

УДК 004.8+533.65.013.622

DOI 10.24412/2413-7383-2025-4-39-99-111

Д. Л. Остапущенко, А. Э. Воронов, В. В. Черных, М. О. Петренко  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Луганский государственный университет имени Владимира Даля»  
291034, Луганская Народная Республика, город Луганск, квартал Молодежный, дом 20А

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АЭРОДИНАМИКИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОЛЕТА БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ УПРАВЛЕНИЯ

D. L. Ostapushchenko, A. E. Voronov, V. V. Chernykh, M. O. Petrenko  
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education  
«Lugansk Vladimir Dahl State University»  
291034, Lugansk People's Republic, Lugansk, Molodezhny District, 20A

## NUMERICAL SOLUTION OF THE AERODYNAMICS PROBLEM IN MODELING THE FLIGHT OF UNMANNED AERIAL VEHICLES WITH INTELLIGENT CONTROL SYSTEMS

Разработка интеллектуальных систем управления беспилотными летательными аппаратами, особенно тех, которые используют методы обучения с подкреплением, требует физически адекватной модели объекта управления. Работа посвящена построению математической модели процесса обтекания беспилотного летательного аппарата воздушной средой, основанная на теории потенциала, теории и численных методах решения интегральных уравнений. Данная модель предназначена для определения фазовой траектории летательного аппарата в режиме реального времени на различных этапах создания интеллектуальных систем управления полетом.

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, интеллектуальные системы управления, искусственный интеллект, обучение с подкреплением, аэродинамика, интегральные уравнения, динамика полета

Developing intelligent control systems for unmanned aerial vehicles, especially those using reinforcement learning methods, requires a physically adequate model of the controlled object. The work is devoted to the construction of a mathematical model of the process of air flow around an unmanned aerial vehicle, based on potential theory, theory and numerical methods for solving integral equations. This model is designed to determine the phase trajectory of an aircraft in real time at various stages of the creation of intelligent flight control systems.

**Keywords:** unmanned aerial vehicle, intelligent control systems, artificial intelligence, reinforcement learning, aerodynamics, integral equations, flight dynamics

## Введение

Одной из основных задач при разработке беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) является создание автоматических систем управления полетом. Наиболее гибкие механизмы автоматического управления БПЛА при выполнении различных задач в сложных условиях могут быть обеспечены с использованием интеллектуальных систем управления (ИСУ).

Во многих случаях для создания ИСУ используются методы искусственного интеллекта (ИИ), входящие в группу методов, основанных на обучении с подкреплением (*RL, Reinforcement Learning,*) [1-4]. Эти методы предполагают использование на этапе поиска оптимальной программы управления физически адекватной модели объекта управления, позволяющей осуществлять многократное решение задачи динамики объекта при различных программах управления в условиях приближенных к реальности в режиме реального времени.

**Целью данной работы** является построение физически адекватной математической модели процесса обтекания беспилотных летательных аппаратов воздушной средой, предназначенной для определения сил и моментов при расчете фазовой траектории летательного аппарата в режиме реального времени на различных этапах создания и использования интеллектуальных систем управления полетом.

В большинстве случаев БПЛА представляет собой твердое тело [5], положение которого в пространстве характеризуется шестью степенями свободы. Движение такого тела хорошо описывается решением второго закона Ньютона и динамического уравнения Эйлера совместно с уравнениями, описывающими взаимодействие поверхности тела с обтекающими его потоками среды [6-10]. Решение задачи взаимодействия поверхности тела с обтекающими его потоками среды ставит своей целью определение сил и моментов аэродинамической природы, вклад которых оказывает существенное влияние на динамику движения аппарата в пределах атмосферы. Мгновенная картина обтекания определяется распределением скоростей движения по поверхности, ограничивающей тело. При этом на поверхности должны выполняться граничные условия, в простейшем случае условия непротекания.

Представляется перспективным при решении задачи обтекания в режиме реального времени использовать панельные методы, основанные на теории потенциала. При использовании данной группы методов предполагается, что поверхность тела вносит искажение в первичный невозмущенный поток среды за счет поля скоростей, создаваемых вторичными источниками (двойной слой источников) [11]. Вторичные источники располагаются на поверхности тела и некоторых дополнительных поверхностях, определяемых спецификой используемой расчетной схемы. При этом решение задачи нахождения их плотности сводится к численному решению поверхностного интегрального уравнения, которое путем разбиения поверхности тела на элементарные площадки сводится к системе алгебраических уравнений.

## Постановка задачи исследования

Рассмотрим задачу обтекания летательного аппарата воздушной средой в связанной системе координат  $Oxuz$ . Внутренний объем летательного аппарата обозначим  $\Omega$ . Относительно характера взаимодействия поверхности летательного аппарата  $\partial\Omega$  с набегающим потоком воздуха на данном этапе выполнения работы примем ряд предположений. Будем считать невозмущенный набегающий воздушный поток  $\vec{V}^\infty$  однородным и постоянным во времени. Будем считать, что он равен по величине воздушной

скорости, и противоположен ей по направлению. Примем гипотезу стационарности, согласно которой будем считать, что силы и моменты, действующие на летательный аппарат в неустановившемся полете, совпадают с силами и моментами, которые бы действовали на него в стационарном воздушном потоке. Угловыми движениями летательного аппарата пренебрегаем. Среду будем считать несжимаемой и идеальной, т.е. вязкостью также пренебрежем.

## Методы решения задачи исследования

Методы исследований, применяемые в работе, основываются на современных достижениях в области аэродинамики и динамики полета летательных аппаратов, векторном и тензорном анализе, теории потенциала, теории и численных методах решения дифференциальных и интегральных уравнений.

Возмущенный летательным аппаратом воздушный поток представим в виде суммы набегающего воздушного потока  $\vec{V}^\infty$  и возмущения  $\vec{V}^*$ , которое будем считать потенциальным

$$\vec{V} = \vec{V}^* + \vec{V}^\infty = \text{grad } \varphi = \text{grad } \varphi^* + \text{grad } \varphi^\infty; \varphi^\infty = \vec{V}^\infty \cdot \vec{r} + C. \quad (1)$$

Учитывая уравнение неразрывности несжимаемой среды  $\text{div } \vec{V} = 0$ , видим, что потенциалы  $\varphi$ ,  $\varphi^*$  и  $\varphi^\infty$  удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi^* + \Delta \varphi^\infty = \Delta \varphi^* = 0. \quad (2)$$

На поверхности  $\partial\Omega$  выполняется условие непротекания

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

Потенциал во внутренних точках  $\Omega$  будем считать постоянным (для определенности нулевым), это соответствует тому, что внутренние точки  $\Omega$  являются неподвижными в связанной системе координат  $Oxuz$ . Тогда, при подходе к поверхности  $\partial\Omega$  с внутренней стороны, нормальная производная такого потенциала также обращается в ноль.

Расположим на поверхности  $\partial\Omega$  двойной слой с поверхностной плотностью  $\tau$ . Его потенциал в точке наблюдения  $Q$  задается формулой

$$\varphi(Q) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \tau(M) \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M + \varphi^\infty(Q), \quad (2)$$

где  $\vec{r}_{MQ}$  – вектор, проведенный из точки интегрирования  $M$  на поверхности  $\partial\Omega$  в точку наблюдения  $Q$ ;  $r_{MQ} = \|\vec{r}_{MQ}\|$ ;  $\vec{n}_M$  – внешняя нормаль к поверхности  $\partial\Omega$  в точке интегрирования  $M$ .

Потенциал двойного слоя удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках вне поверхности  $\partial\Omega$ , имеет непрерывную нормальную производную. При переходе через поверхность потенциал двойного слоя претерпевает разрывы и его предельные значения в точке наблюдения  $Q$ , помещенной на поверхность  $\partial\Omega$ , описываются соотношениями [16], [17]:

$$\lim_{P \rightarrow Q} \varphi(P) = \pm \frac{\tau(Q)}{2} + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \tau(M) \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M, \quad (2)$$

где знак «+» берется при стремлении  $P \rightarrow Q$  с внешней стороны поверхности  $\partial\Omega$ ; «-» – с внутренней. Во внутренних точках области  $\Omega$  потенциал  $\varphi$  тождественно равен нулю, поэтому

$$\lim_{P \rightarrow Q} \varphi(P) = -\frac{\tau(Q)}{2} + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \tau(M) \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M + \varphi^\infty(Q) = 0, \quad (3)$$

что позволяет записать уравнение Фредгольма второго рода относительно плотности двойного слоя  $\tau$

$$\tau(Q) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\partial\Omega} \tau(M) \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M + 2\varphi^\infty(Q). \quad (4)$$

После нахождения из данного уравнения поверхностной плотности двойного слоя  $\tau$  скорость движения среды в точке  $Q$  окружающего тело пространства может быть вычислена по формуле

$$\vec{V}(Q) = \frac{1}{4\pi} \text{grad}_Q \iint_{\partial\Omega} \tau(M) \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M + \vec{V}^\infty(Q). \quad (5)$$

Для численного решения уравнения (4) приближенно представим поверхность  $\partial\Omega$  в виде теоретико-множественного объединения плоских элементарных площадок  $\Delta_i$

$$\partial\Omega = \cup_{i=1}^N \Delta_i, \quad (6)$$

пересекающихся только по своим границам

$$\Delta_i \cap \Delta_j \in \partial\Delta_i \cap \partial\Delta_j \text{ при } i \neq j. \quad (7)$$

Пример дискретной геометрической модели представлен на рис. 1.

В данной работе в качестве элементарных площадок используются треугольники. Будем считать плотность двойного слоя в пределах элементарных площадок постоянной. Поочередно помещая точку наблюдения  $Q_i$  в центры элементарных площадок  $\Delta_i$ , получим

$$\tau_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \tau_j \iint_{\Delta_j} \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ_i}}{r_{MQ_i}^3} dS_M + 2\varphi_i^\infty, \quad (8)$$

$$\tau_i = \tau(Q_i), \varphi_i^\infty = \varphi(Q_i), i = \overline{1, N}.$$

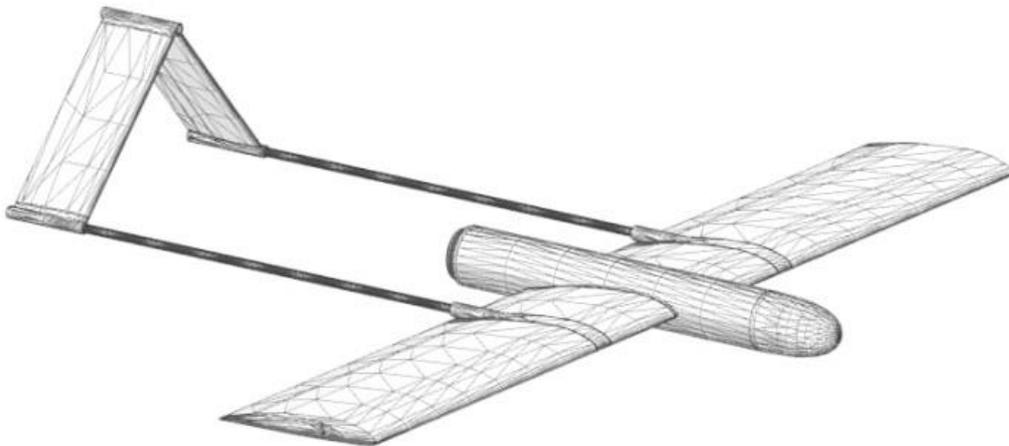


Рисунок 1 – Дискретная геометрическая модель летательного аппарата

Тогда при  $i = j$

$$\iint_{\Delta_j} \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ_i}}{r_{MQ_i}^3} dS_M = 0. \quad (9)$$

В свою очередь при  $i \neq j$

$$\iint_{\Delta_j} \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ_i}}{r_{MQ_i}^3} dS_M = -\theta(Q_i, \Delta_j), \quad (10)$$

где  $\theta(Q, \Delta)$  – величина телесного угла, под которым виден треугольник  $\Delta$  из точки наблюдения  $Q$ .

Для пространственного треугольника  $ABC$  и точки наблюдения  $Q$  значение величины телесного угла могут быть найдены из соотношений:

$$T = \frac{(\vec{r}_{QA}, \vec{r}_{QB}, \vec{r}_{QC})}{r_{QA}r_{QB}r_{QC} + (\vec{r}_{QA} \cdot \vec{r}_{QB})r_{QC} + (\vec{r}_{QB} \cdot \vec{r}_{QC})r_{QA} + (\vec{r}_{QC} \cdot \vec{r}_{QA})r_{QB}}, \quad (11)$$

$$\theta(Q, \Delta) = 2 \arctan(T).$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_N \end{pmatrix}; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \varphi_1^\infty \\ \varphi_2^\infty \\ \dots \\ \varphi_N^\infty \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \theta(Q_i, \Delta_j), \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j, \quad (13)$$

систему уравнений можно записать в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (14)$$

Для решения полученной системы используется метод минимизации обобщенной невязки GMRES, который относится к итерационным методам и позволяет при принятии в качестве начального приближения достаточно близкого к решению вектора  $\mathbf{x}$  сделать процедуру решения достаточно эффективной с вычислительной точки зрения. Это позволяет на каждом временном шаге численного решения динамического уравнения брать в качестве начального приближение вектор  $\mathbf{x}$ , вычисленный на прошлом временном шаге.

После решения полученной системы уравнений и нахождения  $\tau_i$  скорость движения среды может быть найдена по формуле

$$\vec{V}(Q) = \frac{1}{4\pi} \text{grag}_Q \sum_{i=1}^N \tau_i \iint_{\Delta_j} \frac{\vec{n}_M \cdot \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M + V(Q), \quad (15)$$

которая может быть преобразована к виду

$$\vec{V}(Q) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \tau_i \oint_{\partial \Delta_i} \frac{d\vec{l}_M \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} + V(Q), \quad (16)$$

где интегрирование осуществляется по сторонам треугольника.

Вычисление интеграла по одной из сторон треугольника  $ABC$  может быть осуществлено аналитически. Запишем формулу для стороны  $AB$

$$\frac{\tau}{4\pi} \int_A^B \frac{d\vec{l}_M \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} = \tau \frac{\cos \alpha_{AQ} - \cos \alpha_{BQ}}{4\pi r} \vec{e}, \quad (17)$$

где

$$\vec{s} = \vec{r}_{AB}/r_{AB}, \quad \vec{r} = \vec{r}_{AQ} - (\vec{r}_{AQ} \cdot \vec{s})\vec{s}, \quad \vec{n} = \vec{r}/r, \quad \vec{e} = \vec{s} \times \vec{n}, \quad (18)$$

$$\cos \alpha_{AQ} = (\vec{r}_{AQ} \cdot \vec{s})/r_{AQ}, \quad \cos \alpha_{BQ} = (\vec{r}_{BQ} \cdot \vec{s})/r_{BQ}.$$

Соответствующие формулы для остальных сторон могут быть получены путем циклической подстановки наименований вершин.

Для нахождения сил и моментов воспользуемся уравнением Бернулли [13-15] для струйки воздуха, обтекающей тело, выбрав два сечения струйки: одно на бесконечности, второе в точке  $M$  вблизи поверхности  $\partial \Omega$

$$p^\infty + \frac{\rho(V^\infty)^2}{2} = p(M) + \frac{\rho(V(M))^2}{2}. \quad (19)$$

Данное соотношение удобно переписать в виде

$$p(M) = \frac{\rho(V^\infty)^2}{2} \left( 1 - \frac{(V(M))^2}{(V^\infty)^2} \right) + p^\infty, \quad (20)$$

где величина

$$c_p(M) = 1 - \frac{(V(M))^2}{(V^\infty)^2} \quad (21)$$

называется коэффициентом давления.

Тогда полная аэродинамическая сила и момент в связанной системе координат  $Oxuz$  могут быть найдены по формулам

$$\vec{F}^a = - \oint_{\partial\Omega} p(M) \vec{n}_M dS_M \text{ и } \vec{M}^a = - \oint_{\partial\Omega} p(M) \vec{r}_M \times \vec{n}_M dS_M. \quad (22)$$

Для приближенного учета возникающих на поверхности летательного аппарата касательных сил воспользуемся следующей эвристической конструкцией. Будем считать, что касательные напряжения направлены по вектору скорости потока вблизи поверхности летательного аппарата и подчиняются закону Амонтона-Кулона. Вводя в рассмотрение вектор  $\vec{v}_M = \vec{V}(M)/V(M)$ , можно записать

$$\vec{F}^a = \oint_{\partial\Omega} \mu(V(M)) p(M) \vec{v}_M dS_M \text{ и } \vec{M}^a = \oint_{\partial\Omega} \mu(V(M)) p(M) \vec{r}_M \times \vec{v}_M dS_M, \quad (23)$$

где  $\mu(V)$  – эвристическая зависимость коэффициента трения от абсолютной величины скорости обтекания, в простейшем случае  $\mu = const$ .

## Полученные результаты исследования

Для верификации результатов решения задачи обтекания тела воздушной средой проведем сравнение результатов расчета, полученных с использованием описанной модели, с результатами, полученными аналитически [19].

В качестве первого примера рассмотрим обтекание шара радиусом  $a$  потоком невязкой жидкости или невязкого газа. Осесимметричное решение в системе координат  $RO\theta$  имеет вид:

$$V_R = V^\infty \left[ 1 - \left( \frac{a}{R} \right)^3 \right] \cos(\theta); V_\theta = V^\infty \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{R} \right)^3 \right] \sin(\theta). \quad (24)$$

Распределение скорости обтекания на поверхности сферы определяется зависимостями

$$V_R = 0; V_\theta = \frac{3}{2} V^\infty \sin(\theta). \quad (25)$$

Следовательно, коэффициент давления определяется формулой

$$c_p = 1 - \frac{(V_\theta)^2}{(V^\infty)^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2(\theta). \quad (26)$$

Осуществим расчет поля скоростей для шара радиусом  $a = 1\text{ м}$  при  $V^\infty = 100\text{ м/с}$ . Дискретная геометрическая модель поверхности шара и распределение поля скоростей обтекающей его воздушной среды представлены на рис. 2а. Для установления погрешностей вычисления определялись скорость обтекания вблизи поверхности и распределение коэффициента давления. Эпюра коэффициента давления представлена на рисунке 2б. Расчет проводился при различном числе разбиений поверхности шара. Поскольку рассчитываемые величины проходят через нулевое значение, определялись их абсолютные погрешности, значения которых приведены в таблице 1.

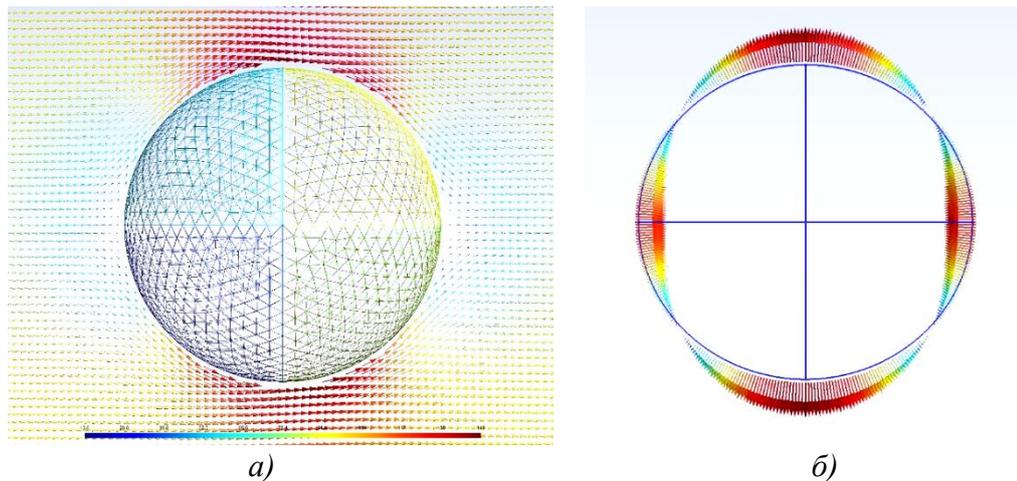


Рисунок 2 – Результаты решения задачи обтекания шара воздушной средой: *a* – дискретная геометрическая модель поверхности шара и распределение поля скоростей воздушной среды; *б* – эпюра коэффициента давления

Таблица 1 – Погрешности расчета поля скоростей и коэффициента давления

Количество элементов разбиения	12 552	48 062	57 722
Абсолютная погрешность скорости, м/с	10,35	5,84	5,81
Абсолютная погрешность коэффициента давления	0,297	0,107	0,099

В качестве второго примера рассмотрим обтекание цилиндра радиусом  $a$  потоком невязкой жидкости или невязкого газа. Решение в системе координат  $RO\theta$  имеет вид:

$$V_R = V^\infty \left[ 1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 \right] \cos(\theta); V_\theta = V^\infty \left[ 1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 \right] \sin(\theta). \quad (27)$$

Скорость на поверхности цилиндра:

$$V_R = 0; V_\theta = 2V^\infty \sin(\theta). \quad (28)$$

Следовательно, коэффициент давления определяется формулой

$$c_p = 1 - \frac{(V_\theta)^2}{(V^\infty)^2} = 1 - 4 \sin^2(\theta). \quad (29)$$

Расчет проводился для цилиндра радиусом  $a = 1$  м при  $V^\infty = 100$  м/с. Абсолютные погрешности расчета скорости и коэффициента давления не превысили 5 м/с и 0,3 соответственно. Дискретная геометрическая модель поверхности цилиндра и результат расчета распределения поля скоростей воздушной среды представлены на рис. 3.

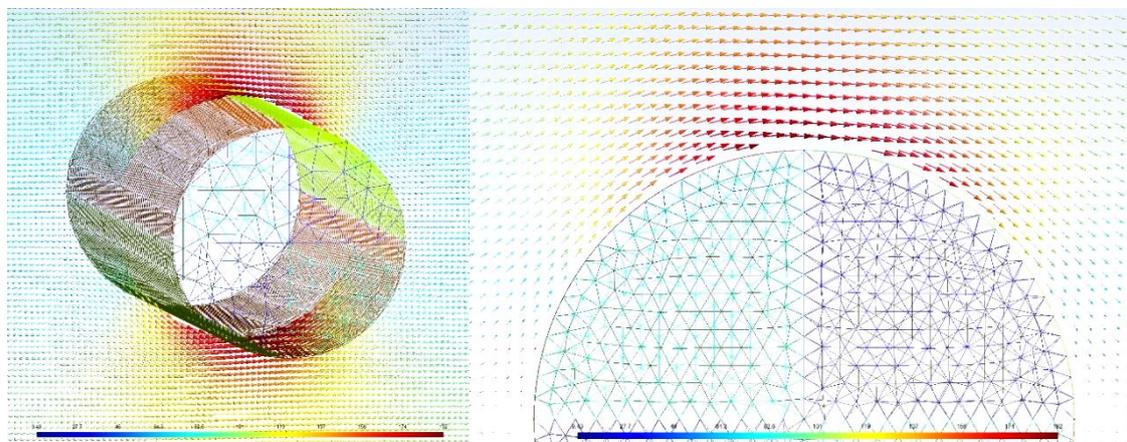


Рисунок 3 – Дискретная геометрическая модель поверхности цилиндра и результат расчета распределения поля скоростей воздушной среды

Достаточно высокая точность совпадения численных расчетов с результатами аналитических расчетов, проведенных на этапе верификации, позволяет сделать вывод о том, что реализованная в работе модель может быть использована при решении практически значимых задач, для которых не существует аналитических решений.

Проведем численный расчет для задачи обтекания воздушным потоком при  $V^\infty = 100$  м/с фюзеляжа БпЛА. Дискретная геометрическая модель и результаты расчета поля скоростей представлены на рис. 4.

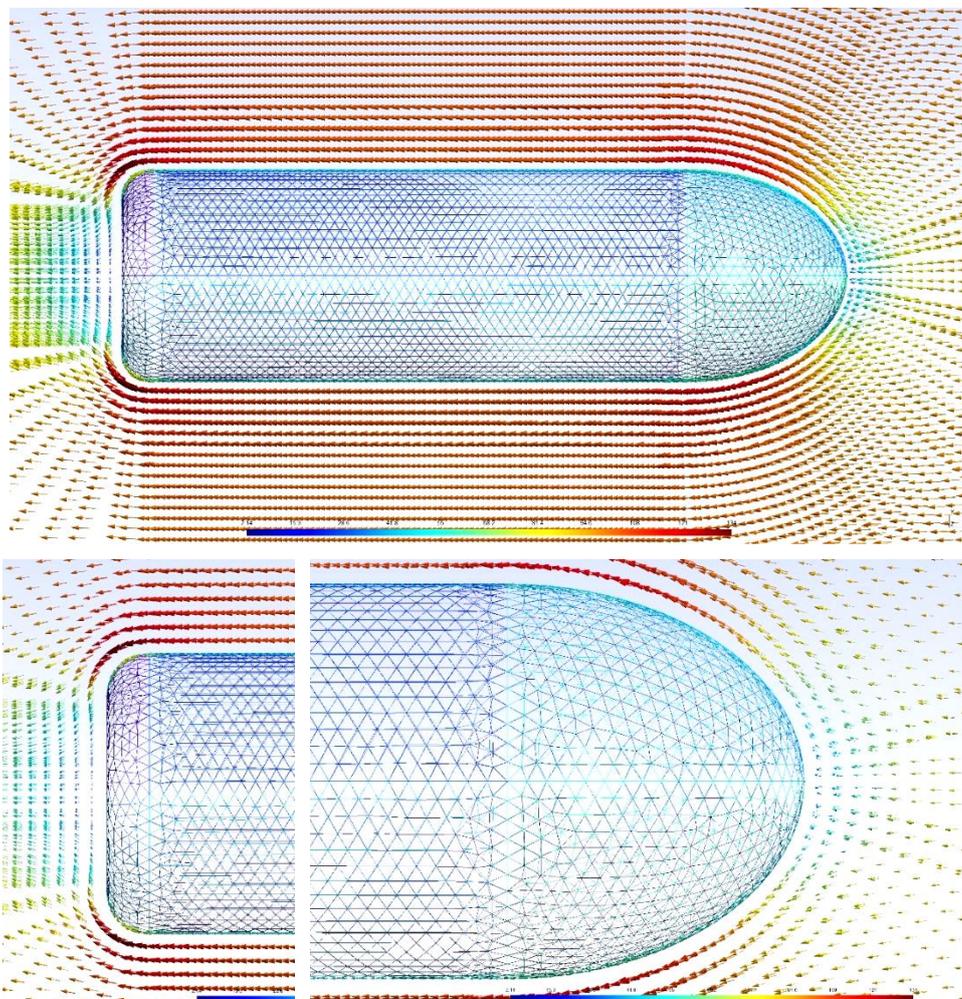


Рисунок 4 – Дискретная геометрическая модель поверхности фюзеляжа и результат расчета распределения поля скоростей воздушной среды

## Заключение

В настоящей работе получили дальнейшее развитие методы синтеза управляющих программ беспилотных летательных аппаратов, основанные на применении технологий машинного обучения с подкреплением, за счёт построения математической модели, включающей в себя рациональное сочетание приближенных бессеточных вычислительных схем и эвристических приемов, и позволяющей осуществлять решение задач аэробаллистики в режиме реального времени с учетом реальной формы поверхности летательного аппарата. Помимо этого, по итогам проведенных исследований были достигнуты следующие результаты.

1. Построена физически адекватная математическая модель процесса обтекания беспилотного летательного аппарата воздушной средой, основанная на теории потенциала, теории и численных методах решения интегральных уравнений.

2. Полученная модель предназначена для определения фазовой траектории летательного аппарата для различных зависимостей значений управляющих параметров от времени, а, следовательно, различных программ управления. На основании результатов моделирования становится возможным осуществление приближенного оценивания соответствия фазовой траектории летательного аппарата заданию на полет, исходя из заранее определенных метрик.

3. Построенная модель предназначена для использования как на этапе предполетной подготовки при синтезе программ управления летательным аппаратом с использованием обучения с подкреплением, так и в процессе полета с целью прогнозирования полетной траектории бортовым оборудованием летательного аппарата при использовании методов обучения с подкреплением, основанных на моделях.

4. Является актуальным дальнейшее развитие математической модели взаимодействия поверхности летательного аппарата с воздушной средой за счет учета в ней большего числа физически значимых факторов, например, более точного учета вязкости воздушной среды, углового движения летательного аппарата, завихрений потока, явления срыва потока и т.д.

5. Поскольку в рамках предлагаемого подхода предполагается многократное применение математической модели, при ее развитии необходимо тщательно соблюсти баланс между требованиями физической адекватности и требуемыми для осуществления процесса моделирования вычислительными ресурсами. Существенным требованием является возможность выполнения расчетов в режиме реального времени.

## Список литературы

1. Саттон Р.С. Обучение с подкреплением / Р.С. Саттон, Э.Г. Барто: пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. 399 с.
2. Лапань М. Глубокое обучение с подкреплением. AlphaGo и другие технологии / М. Лапань. СПб.: Питер, 2020. 496 с.
3. Уиндер Ф. Обучение с подкреплением для реальных задач /Ф. Уиндер: пер. с англ. СПб.: БХВ-Петербург, 2023. 400 с.
4. Моралес М. Грокаем Глубокое обучение с подкреплением / М. Моралес. СПб.: Питер, 2023. 464 с.
5. Остапущенко Д.Л., Воронов А.Э., Петренко М.О., Черных В.В. Численное решение динамических уравнений движения летательного аппарата в задачах разработки интеллектуальных систем управления полетом // Вестник Луганского государственного университета имени Владимира Даля. 2024. № 8(86). С. 35-42.
6. Боднер В.А. Теория автоматического управления полетом / В.А. Боднер. М.: Наука, 1964. 700 с.
7. Дрябкин В.В. Бортовые системы управления полетом / Ю.В. Байбородин, В.В. Дрябкин, Е.Г. Сменковский, С.Г. Унгурян. М.: Транспорт, 1975. –336 с.
8. Жаков А.М. Управление баллистическими ракетами и космическими объектами / А.М. Жаков. – М.: Воениздат, 1974. 261 с.
9. Павловский М.А. Теоретическая механика. Динамика: Учебник / М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфиева, О.Ф. Бойчук. К.: Выща шк., 1990. 480 с.
10. Федорченко А.М. Теоретическая физика. Классическая механика / А.М. Федорченко. К.: Вища школа. Головное изд-во, 1983. 351 с.
11. Гальченко В.Я. Численный анализ пространственной конфигурации магнитных полей объектов сложной геометрической формы с учетом нелинейных характеристик веществ / В.Я. Гальченко, Д.Л. Остапущенко // Информационные технологии. 2008. №8. С. 43-49.
12. Афонин П.М. Беспилотные летательные аппараты / П.М. Афонин, И.С. Голубев, Н.И. Колоткови др.; Под ред. Л.С. Чернобровкина. М.: Машиностроение. – 440 с.

13. Павленко В.Ф. Боевая авиационная техника: Летательные аппараты, силовые установки и их эксплуатация / В.Ф. Павленко, А.А. Дьяченко, В.И. Жулев и др.; Под ред. В.Ф. Павленко. М.: Воениздат, 1984. 320 с.
14. Самойлович Г.С. Гидроаэромеханика: Учебник для вузов / Г.С. Самойлович. М.: Машиностроение, 1980. 280 с.
15. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. Учеб. Пособие для педвузов / О.В. Голубева. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
16. Курбатов П.А. Численный расчет электромагнитных полей / П.А. Курбатов, С.А. Аринчин. М.: Энергоатомиздат, 1984. 168 с.
17. Припадчев А.Д., Горбунов А.А., Магдин А.Г. Моделирование устойчивости и управляемости летательных аппаратов. = Инфра-Инженерия, 2021. 116 с.
18. О.Е. Лукьянов, Д.В. Золотов, О.У. Эспиноса Барсенас, В.А. Комаров Определение аэродинамических характеристик малоразмерных беспилотных летательных аппаратов в лётном эксперименте // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2023. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-aerodinamicheskikh-harakteristik-malorazmernih-bespilotnyh-letatelnyh-apparatov-v-lyotnom-eksperimente> (дата обращения: 02.12.2025).
19. ГОСТ Р 57700.8-2018. Численное моделирование физических процессов. Численное моделирование дозвуковых течений вязких жидкостей и газов. Верификация ПО: национальный стандарт Российской Федерации: издание официальное : утвержден и введен в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 6 февраля 2018 г. № 48-ст. М.: Стандартинформ, 2018. 15 с.
20. Уланов, С.И. Анализ возможностей применения летательных аппаратов в контроле состояния местности / С.И. Уланов, О.А. Криводубский, А.А. Никитина Проблемы искусственного интеллекта (International Peer-Reviewed Scientific Journal «Problems of Artificial Intelligence»), ISSN 2413-7383. 2023. № 3(30).
21. Моржов В.И., Ермачков Ю.А. Моделирование физических процессов в авиации. Учебное пособие – Инфра-Инженерия, 2021. 160 с.
22. Уланов, С.И. Анализ современных разработок беспилотных летательных аппаратов / С.И. Уланов, О.А. Криводубский, А.А. Никитина. Проблемы искусственного интеллекта (International Peer-Reviewed Scientific Journal «Problems of Artificial Intelligence»), ISSN 2413-7383. 2024. № 4(35).
23. Исмаилов Куат Кайратович Определение аэродинамических характеристик беспилотного летательного аппарата самолетного типа аналитическими методами // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2022. №78. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-aerodinamicheskikh-harakteristik-bespilotnogo-letatelno-go-apparata-samoletnogo-tipa-analiticheskimi-metodami> (дата обращения: 02.12.2025).
24. Савищенко Николай Петрович, Апевалов Игорь Владимирович, Дёма Игорь Анатольевич, Попов Александр Сергеевич Экспериментальные исследования аэродинамических характеристик беспилотного летательного аппарата // Известия ТулГУ. Технические науки. 2020. №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/eksperimentalnye-issledovaniya-aerodinamicheskikh-harakteristik-bespilotnogo-letatelno-go-apparata> (дата обращения: 02.12.2025).
25. Гвоздева В.А. Интеллектуальные технологии в беспилотных системах. Учебник. ИНФРА-М, 2021. 176 с.

## References

1. Sutton, R.S. Reinforcement Learning, E.G. Barto, translated from English. Moscow: BINOM. Knowledge Laboratory, 2017, 399 p.
2. Lapan, M. Deep Reinforcement Learning: AlphaGo and Other Technologies. St. Petersburg: Piter, 2020, 496 p.
3. Winder, F. Reinforcement Learning for Real-World Problems. St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2023, 400 p.
4. Morales, M. Grokaem: Deep Reinforcement Learning. St. Petersburg: Piter, 2023, 464 p.
5. Ostapushchenko D.L., Voronov A.E., Petrenko M.O., Chernykh V.V. Numerical solution of dynamic equations of aircraft motion in problems of developing intelligent flight control systems // Bulletin of Vladimir Dahl Luhansk State University. - 2024. - No. 8 (86). - P. 35-42.
6. Bodner V.A. Theory of automatic flight control / V.A. Bodner. - Moscow: Nauka, 1964. - 700 p.
7. Dryabkin V.V. On-board flight control systems / Yu.V. Bayborodin, V.V. Drabkin, E.G. Smenkovsky, S.G. Unguryan. - Moscow: Transport, 1975. - 336 p.
8. Zhakov A.M. Control of Ballistic Missiles and Space Objects / A. M. Zhakov. Moscow: Voениzdat, 1974. 261 p.
9. Pavlovsky M. A. Theoretical Mechanics. Dynamics: Textbook / M. A. Pavlovsky, L. Yu. Akinfieva, O. F. Boychuk. - Kiev: Vyshcha shkola, 1990. - 480 p.
10. Fedorchenko A. M. Theoretical Physics. Classical Mechanics / A. M. Fedorchenko. - Kiev: Vyshcha shkola. Main publishing house, 1983. - 351 p.

11. Galchenko V. Ya. Numerical Analysis of the Spatial Configuration of Magnetic Fields of Objects of Complex Geometric Shape Taking into Account the Nonlinear Characteristics of Substances / V. Ya. Galchenko, D. L. Ostapushchenko // Information Technologies. – 2008. – №8. – P. 43-49.
12. Afonin P.M. Unmanned Aerial Vehicles / P.M. Afonin, I.S. Golubev, N.I. Kolotkov, and others; Ed. by L.S. Chernobrovkin. – Moscow: Mashinostroenie. – 440 p.
13. Pavlenko V.F. Combat Aviation Equipment: Aircraft, Power Plants, and Their Operation / V.F. Pavlenko, A.A. Dyachenko, V.I. Zhulev, and others; Ed. by V.F. Pavlenko. – Moscow: Voenizdat, 1984. – 320 p.
14. Samoylovich G.S. Hydroaeromechanics: Textbook for Universities / G.S. Samoylovich - Moscow: Mashinostroenie, 1980. - 280 p.
15. Golubeva O.V. Course in Continuum Mechanics. Textbook. Manual for pedagogical universities / O.V. Golubeva - Moscow: Vysshaya shkola, 1972. - 368 p.
16. Kurbatov P.A. Numerical calculation of electromagnetic fields / P.A. Kurbatov, S.A. Arinchin. - Moscow: Energoatomizdat, 1984. - 168 p.
17. Pripadchev A.D., Gorbunov A.A., Magdin A.G. Modeling of Stability and Controllability of Aircraft. = Infra-Engineering, 2021. – 116 p.
18. O.E. Lukyanov, D.V. Zolotov, O.U. Espinosa Barcenas, V.A. Komarov Determination of Aerodynamic Characteristics of Small-Sized Unmanned Aerial Vehicles in a Flight Experiment // Bulletin of Samara University. Aerospace Engineering, Technology and Mechanical Engineering. 2023. No. 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-aerodinamicheskikh-harakteristik-malorazmernyh-bespilotnyh-letatelnyh-apparatov-v-lyotnom-eksperimente> (date of access: 02.12.2025).
19. GOST R 57700.8-2018. Numerical modeling of physical processes. Numerical modeling of subsonic flows of viscous liquids and gases. Software verification: national standard of the Russian Federation: official publication: approved and put into effect by Order of the Federal Agency for Technical Regulation and Metrology dated February 6, 2018, No. 48-st. – Moscow: Standartinform, 2018. – 15 p.
20. Ulanov, S.I. Analysis of the possibilities of using aircraft in terrain monitoring / S.I. Ulanov, O.A. Krivodubsky, A.A. Nikitina. International Peer-Reviewed Scientific Journal "Problems of Artificial Intelligence", ISSN 2413-7383. 2023. No. 3(30).
21. Morzhov, V.I., Ermachkov, Yu.A. Modeling of Physical Processes in Aviation. Tutorial - Infra-Engineering, 2021. - 160 p.
22. Ulanov, S.I. Analysis of Modern Developments of Unmanned Aerial Vehicles / S.I. Ulanov, O.A. Krivodubsky, A.A. Nikitina. International Peer-Reviewed Scientific Journal "Problems of Artificial Intelligence", ISSN 2413-7383. 2024. No. 4(35).
23. Ismailov Kuat Kairatovich Determination of the aerodynamic characteristics of an unmanned aerial vehicle of an airplane type by analytical methods // Vestn. Tomsk. state University. Mathematics and mechanics. 2022. No. 78. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-aerodinamicheskikh-harakteristik-bespilotnogo-letatel'nogo-apparata-samoletnogo-tipa-analiticheskimi-metodami> (date of access: 02.12.2025).
24. Savishchenko Nikolay Petrovich, Apevalov Igor Vladimirovich, Dema Igor Anatolyevich, Popov Aleksandr Sergeevich Experimental studies of the aerodynamic characteristics of an unmanned aerial vehicle // Bulletin of Tula State University. Technical sciences. 2020. No. 2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/eksperimentalnye-issledovaniya-aerodinamicheskikh-harakteristik-bespilotnogo-letatel'nogo-apparata> (Accessed: 02.12.2025).
25. Gvozdeva V.A. Intelligent Technologies in Unmanned Systems. Textbook. INFRA-M, 2021. – 176 p.

## RESUME

*D. L. Ostapushchenko, A. E. Voronov, V. V. Chernykh, M. O. Petrenko*  
*Numerical solution of the aerodynamics problem in modeling the flight*  
*of unmanned aerial vehicles with intelligent control systems*

The development of modern unmanned aerial vehicles (UAVs) requires the creation of sophisticated automatic flight control systems capable of operating in complex and changing conditions. To achieve high flexibility and adaptability, intelligent control systems, particularly those using artificial intelligence and reinforcement learning, are increasingly being used. These methods require a physically adequate mathematical model of the controlled object to perform repeated, rapid simulations of flight dynamics under conditions close to real-world conditions. The primary objective of this study is to develop such a model that would accurately and in real time determine the aerodynamic forces and moments acting on the UAV surface.

This study utilizes a mathematical modeling approach based on potential theory and numerical methods for solving integral equations. The aerodynamic problem is formulated using a panel method, where the continuous surface of the UAV is approximated by a discrete set of planar triangular elements. To efficiently solve the resulting system of linear algebraic equations, the generalized residual minimization method (GMRES) is applied. Aerodynamic forces are calculated using the Bernoulli equation to determine the pressure coefficient, and a heuristic approach based on the Amontons-Coulomb law is introduced to estimate the tangential friction forces.

The proposed model was thoroughly verified by comparing the obtained numerical results with known analytical solutions for canonical geometric shapes: a sphere and a cylinder. The verification process showed that increasing the sampling density significantly improves accuracy. Subsequently, the model was successfully applied to calculate the velocity field distribution around the complex geometry of a UAV fuselage, confirming its practical applicability to objects for which analytical solutions do not exist.

The resulting model provides the necessary balance between physical accuracy and computational efficiency, making it suitable for real-time applications—a mandatory requirement for dynamic flight control problems. It is designed for dual use: for autonomous reinforcement learning of agents and for online trajectory prediction by onboard UAV systems.

## РЕЗЮМЕ

*Д. Л. Остапущенко, А. Э. Воронов, В. В. Черных, М. О. Петренко*  
*Численное решение задачи аэродинамики при моделировании полета беспилотных летательных аппаратов с интеллектуальными системами управления*

Разработка современных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) требует создания совершенных систем автоматического управления полетом, способных функционировать в сложных и меняющихся условиях. Для достижения высокой гибкости и адаптивности все чаще применяются интеллектуальные системы управления, в частности те, которые используют методы искусственного интеллекта и обучения с подкреплением. Эти методы требуют наличия физически адекватной математической модели объекта управления для выполнения многократного быстрого моделирования динамики полета в условиях, приближенных к реальным. Основная задача, решаемая в данной работе, заключается в построении такой модели, которая позволяла бы точно и в режиме реального времени определять аэродинамические силы и моменты, действующие на поверхность БПЛА.

В исследовании используется подход математического моделирования, основанный на теории потенциала и численных методах решения интегральных уравнений. Аэродинамическая задача сформулирована с использованием панельного метода, где непрерывная поверхность БПЛА аппроксимируется дискретным набором плоских треугольных элементов. Для эффективного решения полученной системы линейных алгебраических уравнений применяется метод минимизации обобщенной невязки (GMRES). Аэродинамические силы рассчитываются с использованием уравнения Бернулли для определения коэффициента давления, а для оценки касательных сил трения введен эвристический подход, основанный на законе Амонтона-Кулона.

Предложенная модель была тщательно верифицирована путем сравнения полученных численных результатов с известными аналитическими решениями для канонических геометрических форм: шара и цилиндра. Процесс верификации показал, что увеличение плотности дискретизации значительно повышает точность. Впоследствии модель

была успешно применена для расчета распределения поля скоростей вокруг сложной геометрии фюзеляжа БПЛА, что подтвердило ее практическую применимость для объектов, для которых не существует аналитических решений.

Полученная модель обеспечивает необходимый баланс между физической точностью и вычислительной эффективностью, что делает ее пригодной для приложений реального времени — обязательного требования для задач динамического управления полетом. Она предназначена для двойного использования: при автономном обучении агентов с подкреплением и для онлайн-прогнозировании траектории бортовыми системами БПЛА.

**Остапушенко Дмитрий Леонидович** – доцент кафедры прикладной математики, заведующий МНИЛ «Лаборатория интеллектуальных систем управления», ФГБОУ ВО «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», 291034, Луганская Народная Республика, г. Луганск, квартал Молодежный, дом 20А, телефон +7(959)560-35-93, [ostapuschenko.dmitriy@mail.ru](mailto:ostapuschenko.dmitriy@mail.ru). *Область научных интересов:* математическое моделирование, неразрушающий контроль, численные методы решения задач электродинамики и аэродинамики, эвристические и мультиагентные алгоритмы, поведенческий искусственный интеллект и обучение с подкреплением

**Воронов Артур Эдуардович** – доцент кафедры автоматизации и компьютерно-интегрированных технологий, ФГБОУ ВО «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», 291034, Луганская Народная Республика, г. Луганск, квартал Молодежный, дом 20А, телефон +7(959)161-06-51, [osooler@ua.ru](mailto:osooler@ua.ru). *Область научных интересов:* интерфейсы взаимодействия человека и машины, UX/UI-дизайн автоматизированных систем

**Черных Виктория Валерьевна** – доцент кафедры информационных и управляющих систем, ведущий научный сотрудник МНИЛ «Лаборатория интеллектуальных систем управления», ФГБОУ ВО «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», 291034, Луганская Народная Республика, г. Луганск, квартал Молодежный, дом 20А, телефон +7(959)138-33-19, [viktoria.chernykh@mail.ru](mailto:viktoria.chernykh@mail.ru). *Область научных интересов:* искусственный интеллект, информационные системы и технологии в различных сферах деятельности, интеллектуальные системы машинного обучения

**Петренко Максим Олегович** – младший научный сотрудник МНИЛ «Лаборатория интеллектуальных систем управления», ФГБОУ ВО «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», 291034, Луганская Народная Республика, г. Луганск, квартал Молодежный, дом 20А, телефон +7(959) 130-31-47, [max\\_petrenko\\_2002@mail.ru](mailto:max_petrenko_2002@mail.ru). *Область научных интересов:* бортовые системы беспилотных летательных аппаратов, искусственные нейронные сети, системы визуальной и инерциальной навигации

Статья поступила в редакцию 08.11.2025.