006. 512 с.
18. Цапенко, М. П. *Измерительные информационные системы* / М. П. Цапенко. М.: Энергоатомиздат, 1985. 440 с.
19. Волков В.Л. *Проектирование цифровых алгоритмов информационно-измерительных систем* / В. Л. Волков. Москва: Изд-во МАИ, 1991. 33 с.
20. Демидович, Б. П., *Основы вычислительной математики* / Б. П. Демидович, И. А. Марон. СПб.: Изд-во Лань, 2011. 672 с.
21. Прохоров, С. А. *Математическое описание и моделирование случайных процессов* / С. А. Прохоров. Самара: Изд-во СамГАУ, 2001. 209 с.

22. Ватутин, В. А. *Вероятностные методы в физических исследованиях* / В. А. Ватутин, Т. М. Телевинова, В. П. Чистяков. М.: Наука, 1985. 207 с.
23. Алгоритмы экстраполяции участков экспериментальных кривых / В. В. Данилов, И. А. Третьяков, Я. И. Рушечников, А. В. Шалаев. *Сборник научных трудов Донецкого института железнодорожного транспорта*. 2018. № 50. С. 10-15. EDN YTXPZR.

References

1. Kuznetsov, S. V. Model edinoi tsentralizovannoi avtomatizirovannoi sistemy upravleniia tekhnicheskim sostoianiem vooruzheniia, voennoi i spetsialnoi tekhniki / S. V. Kuznetsov, A. M. Vinogradenko // *Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniakh Zemli*. – 2018. – Т. 10, № 4. – С. 48-54. – DOI 10.24411/2409-5419-2018-10096. – EDN YATSQX.
2. Obespechenie effektivnosti informatsionno-izmeritelnykh i upravliaiushchikh sistem / O. E. Bezborodova, O. N. Bodin, M. N. Kramm, V. V. Sherstnev // *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol*. – 2020. – № 4(34). – С. 5-16. – DOI 10.21685/2307-5538-2020-4-1. – EDN JXMQIW.
3. Pometun, E. D. Razrabotka avtomatizirovannoi sistemy nauchnykh issledovaniia dlia aerodinamicheskogo eksperimenta / E. D. Pometun, R. A. Khripunov, A. V. Vasileva // *Vestnik Donetskogo natsionalnogo universiteta. Seriya G: Tekhnicheskie nauki*. – 2020. – № 1. – С. 4-8. – EDN BAUJKR.
4. Pometun, E. D. Razrabotka avtomatizirovannoi sistemy izmereniia parametrov turbulentnosti / E. D. Pometun, V. N. Lebedev // *Vestnik Donetskogo natsionalnogo universiteta. Seriya G: Tekhnicheskie nauki*. – 2025. – № 1. – С. 20-25. – DOI 10.5281/zenodo.15056665. – EDN BEWEYW.
5. Poltavskii, A. V. Optimizatsiia informatsionno-izmeritelnoi sistemy bespilotogo vozdušnogo sudna / A. V. Poltavskii, A. A. Tiugashev, N. K. Iurkov // *Nadezhnost i kachestvo slozhnykh sistem*. – 2021. – № 4(36). – С. 44-55. – DOI 10.21685/2307-4205-2021-4-6. – EDN UOUUMU.
6. Bezborodova, O. E. Intellektualnaia informatsionno-izmeritelnaia i upravliaiushchaia sistema kontroliia sostoiianiia territorialnoi tekhnosfery / O. E. Bezborodova // *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol*. – 2022. – № 2(40). – С. 21-28. – DOI 10.21685/2307-5538-2022-2-3. – EDN ZPLXVQ.
7. Valeev, A. F. Informatsionno-programmnoe obespechenie avtomatizirovannoi sistemy nauchnykh issledovaniia zhivuchesti obiektov dobychi gaza / A. F. Valeev // *Programmnye produkty i sistemy*. – 2023. – № 2. – С. 263-271. – DOI 10.15827/0236-235X.142.263-271. – EDN BYTWHK.
8. Teplova, O. V. Printsipy raspoznavaniia psikhoemotsionalnogo sostoiianiia lichnosti v avtomatizirovannykh sistemakh upravleniia / O. V. Teplova, O. A. Krivodubskii // *Problemy iskusstvennogo intellekta*. – 2023. – № 4(31). – С. 20-28. – DOI 10.34757/2413-7383.2023.31.4.003. – EDN LEPEBB.
9. Poltavskii, A. V. Model upravleniia sostoianiem optiko-elektronnogo trakta informatsionno-izmeritelnykh i upravliaiushchikh sistem / A. V. Poltavskii, N. A. Kuzin, N. K. Iurkov // *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol*. – 2023. – № 3(45). – С. 5-15. – DOI 10.21685/2307-5538-2023-3-1. – EDN ZBTOQU.
10. Antsyferov, S. S. Intellektualnye sistemy upravleniia tekhnologicheskimi protsessami / S. S. Antsyferov, K. N. Fazilova, K. E. Rusanov // *Problemy iskusstvennogo intellekta*. – 2024. – № 2(33). – С. 37-44. – DOI 10.24412/2413-7383-2024-2-37-44. – EDN WLSZIT.
11. Sintez metodov tsifrovoi registratsii v sistemakh sbora i obrabotki izmeritelnoi informatsii dlia obespecheniia dostovernosti v informatsionno-upravliaiushchikh sistemakh / Zh. U. Sevinov, B. M. Temerbekova, U. B. Mamanazarov, B. M. Bekimbetov // *Potomki Al-Fargani*. – 2024. – № 4. – С. 91-96. – DOI 10.5281/zenodo.14555403.
12. Osnovy informatsionno-izmeritelnykh tekhnologii v ASU i ASNI / V. Iu. Podlesnyi, V. V. Danilov, I. A. Tretiakov, E. V. Kolesnik // *Vestnik Donetskogo natsionalnogo universiteta. Seriya G: Tekhnicheskie nauki*. – 2024. – № 3. – С. 64-74. – DOI 10.5281/zenodo.14018604. – EDN SDSQAP.
13. Optimalnoe diskretnoe predstavlenie nepreryvnykh izmeritelnykh protsessov v ASU i ASNI / V. Iu. Podlesnyi, V. V. Danilov, I. A. Tretiakov [i dr.] // *Vestnik Donetskogo natsionalnogo universiteta. Seriya G: Tekhnicheskie nauki*. – 2024. – № 4. – С. 52-62. – DOI 10.5281/zenodo.14514529. – EDN VEQGYZ.
14. Protseduira vosstanovleniia nepreryvnykh soobshchenii v izmeritelnykh protsessakh v ASU i ASNI / V. Iu. Podlesnyi, I. A. Tretiakov, V. V. Danilov [i dr.] // *Vestnik Donetskogo natsionalnogo universiteta. Seriya G: Tekhnicheskie nauki*. – 2025. – № 1. – С. 112-120. – DOI 10.5281/zenodo.15056709. – EDN MFJTTH.
15. Tsifrovye informatsionno-izmeritelnye sistemy: Teoriia i praktika / A. F. Fomin, O. N. Novoselov, K. A. Pobodonostsev [i dr.]. – М.: Ergoatomizdat, 1996. – 445 с.
16. Volkov, V. L. Programmnoe obespechenie tsifrovnykh vychislitelnykh ustroistv / V. L. Volkov. – Arzamas: NGTU, 1999. – 98 с.

17. Surogina, V. A. Informatsionno-izmeritelnaia tekhnika i elektronika / V. A. Surogina, V. I. Kalashnikov, G. G. Rannev. – M.: Vysshaia shkola, 2006. – 512 s.
18. Tsapenko, M. P. Izmeritelnye informatsionnye sistemy / M. P. Tsapenko. – M.: Energoatomizdat, 1985. – 440 s.
19. Volkov V.L. Proektirovanie tsifrovyykh algoritmov informatsionno-izmeritelnykh sistem / V. L. Volkov. – Moskva: Izd-vo MAI, 1991. – 33 s.
20. Demidovich, B. P., Osnovy vychislitelnoi matematiki / B. P. Demidovich, I. A. Maron. – SPb.: Izd-vo Lan, 2011. – 672 s.
21. Prokhorov, S. A. Matematicheskoe opisanie i modelirovanie sluchainykh protsessov / S. A. Prokhorov. – Samara: Izd-vo SamGAU, 2001. – 209 s.
22. Vatutin, V. A. Veroiatnostnye metody v fizicheskikh issledovaniakh / V. A. Vatutin, T. M. Televinova, V. P. Chistiakov. – M.: Nauka, 1985. – 207 s.
23. Algoritmy ekstrapoliatsii uchastkov eksperimentalnykh krivyykh / V. V. Danilov, I. A. Tretiakov, Ia. I. Rushechnikov, A. V. Shalaev // Sbornik nauchnykh trudov Donetskogo instituta zheleznodorozhnogo transporta. – 2018. – № 50. – S. 10-15. – EDN YTXPZR.

RESUME

V. IU. Podlesnyi, E. V. Kolesnik, I. A. Tretiakov., V. V. Danilov

Optimal interpolation of continuous measurement processes in ACS and ASRS

In this paper, the results of the study of the fundamentals of information and measurement technologies in ACS and ASRS are continued. The search for the optimal interpolation method has been carried out. A sampling method with the introduction of pre-distortions is proposed for the message under consideration, which provides even a slightly lower value of the variance of the interpolation error than with optimal interpolation without pre-distortions. Various interpolation methods have been evaluated. Continuous messages in the form of regular samples during least squares reconstruction are investigated. It has been found that when continuous messages are represented by samples, least squares reconstruction does not reduce the frequency of regular polling compared to interpolation: interpolation provides a lower frequency of polling compared to least squares approximation (for a given degree of the polynomial). Difference and delta-discrete representations are investigated. It is established that a distinctive feature of delta representations in comparison with the representation based on samples is the presence of an additional error component due to the overload of the slope (steepness) quantization system. This happens if the rate of change of the message is greater than the rate of the approximating (predictive) voltage.

РЕЗЮМЕ

В. Ю. Подлесный, Е. В. Колесник, И. А. Третьяков, В. В. Данилов

Оптимальная интерполяция непрерывных измерительных процессов в АСУ и АСНИ

В настоящей работе продолжены результаты исследования основ информационно-измерительных технологий в АСУ и АСНИ. Проведен поиск оптимального способа интерполяции. Предложен метод дискретизации с введением предискажений, для рассматриваемого сообщения, обеспечивающий даже несколько меньшее значение дисперсии интерполяционной погрешности, чем при оптимальной интерполяции без предискажений. Проведена оценка различных методов интерполяции. Исследованы непрерывные сообщения в виде регулярных выборок при восстановлении методом наименьших квадратов. Установлено, при представлении непрерывных сообщений

выборками восстановление методом наименьших квадратов не позволяет снизить частоту регулярного опроса по сравнению с интерполяцией: интерполяция обеспечивает меньшую по сравнению с аппроксимацией (методом наименьших квадратов) частоту опроса (при заданной степени полинома). Исследованы разностные и дельта-дискретные представления. Установлено, что отличительной особенностью дельта-представлений по сравнению с представлением по выборкам является наличие дополнительной составляющей погрешности из-за перегрузки системы квантования по наклону (крутизне). Это происходит в том случае, если скорость изменения сообщения больше, чем скорость аппроксимирующего (прогнозирующего) напряжения.

Подлесный В. Ю. – заведующий учебной лабораторией, аспирант кафедры радиофизики и инфокоммуникационных технологий ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», 283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, pikaayzek@ya.ru.

Область научных интересов: автоматизация научных исследований и автоматизированные системы; информационно-измерительные системы.

Колесник Е. В. – старший лаборант, аспирант кафедры радиофизики и инфокоммуникационных технологий ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», 283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, ketrinkilli@ya.ru.

Область научных интересов: автоматизация научных исследований и автоматизированные системы; информационно-измерительные системы; методы и системы защиты информации, информационная безопасность.

Третьяков И. А. – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры радиофизики и инфокоммуникационных технологий ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», 283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, i.tretiakov@mail.ru.

Область научных интересов: автоматизация научных исследований и автоматизированные системы; оптические информационные технологии; методы и системы защиты информации, информационная безопасность.

Данилов В. В. – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики и инфокоммуникационных технологий ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», 283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, ut5iv@mail.ru.

Область научных интересов: оптические информационные технологии; автоматизация научных исследований и автоматизированные системы; информационно-измерительные системы.

Статья поступила в редакцию 13.05.2025.