

УДК 621; 534.014.4

В. Н. Беловодский, С. Л. Букин

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Донецкий национальный технический университет»  
283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Артёма, 58

## О ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТИРУЮЩЕЙ МАШИНЕ НЕЛИНЕЙНОГО ТИПА, СОВЕРШАЮЩЕЙ СУБ- И СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

V. N. Belovodskiy<sup>1</sup>, S. L. Bukin

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education  
"Donetsk National Technical University"  
283001, Donetsk People's Republic, Donetsk, st. Artyoma, 58

## ON THE MOVEMENTS OF A MATERIAL PARTICLE ON A HORIZONTAL TRANSPORTING MACHINE OF A NONLINEAR TYPE PERFORMING SUB- AND SUPERHARMONIC VIBRATIONS

Рассмотрена одномассовая горизонтальная транспортирующая машина с билинейной характеристикой упругих связей и инерционным гармоническим возбуждением и проведен анализ её колебаний в зонах сложных (суб- и супергармонических) резонансов. Установлена возможность возбуждения в этих частотных диапазонах колебаний, близких к оптимальным бигармоническим. На примере математической модели безотрывных движений материальной частицы выполнен сравнительный анализ скорости её перемещения по горизонтальной вибрирующей поверхности при таких движениях. Продемонстрирована возможность обеспечивать скорость перемещения частицы близкую к максимальной путем реализации субгармонического резонанса порядка 1:2.

**Ключевые слова:** вибрационная транспортирующая машина, суб- и супергармонические резонансы, материальная частица

A single-mass horizontal transporting machine with a bilinear characteristic of elastic elements and inertial harmonic excitation is considered and its vibrations in the zones of sub- and superharmonic resonances are analyzed. The possibility of excitation in these frequency ranges of oscillations close to optimal biharmonic has been established. Using the example of a mathematical model of motions of a material particle along a horizontal vibrating surface, a comparative analysis of the velocity of its movement is performed. It is demonstrated the possibility to provide a particle velocity close to the maximum by implementing a subharmonic resonance of the order of 1:2.

**Key words:** vibrating transporting machine, sub- and superharmonic resonances, material particle

## Введение

В различных отраслях промышленности широко используются вибрационные машины с горизонтально расположенным рабочим органом, которые применяются для транспортирования материалов и продуктов с одновременным процессом сепарирования, сушки, охлаждения и пр. [1]. Очевидно, что этапу непосредственной разработки и исследований вибрационной машины предшествует этап обоснования используемого закона движения её рабочего органа с учётом особенностей вибротранспортирования по нему обрабатываемого груза.

Несмотря на широкий диапазон параметров перерабатываемых материалов, можно выделить общие закономерности процесса вибротранспортирования, активное изучение которых началось во второй половине XX века. Теория вибрационного транспортирования, применительно к материальной частице, создавалась трудом многих отечественных и зарубежных исследователей. Большие заслуги в области вибрационного перемещения принадлежат И. И. Блехману, Р. Ф. Ганиеву, Э. Э. Лавенделу, И. Ф. Гончаревичу, В. К. Преснякову, П. М. Василенко, И. Я. Федоренко, В. Н. Потуграеву, В. П. Надутому, В. П. Франчуку, А. Г. Червоненко, Н. И. Камышному и другим. Теоретические и экспериментальные разработки этих авторов [2-13] послужили основой для создания широкого спектра специализированных вибрационных транспортно-технологических машин (ВТТМ).

Изучение технологического воздействия вибраций на различные обрабатываемые среды выявили перспективность использования колебаний с полигармоническим спектром не только для совершенствования технологии обработки материала, но и для интенсификации процесса транспортирования различных грузов [4-6], [10-19].

Установлено [1], [2], [4], [6-8], [10-20], что вибрационное транспортирование материала по горизонтальному рабочему органу ВТТМ возможно при асимметричных законах колебаний рабочего органа, в частности, би- или полигармонических.

На перспективность применения полигармонических вибровозбудителей в качестве привода вибрационных машин обращали внимание И. И. Блехман (1962 г.), Э. Э. Лавендел (1963), Б. И. Крюков (1967 г.), И. Ф. Гончаревич (1967 г.), А. Г. Червоненко (1970) и другие. Исследования транспортирования грузов по поверхностям, совершающим продольные бигармонические колебания, выполнены в ряде работ, упомянутых выше.

Естественно, что в процессе изучения режимов вибротранспортирования возникла задача определения оптимальных режимов колебаний рабочего органа ВТТМ, при которых достигается максимальная скорость перемещения обрабатываемого материала. Следует отметить, что изучение законов движения рабочих поверхностей для оптимального перемещения материальных частиц также начались в 60-х годах прошлого века. Так, путём проведения вычислительных экспериментов на АБМ Э. А. Аграновская и И. И. Блехман нашли оптимальный бигармонический закон горизонтального лотка при ограниченном ускорении [4]

$$\ddot{\zeta}(t) = A \cos(2\pi t) + B \cos(4\pi t + \varepsilon), \quad (1)$$

где  $A/B = -1$ ,  $\varepsilon = -\pi/3 = -1.0472$  (здесь  $\ddot{\zeta}$  – ускорение;  $A, B$  – амплитуды первой и второй гармонических составляющих, соответственно;  $\varepsilon$  – сдвиг фазы между ними;  $t$  – время).

Учитывая периодический характер колебаний, после двукратного интегрирования выражения (1) можно получить переменную часть закона перемещений

$$\zeta_1(t) = -\frac{1}{4\pi^2} \left( A \cos(2\pi t) + \frac{B}{4} \cos(4\pi t + \varepsilon) \right). \quad (2)$$

Обратим внимание, что (1) и (2) описывает два противоположных режима вибраций рабочего органа, при которых и направления перемещения груза также противоположны.

К наиболее ранним исследованиям вопросов оптимизации вибротранспортировки относятся работы Э. Э. Лавендела [8], [12] и В. А. Троицкого [5], в которых исследовалось движение материальной частицы по горизонтальной плоскости и по плоскости, составляющей некоторый угол с горизонтом. Авторы пришли к выводу, что оптимальным законом колебаний плоскости в этом случае является такой, при котором ускорение меняется по прямоугольному закону, причём должно отсутствовать проскальзывание груза назад.

Фундаментальные исследования по оптимизации процессов вибротранспортирования, проведенные Э. Э. Лавенделом, обобщены в его монографии [12], в которой, в частности, определены оптимальные законы колебаний:

- для наклонного лотка с разными значениями пределов допускаемого ускорения;
- для продольно движущегося лотка;
- для лотка, движущегося под углом вибрации;
- для лотка, движущегося в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

В этой работе автор подтвердил справедливость условий оптимизации параметров бигармонических колебаний горизонтального лотка, обеспечивающих наивысшую скорость транспортирования груза (1).

В вибрационных машинах бигармонический режим движения рабочего органа обычно обеспечивается центробежным вибровозбудителем, который содержит четыре дебалансные массы. Каждая пара дебалансов вращается в противоположных направлениях с равной начальной фазой, причём частоты вращения каждой пары относятся в отношении 1:2 [4], [6], [10], [12], [18], [20]. Как показал опыт применения подобных вибровозбудителей они в конструктивном отношении довольно сложны, имеют высокую материал- и энергоёмкость. Вместе с тем, известна возможность формирования полигармонических вибраций при помощи моногармонического возбуждения, которая присуща нелинейным системам, в частности, системам с нелинейной характеристикой упругих связей. Так, при возбуждении сложных, суб- и супергармонических, резонансов характер таких колебаний имеет выраженный полигармонический характер [21-26]. Вместе с тем, вопрос о том, насколько они близки к оптимальным, остаётся открытым. Ниже он изучается на примере вибрационной машины с горизонтальным рабочим органом и билинейной упругой характеристикой.

**Целью работы** является установление возможности формирования колебаний близких к оптимальным за счёт реализации сложных (суб- и супергармонических) резонансов на примере одномассовой ВТТМ с билинейной характеристикой упругих связей и проведение сравнительного анализа скорости перемещения материальной частицы при этих движениях.

## 1 Математическая модель вибрационной машины

Расчётная динамическая схема рассматриваемой ВТТМ, а также силовая характеристика билинейной упругой опоры представлены на рис. 1. Поэтапное изучение динамики такой машины представлено в работах авторов [24-26].

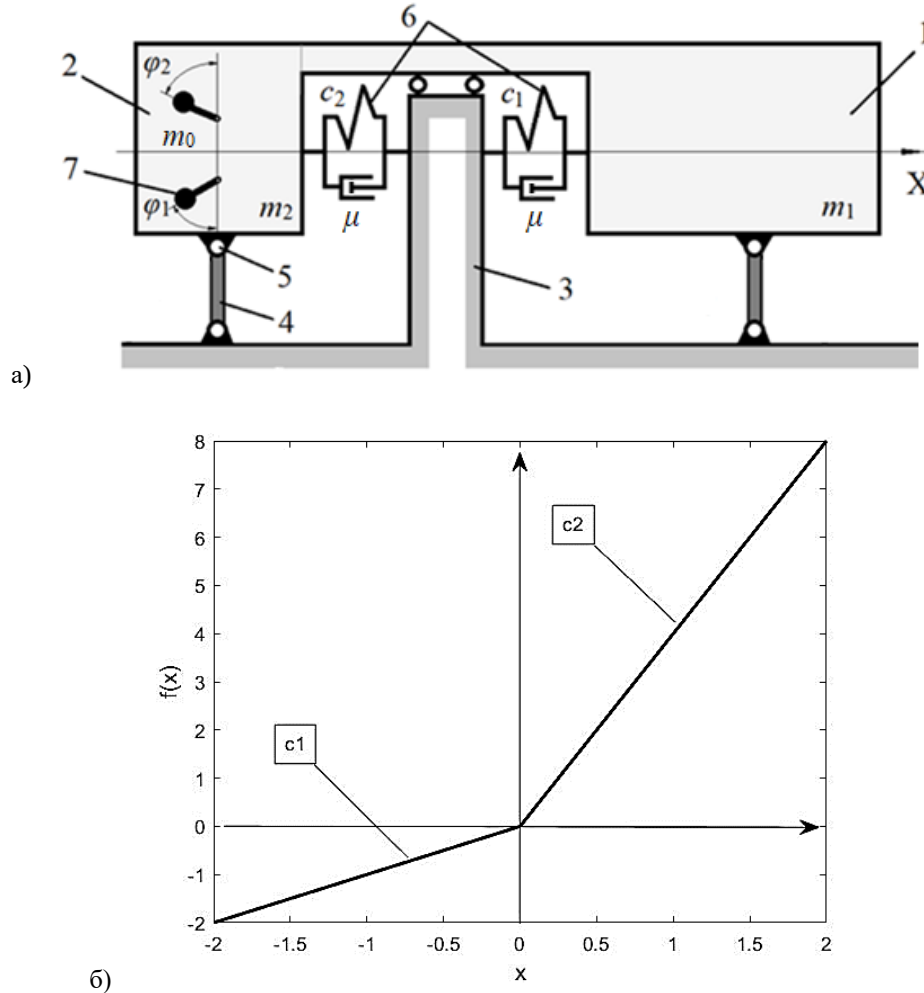


Рисунок 1 – Исследуемая вибрационная машина:

- а – динамическая схема; б – силовая характеристика упругой опоры ( $\gamma=c_2/c_1=4$ )  
 1 – рабочий орган; 2 – корпус вибровозбудителя; 3 – основание; 4 – опорный рычаг;  
 5 – резинометаллический шарнир; 6 – основная упругая связь; 7 – вибровозбудитель

Приняв традиционные допущения, опишем горизонтальные перемещения рабочего органа 1 (рис. 1), обозначив через  $x(t)$  перемещение рабочего органа относительно положения покоя

$$M\ddot{x} + \mu \left( c_1 \frac{1 - \text{sign}(x)}{2} + c_2 \frac{1 + \text{sign}(x)}{2} \right) \dot{x} + \left( c_1 \frac{1 - \text{sign}(x)}{2} + c_2 \frac{1 + \text{sign}(x)}{2} \right) x = m_0 r \omega^2 \sin(\omega t), \quad (3)$$

где  $M$  – колеблющаяся масса, состоящая из масс рабочего органа  $m_1$ , корпуса вибровозбудителя  $m_2$  и его неуравновешенных частей  $m_0$ ;  $r$  – эксцентриситет неуравновешенных частей вибровозбудителя;  $\mu$  – коэффициент сопротивления упругой системы;  $c_1$ ,  $c_2$  – коэффициенты жёсткости упругой опоры в направлении  $-X$  и  $X$ , соответственно;  $\omega$  – угловая скорость вращения неуравновешенных частей вибровозбудителя.

После замены  $x=\xi\Delta$ ,  $\tau=\omega_0 t$ ,  $\omega_0=(c_1/M)^{0.5}$ ,  $\eta=\omega/\omega_0$ ,  $\gamma=c_2/c_1$ ,  $P=m_0 r/(M\Delta)$ ,  $\beta=\mu c_1/(M\omega_0)=\mu\omega_0$ , где  $\Delta=10^{-3}$  м, получим уравнение колебаний в безразмерной форме

$$\xi'' + \beta \left( \frac{1 - \text{sign}(\xi)}{2} + \gamma \frac{1 + \text{sign}(\xi)}{2} \right) \xi' + \left( \frac{1 - \text{sign}(\xi)}{2} + \gamma \frac{1 + \text{sign}(\xi)}{2} \right) \xi = P\eta^2 \sin(\eta\tau). \quad (4)$$

Для определённости, значение степени нелинейности упругой характеристики примем равным  $\gamma=4$  и, ориентируясь на известные вибрационные машины резонансного типа, значение  $P$  выберем из условия, при котором при частоте возмущающей силы в три раза превосходящую собственную, амплитуда колебаний рабочего органа составляет 5–6 мм. Поэтому значение  $P=5$ . Коэффициент неупругих сопротивлений  $\beta=0.1$ , что соответствует реальным машинам технологического назначения.

## 2 Последовательность решения задачи

Задача выполняется в два этапа.

На первом этапе устанавливаются режимы движений, которые по амплитудным значениям гармонических составляющих в законе ускорений близки к режиму (1), а на втором – проводится сравнительный анализ перемещений материальной частицы при установленных на первом этапе, суб- и супергармонических, и оптимальных законах ускорений (1).

Для реализации первого этапа:

- 1) проводится построение частотных характеристик гармонических составляющих ускорений (AcFC) системы (4) в дорезонансной и резонансной зонах, включающих возбуждение супергармонического резонанса порядка 2:1 и субгармонического порядка 1:2;
- 2) с их помощью устанавливаются частоты возмущающей силы, при которых амплитуды двух младших гармоник в законе ускорений примерно равны;
- 3) определяются стационарные режимы движений, соответствующие этим частотам;
- 4) выполняется их спектрально-фазовый анализ и проводится построение их усечённых Фурье-разложений для ускорений рабочего органа;
- 5) проводится сравнение оптимальных законов ускорения (1), (2) с полученными стационарными режимами системы.

На втором этапе:

- 1) рассматривается модель движения материальной частицы по горизонтальной вибрирующей поверхности;
- 2) устанавливаются её законы перемещений при оптимальном и установленных на первом этапе суб- и супергармонических законах движения рабочего органа;
- 3) проводится сравнение, формулируются выводы.

Реализация первого этапа осуществляется с помощью разработанного программного обеспечения в виде приложений к среде моделирования Matlab. Построение частотных характеристик осуществляется путем сканирования с малым шагом выбранного промежутка изменения частоты вынуждающей силы. Для каждого её значения выполняется численное решение системы дифференциального уравнения (4) на временном отрезке, достаточном для установления колебаний. Затем, на промежутке, равном периоду стационарного режима, проводился его Фурье-анализ с использованием подпрограммы *ifft*, реализующей обратное преобразование Фурье.

Для снижения общего времени интегрирования дифференциальных уравнений при построении частотных характеристик, начальные условия, описывающие состояние системы для каждого следующего значения частоты возбуждения, принимаются равными конечным значениям фазовых переменных, полученным для предыдущего её значения. Решение уравнения (4) выполняется посредством солвера *ode23*, реализующего методы Рунге-Кутты 2-3-го порядков в модификации Богацки и Шампина [27], [28]. В данном случае, он оказывается более надёжным, по сравнению с решателями *ode45* (методы Рунге-Кутты 4-5-го порядка в модификации Дорманда и Принца) и *ode113* (метод Адамса, Башфорта, Моултона), хотя, и немного более медлительным.

Реализация второго этапа – определение перемещений материальной частицы на вибрирующей горизонтальной поверхности, осуществляется с помощью явного метода Эйлера [29].

### 3 Результаты исследования сложных резонансов

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) гармонических составляющих в законах перемещений ВТТМ в до- и зарезонансной зонах, которые включают наиболее интенсивные из сложных резонансов, – супергармонический порядка 2:1 и субгармонический порядка 1:2.

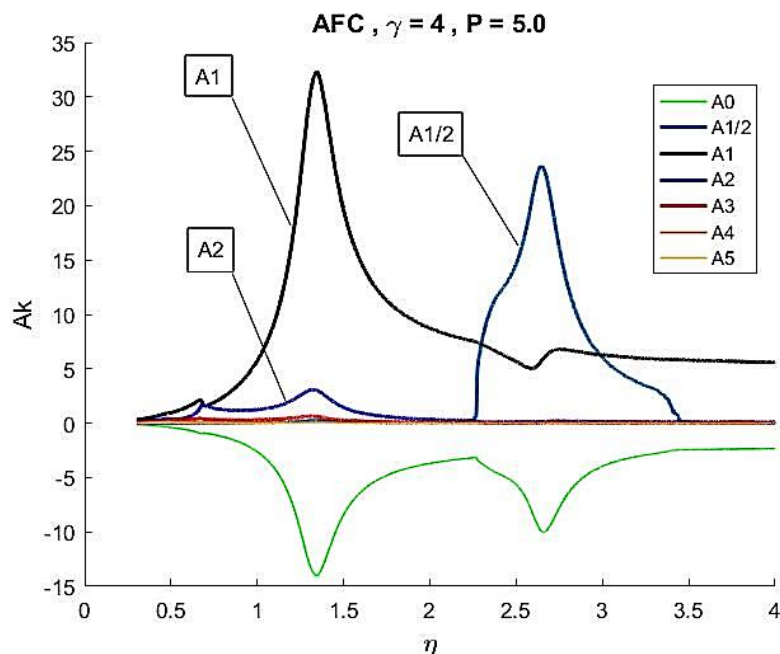


Рисунок 2 – АЧХ гармонических составляющих стационарных законов движения в зоне поиска

На рис. 3,а приводятся частотные характеристики пяти наиболее интенсивных гармонических составляющих закона ускорений рабочего органа в зоне возбуждения супергармонических резонансов. При частоте  $\eta=0.96$  амплитуды первых двух из них, практически, совпадают. На рис. 3, б приводится, соответствующий этой частоте возбуждения, закон ускорений рабочего органа. Усечённое Фурье-разложение переменной части его закона перемещений с точностью до пяти гармонических составляющих имеет вид

$$\xi_1(\tau) = 4.7887 \cos(0.96\tau - 1.8629) + 1.2033 \cos(2 \cdot 0.96\tau + 3.0672) + 0.3101 \cos(3 \cdot 0.96\tau + 1.4152) + 0.0736 \cos(4 \cdot 0.96\tau + 0.0438) + 0.0063 \cos(5 \cdot 0.96\tau + 0.7921) \quad (5)$$

или, сделав замену

$$0.96\tau - 1.8629 = 2\pi t,$$

получим

$$\begin{aligned} \xi_1(t) = & 4.7887 \cos(2\pi t) - 1.2033 \cos(4\pi t - 2.6318) + 0.3101 \cos(6\pi t + 0.7197) + \\ & + 0.0736 \cos(8\pi t + 1.2122) + 0.0063 \cos(10\pi t - 2.4598). \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая (6) и (2), можно отметить, что соотношение амплитуд первых двух гармонических составляющих супергармонического режима близко к одному из оптимальных, однако фазовые различия весьма существенны.

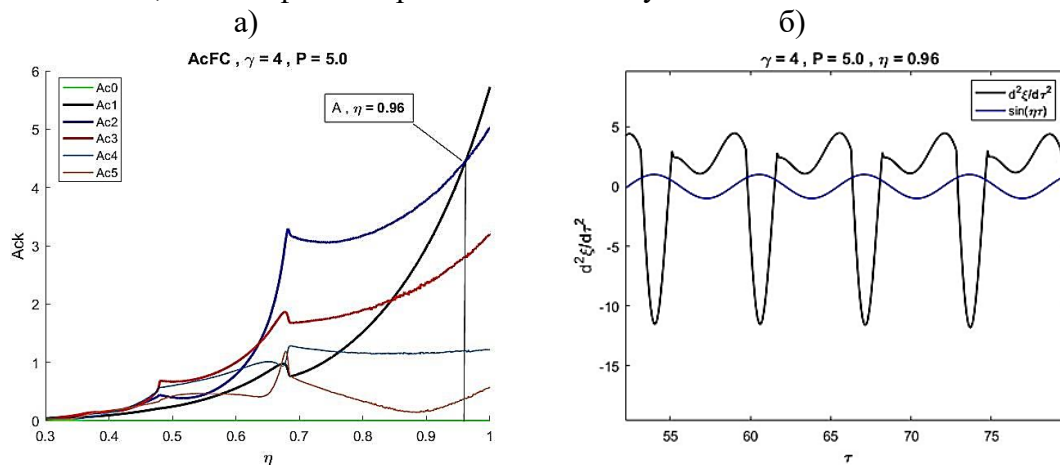


Рисунок 3 – Частотные характеристики гармонических составляющих закона ускорений в зоне супергармонических резонансов (а) и супергармонический закон ускорений рабочего органа (б) для  $\eta=0.96$

Частотные характеристики субгармонического закона ускорений рабочего органа приведены на рис. 4, а. В промежутке изменения  $\eta \in [2.59, 2.66]$  амплитуды младших гармоник, т.е. субгармоники и основной, примерно равны. На рис. 4, б приведен стационарный закон ускорений для одной из частот этого диапазона, а именно, для  $\eta=2.62$ . Усечённое Фурье-разложение переменной части закона перемещений рабочего органа для этой частоты возбуждения, с учётом пяти первых гармоник, имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1(\tau) = & 23.0779 \cos\left(\frac{2.62}{2}\tau - 1.1388\right) + 5.5618 \cos\left(\frac{2.62}{2} \cdot 2\tau + 2.0169\right) + 0.4461 \cos\left(\frac{2.62}{2} \cdot 3\tau + 2.1569\right) + \\ & + 0.0755 \cos\left(\frac{2.62}{2} \cdot 4\tau + 0.6111\right) + 0.0437 \cos\left(\frac{2.62}{2} \cdot 5\tau + 2.7971\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Сделав в (7) замену

$$\frac{2.62}{2}\tau - 1.1388 = 2\pi t$$

и переходя к переменной  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \xi_1(\tau) = & 23.0779 \cos(2\pi t) - 5.5618 \cos(4\pi t + 1.1529) + \\ & + 0.4461 \cos(6\pi t - 0.7099) + 0.0755 \cos(8\pi t - 1.1170) + 0.0437 \cos(10\pi t + 2.2079). \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнивая, теперь, (8) с (2), можно отметить достаточно высокую точность выполнения амплитудного отношения двух первых гармонических составляющих и заметные различия в их фазовых соотношениях.

Перейдем к сравнению скорости перемещения материальной частицы при рассматриваемых режимах колебаний горизонтальной поверхности.

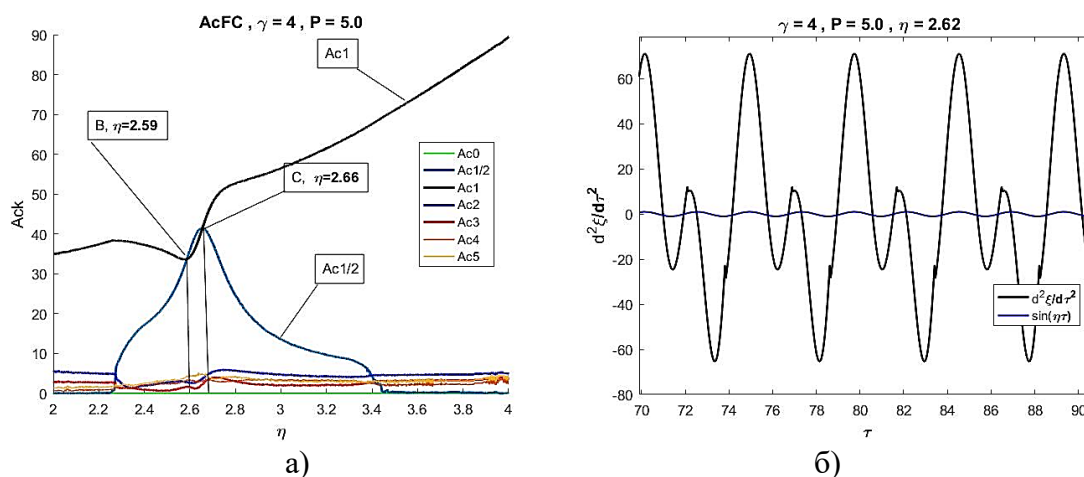


Рисунок 4 – Частотные характеристики гармонических составляющих закона ускорений в зоне субгармонического резонанса (а) и близкий к оптимальному субгармонический закон ускорений рабочего органа (б)

## 4 Перемещение материальной частицы

Проведём сравнительный анализ выделенных режимов, а именно, супергармонического (5) и субгармонического (7), с оптимальным режимом движения рабочего органа (2) по скорости перемещения на нём транспортируемого груза, идеализированного в виде материальной частицы. Известно, что описание обрабатываемого материала может осуществляться в виде материальной частицы (точки), механо-реологической модели слоя материала и других моделей [1]. Необходимо отметить, что и в настоящее время модель материальной частицы является наиболее часто применяемой при описании вибрационных процессов, т.к. позволяет выявить физический механизм многих процессов вибрационного перемещения [30].

Рассмотрим вариант, когда на частицу действуют следующие силы (рис. 5): тяжести  $G$ , нормальной реакции  $N$ , инерции  $J$  и трения  $F$ , причём сила трения изменяется по закону сухого трения Амонтона-Кулона.

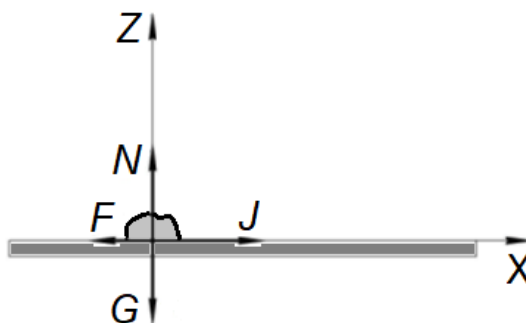


Рисунок 5 – Расчётная схема

Рассмотрим уравнение движения частицы в неподвижной системе координат XZ (рис. 5)

$$m\ddot{x} = -fres \cdot mg \cdot \text{sign}(\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)), \quad (9)$$

где  $x(t)$  – перемещение частицы;  $x_0(t)$  – перемещение вибрирующей поверхности;  $fres$  – коэффициент трения скольжения;  $g$  – ускорение свободного падения.

Сделав в (9) замены (3)  $x = \xi\Delta$ ,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = (c_1/M)^{0.5}$ ,  $\eta = \omega/\omega_0$ , и  $x_0 = \Delta\zeta$ , представим его в виде

$$\xi''(\tau) = -fres \cdot \frac{g}{\Delta\omega_0^2} \text{sign}(\omega_0\Delta\xi'(\tau) - \omega_0\Delta\zeta'(\tau))$$

или в безразмерной форме

$$\xi''(\tau) = -fr \cdot \text{sign}(\xi'(\tau) - \zeta'(\tau)), \text{ где } fr = fres \cdot \frac{g}{\omega_0}. \quad (10)$$

Для проведения расчётов возьмём значение коэффициента сопротивления сыпучего груза-антрацита по стальной поверхности  $fres=0.29$  [31] и, ориентируясь на вибромашины резонансного типа, будем считать, что  $\omega_0=26$  рад/с и значение  $fr=fres \cdot g/\omega_0 \approx 0.11$ . В уравнении (10) учитываем только переменные части законов движения, т.е. принимаем  $\xi=\xi_1$  и  $\zeta=\zeta_1$ , с соответствующим переходом в (2) к переменной  $\tau$ .

Результаты, полученные явным методом Эйлера, представлены на рис. 6.

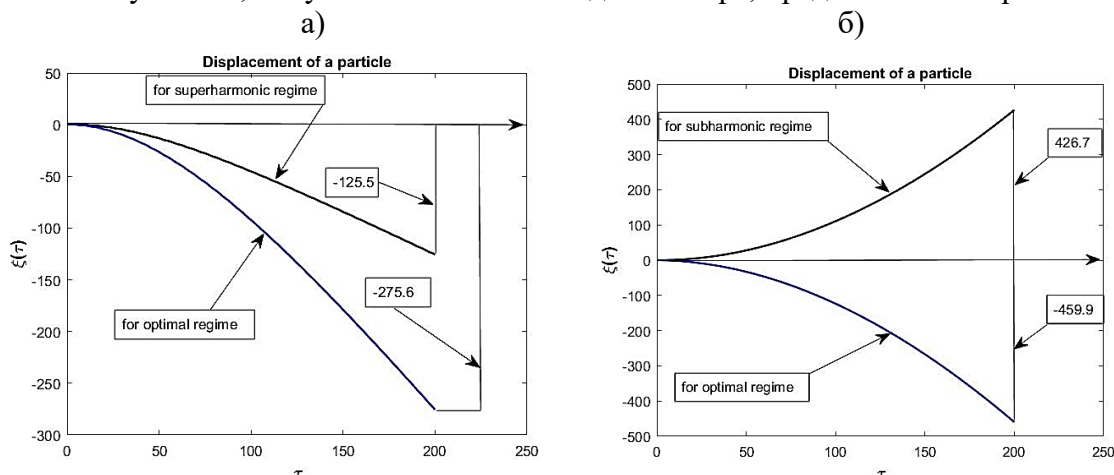


Рисунок 6 – Перемещение материальной частицы при супергармоническом а), субгармоническом б) и оптимальном режимах вибрации рабочей поверхности

Анализ рис. 6а показывает, что при супергармоническом режиме вибрации рабочей поверхности для приведенного временного промежутка интегрирования средняя скорость транспортирования оказалась более чем в два раза ниже, по сравнению с оптимальным режимом его вибрации. В этом плане выигрывает субгармонический режим (рис. 6б). При его реализации отличия, полученные на финальной стадии данного промежутка, невелики и составляют 7-8 %. Правда, следует отметить, что в силу различий фазовых соотношений в законах движения направления перемещения материальной частицы оказались противоположны. Данную особенность целесообразно иметь в виду при проектировании и выборе расположения упругих элементов 6 (рис. 1).

## Заключение

Приведем основные результаты.

На примере горизонтальной ВТТМ с билинейной упругой характеристикой показано, что путём возбуждения сложных резонансов можно генерировать полигармонические колебания по амплитудному спектру близкие к оптимальным бигармоническим. Выполненные примеры расчёта обнадеживают и демонстрируют перспективность их использования в вибрационном машиностроении. При субгармонических порядка 1:2 режимах движения рабочей поверхности скорость транспортирования близка к оптимальной, на супергармонических порядка 2:1 она заметно ниже, однако, вследствие более широкого гармонического состава по сравнению с субгармоническими, их применение может положительно отразиться на сепарирующих свойствах вибрирующих поверхностей. Так, в частности, в спектре ускорений супергармонических режимов, величина третьей гармоники составляет более 50 % основной, а при субгармонических – около 20 %.

## Список литературы

1. *Вибрации в технике: Справочник*. Т.4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э. Э. Лавендела. Москва: Машиностроение, 1981. 509 с.
2. Блехман И. И. Исследование процесса вибросепарации и вибротранспортировки. *Инженерный сборник*. Москва: Наука. 1952. Т. 11. С. 12-79.
3. Пресняков В. К. *Исследование режимов движения частиц сыпучего материала по вибрирующей плоскости применительно к расчету грохотов, питателей и конвейеров*. Донецк: ДПИ, 1961. 76 с.
4. Аграновская Э. А. Выбор оптимальных параметров вибрационных транспортирующих машин с помощью электронной моделирующей установки / Э.А. Аграновская, И.И. Блехман. *Обогащение руд*. 1962. №5. С.18-27.
5. Троицкий В. А. Об оптимизации процесса вибротранспортировки. *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. XXVII. Вып. 6. С. 1117-1123.
6. Блехман И. И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. Москва: Наука, 1964. 410 с.
7. Потураев В. Н. *Вибрационные транспортирующие машины* / В.Н. Потураев, В.П. Франчук, А.Г. Червоненко. М.: Машиностроение, 1964. 214 с.
8. Лавендел Э. Э. Оптимальный закон движения лотка при безотрывной прямой вибротранспортировке деталей. *Известия вузов. Машиностроение*. 1963. №12. С. 71-79.
9. Лавендел Э. Э. Графический способ определения средней скорости вибротранспортирования в безотрывном режиме движения. *Вопросы динамики и прочности. Сборник статей*. Вып. XII. Рига: Звайгзне. 1966. С. 88-99.
10. Крюков Б.И. *Динамика вибрационных машин резонансного типа*. Киев: Наукова думка. 1967. 210 с.
11. Червоненко А. Г. Аналитическое исследование виброперемещения сыпучего материала по рабочим поверхностям, совершающим полигармонические прямолинейные колебания. *Проблемы вибрационной техники: мат. науч. семинара*. Киев: Наукова думка. 1970. С. 116-125.
12. Лавендел Э. Э. *Синтез оптимальных вибромашин*. Рига: «Зинатне», 1970. 252 с.
13. Гончаревич И. Ф. Динамика вибрационного транспортирования. Москва: Наука, 1972. 244 с.
14. Топешашвили Т. А. Исследование закономерностей вибротранспортирования при бигармонических колебаниях / Т.А. Топешашвили, И.Ф. Гончаревич. *Транспорт горных предприятий*. МТИ. 1968. С. 223-226.
15. Камышный Н. И. Взаимодействие детали с бигармонически колеблющимся лотком / Н.И. Камышный, Б.И. Сапожников, С.И. Клепиков. *Известия вузов. Машиностроение*. 1977. № 5.
16. Абдуллаев А. А. Разработка и совершенствование вибрационных транспортно-технологических машин для мелкой рыбы и криля: Автореф. дис.... к.т.н.: Специальность 05.02.14, 05.05.05. Москва, 1985. 19 с.
17. Анахин В. Д. Вибрационное перемещение при продольных бигармонических колебаниях / В.Д. Анахин, В.Н. Монахов. *Известия вузов. Машиностроение*. 1974. №8. С. 74-78.
18. Клепиков С. И. *Качество вибрационных транспортно-технологических устройств*: монография. Хабаровск: изд-во Тихоокеанского ун-та, 2017. 106 с.

19. Васильев А. М. К вопросу о вибрационном перемещении при негармонических колебаниях рабочей поверхности / А.М. Васильев, С.А. Бредихин, В.К. Андреев. *Науч. журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств»*. 2019. № 2. С. 42-48.
20. Гончаревич И. Ф. Динамика горных машин с упругими связями / И.Ф. Гончаревич, А.В. Докукин. Москва: Наука, 1975. 212 с.
21. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах: пер. с англ. Москва: Мир, 1968. 432 с.
22. Цыфанский С. Л. Использование нелинейных эффектов в вибрационных, электрогидравлических и кавитационных технологиях, вибродиагностике, разработке надводных и подводных биороботов. *Инновационные предложения*. Санкт-Петербург: «СУПЕРиздательство», 2021. 196 с.
23. Belovodskiy V. N., Bukin S.L., Sukhorukov M.Y., Babakina A.A. 2:1 Superharmonic Resonance in Two-Masses Vibrating Machine. *V Journal of Vibration Engineering and Technologies*, 2015, Vol. 3(2). pp. 123-135.
24. Беловодский В. Н. Субгармонические колебания одномассовой инерционной вибромашины с асимметричной упругой опорой / В. Н. Беловодский, С. Л. Букин. *Проблемы искусственного интеллекта*. 2022. № 2(25). С. 4-15.
25. Беловодский В. Н. Одномассовая вибромашина с инерционным приводом и билинейной характеристикой упругих связей / Беловодский В.Н., Букин С.Л. *Информатика и кибернетика*. Донецк: ДонНТУ. 2024. № 2(36). С. 35-43.
26. Беловодский В. Н. О формировании идеальных законов движения рабочих органов вибрационных транспортирующих машин путём реализации супергармонических резонансов / В. Н. Беловодский, С. Л. Букин. *Информатика и кибернетика*. 2024. № 4(38). С. 27-31.
27. Кетков Ю. Л. *MATLAB 7. Программирование, численные методы* / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005 752 с.
28. Moler Cleve B. Numerical Computing with MATLAB/ Cleve B. Moler. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2004. 336 p.
29. Бахвалов Н. С. *Численные методы* / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2020. 636 с.
30. Федоренко И. Я. *Вибрационные процессы и устройства в АПК: монография* / И.Я. Федоренко. Барнаул: РИО Алтайского ГАУ, 2016. 289 с.
31. *Углы естественного откоса и коэффициенты трения различных материалов*.  
<https://nikulya.ru/koeffitsient/treniya/ugol/>

## References

1. *Vibracii v tekhnike: Spravochnik*. T.4. *Vibracionnye processy i mashiny* / Pod red. E. E. Lavendela // – Moskva: Mashinostroenie, 1981. – 509 s.
2. Blekhman I. I. Issledovanie processa vibroseparacii i vibrotransportirovki / I.I. Blekhman // *Inzhenernyj sbornik*. – Moskva: Nauka. – 1952. – T. 11. – С. 12-79.
3. Presnyakov V. K. Issledovanie rezhimov dvizheniya chastic sypuchego materiala po vibriruyushchej ploskosti primenitel'no k raschetu grohotov, pitatelyam i konvejeram / V.K. Presnyakov. – Doneck: DPI, 1961. – 76 s.
4. Agranovskaya E. A. Vybor optimal'nyh parametrov vibracionnyh transportiruyushchih mashin s pomoshch'yu elektronnoj modeliruyushchej ustanovki / E.A. Agranovskaya, I.I. Blekhman // *Obogashchenie rud*. – 1962. – №5. – S.18-27.
5. Troickij V. A. Ob optimizacii processa vibrotransportirovki / V.A. Troickij // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. – 1963. – T. XXVII. – Vyp. 6. – S. 1117-1123.
6. Blekhman I. I. *Vibracionnoe peremeshchenie* / I.I. Blekhman, G.Yu. Dzhanelidze. – Moskva: Nauka, 1964. – 410 s.
7. Poturaev V. N. *Vibracionnye transportiruyushchie mashiny* / V.N. Poturaev, V.P. Franchuk, A.G. Chervonenko. – M.: Mashinostroenie, 1964. – 214 s.
8. Lavendel E. E. Optimal'nyj zakon dvizheniya lotka pri bezotryvnoj pryamoj vibrotransportirovke detalej / E.E Lavendel // *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*. – 1963. – №12. – S. 71-79.
9. Lavendel E. E. Graficheskij sposob opredeleniya srednej skorosti vibrotransportirovaniya v bezotryvnom rezhime dvizheniya / E.E Lavendel // *Voprosy dinamiki i prochnosti. Sbornik statej*. Vyp. XII. – Riga: Zvajgzne. – 1966. – S. 88-99.
10. Kryukov B.I. *Dinamika vibracionnyh mashin rezonansnogo tipa* / B.I. Kryukov. – Kiev: Naukova dumka. – 1967. – 210 s.

11. Chervonenko A. G. Analiticheskoe issledovanie vibroperemeshcheniya sypuchego materiala po rabochim poverhnostyam, sovershayushchim poligarmonicheskie pryamolinejnye kolebaniya / A.G. Chervonenko // Problemy vibracionnoj tekhniki: mat. nauch. seminar. – Kiev: Naukova dumka. – 1970. – S. 116-125.
12. Lavendel E. E. Sintez optimal'nyh vibromashin / E.E Lavendel. – Riga: «Zinatne», 1970. – 252 s.
13. Goncharevich I. F. Dinamika vibracionnogo transportirovaniya / I.F. Goncharevich. – Moskva: Nauka, 1972. – 244 s.
14. Topeshashvili T. A. Issledovanie zakonomernostej vibrotransportirovaniya pri bigarmonicheskikh kolebaniyah / T.A. Topeshashvili, I.F. Goncharevich // Transport gornyh predpriyatij. – MTI. – 1968. – S. 223-226.
15. Kamyshnyj N. I. Vzaimodejstvie detali s bigarmonicheski koleblyushchimsya lotkom / N.I. Kamyshnyj, B.I. Sapozhnikov, S.I. Klepikov // Izvestiya vuzov. Mashinostroenie. – 1977. – № 5. – S.
16. Abdullaev A. A. Razrabotka i sovershenstvovanie vibracionnyh transportno-tekhnologicheskikh mashin dlya melkoj ryby i krilya: Avtoref. dis.... k.t.n.: Special'nost' 05.02.14, 05.05.05. – Moskva, 1985. – 19 s.
17. Anahin V. D. Vibracionnoe peremeshchenie pri prodol'nyh bigarmonicheskikh kolebaniyah / V.D. Anahin, V.N. Monahov // Izvestiya vuzov. Mashinostroenie. – 1974. – №8. – S. 74-78.
18. Klepikov S. I. Kachestvo vibracionnyh transportno-tekhnologicheskikh ustrojstv: monografiya / S.I. Klepikov. – Habarovsk: izd-vo Tihookeanskogo un-ta, 2017. – 106 s.
19. Vasil'ev A. M. K voprosu o vibracionnom peremeshchenii pri negarmonicheskikh kolebaniyah rabochej poverhnosti / A.M. Vasil'ev, S.A. Bredihin, V.K. Andreev // Nauch. zhurnal NIU ITMO. Seriya «Processy i apparaty pishchevyh proizvodstv». – 2019. – № 2. – S. 42-48.
20. Goncharevich I. F. Dinamika gornyh mashin s uprugimi svyaziyami / I.F. Goncharevich, A.V. Dokukin. – Moskva: Nauka, 1975. – 212 s.
21. Hayasi T. Nelinejnye kolebaniya v fizicheskikh sistemah: per. s angl. – Moskva: Mir, 1968. – 432 s.
22. Cyfanskij S. L. Ispol'zovanie nelinejnyh effektov v vibracionnyh, elektrogidravlicheskikh i kavitacionnyh tekhnologiyah, vibrodiagnostike, razrabotke nadvodnyh i podvodnyh biorobotov. Innovacionnye predlozheniya / S. L. Cyfanskij. – Sankt-Peterburg: «SUPERizdatel'stvo», 2021. – 196 s.
23. Belovodskiy V. N., Bukin S.L., Sukhorukov M.Y., Babakina A.A. 2:1 Superharmonic Resonance in Two-Masses Vibrating Machine. V Journal of Vibration Engineering and Technologies, 2015, Vol. 3(2). – pp. 123-135.
24. Belovodskiy V. N. Subgarmonicheskie kolebaniya odnomassovoj inercionnoj vibromashiny s asimmetrichnoj uprugoj oporoy / V. N. Belovodskij, S. L. Bukin // Problemy iskusstvennogo intellekta. – 2022. – № 2(25). – S. 4-15.
25. Belovodskiy V. N. Odnomassovaya vibromashina s inercionnym privodom i bilinejnoy harakteristikoj uprugih svyazey / Belovodskij V.N., Bukin S.L. // Informatika i kibernetika. Doneck: DonNTU. – 2024. – № 2(36). – S. 35-43.
26. Belovodskiy V. N. O formirovanii ideal'nyh zakonov dvizheniya rabochih organov vibracionnyh transportiruyushchih mashin putyom realizacii supergarmonicheskikh rezonansov / V. N. Belovodskij, S. L. Bukin // Informatika i kibernetika. – 2024. – № 4(38). – S. 27-31.
27. Ketkov Yu. L. MATLAB 7. Programmirovaniye, chislennyye metody / Yu.L. Ketkov, A.Yu. Ketkov, M.M. Shul'c. – Sankt-Peterburg: BHV-Peterburg, 2005. – 752 s.
28. Moler Cleve B. Numerical Computing with MATLAB/ Cleve B. Moler. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. – 336 p.
29. Bahvalov N. S. Chislennyye metody / N.S. Bahvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobel'kov. – Moskva: Binom. Laboratoriya znaniy, 2020. – 636 s.
30. Fedorenko I. Ya. Vibracionnyye processy i ustrojstva v APK: monografiya / I.Ya. Fedorenko. – Barnaul: RIO Altajskogo GAU, 2016. – 289 s.
31. Ugly estestvennogo otkosa i koeffitsienty treniya razlichnyh materialov. – <https://nikulya.ru/koeffitsient/treniya/ugol/>

## RESUME

*V. N. Belovodskiy, S.L. Bukin*

*On the movements of a material particle on a horizontal transporting machine of a nonlinear type performing sub- and superharmonic vibrations*

In paper reseaches devoted to use of polyharmonic oscillations in different technological processes has been analyzed and the task was to study the possibility of realizing oscillations close to optimal in vibrating transporting machines of a nonlinear type.

For this purpose, a single-mass horizontal vibrationg machine with a bilinear characteristic of elastic elements and inertial harmonic excitation is considered, the frequency characteristics are

constructed and the analysis of its stationary motions in the zones of sub- and superharmonic resonances is performed. In these frequency ranges, the possibility of excitation of vibrations with amplitude ratios close to optimal biharmonic ones is installed.

A mathematical model of movements of a material particle along a horizontal vibrating surface is considered and a comparative analysis of the velocity of its displacements for the selected sub- and superharmonic motions is carried out. When a subharmonic resonance of the order of 1:2 is excited in a vibrating machine, the possibility of forming motion modes of the working surface in which the particle velocity is close to the maximum is demonstrated.

## РЕЗЮМЕ

*В. Н. Беловодский, С.Л. Букин*

*О перемещениях материальной частицы на горизонтальной транспортирующей машине нелинейного типа, совершающей суб- и супергармонические колебания*

В статье проведен анализ исследований, посвященных изучению воздействия полигармонических вибраций, в частности, на процессы вибротранспортирования, поставлена задача изучения возможности реализации колебаний близких к оптимальным в вибрационных машинах нелинейного типа.

С этой целью рассмотрена одномассовая горизонтальная транспортирующая машина с билинейной характеристикой упругих связей и инерционным гармоническим возбуждением, проведено построение частотных характеристик и выполнен анализ её стационарных колебаний в зонах сложных (суб- и супергармонических) резонансов. В этих частотных диапазонах установлена возможность возбуждения вибраций по амплитудным соотношениям близких к оптимальным бигармоническим.

Рассмотрена математическая модель безотрывных движений материальной частицы по горизонтальной вибрирующей поверхности и выполнен сравнительный анализ скорости её перемещения при таких движениях. При возбуждении субгармонического резонанса порядка 1:2 продемонстрирована возможность формирования режимов движения рабочей поверхности, при которых скорость перемещения частицы близка к максимальной.

**Беловодский В. Н.** - к.т.н., доцент, ФГБОУ ВО ДонНТУ, кафедра компьютерного моделирования и дизайна, 283001, Донецк, ул. Артема, 58, тел +7(949) 334-9150, [v.belovodskiy@gmail.com](mailto:v.belovodskiy@gmail.com)

*Область научных интересов: моделирование технических систем, нелинейная динамика, фракталы и математический дизайн, нейронные сети*

**Букин С.Л.** - к.т.н., доцент, тел +7(949) 333-4224, [s.bukin08@gmail.com](mailto:s.bukin08@gmail.com)

*Область научных интересов: вопросы проектирования вибрационных машин различного технологического назначения, моделирование технических систем, нелинейная динамика*

Статья поступила в редакцию 28.08. 2025