

Проблемы искусственного интеллекта. 2026. N 1 (40). С. 241-253
Problems of Artificial Intelligence. 2026;1(40):241-253.
Роботы, мехатроника. Робототехнические системы
Научная статья

УДК 007.52

doi: 10.24412/2413-7383-2026-1-40-241-253

В. М. Зуев, Д. А. Первенко

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Институт проблем искусственного интеллекта», г. Донецк
283048, г. Донецк, ул. Артема, 118 б

ДИНАМИКА ПРЫГАЮЩЕГО КОЛЕСНОГО РОБОТА

V. M. Zuev, D.A. Pervenko

Federal State Budgetary Scientific Institution «Institute of Artificial Intelligence Problems»
283048, Donetsk, Artema str, 118-b

THE DYNAMICS OF A JUMPING WHEELED ROBOT

В данной работе выполнен энергетический анализ динамики прыгающего колесного робота с учетом особенностей его движения на разных фазах прыжка. Рассмотрены процессы накопления и преобразования энергии, а также вопросы стабилизации положения робота в полете и при приземлении. Построена математическая модель, связывающая конструктивные параметры и режимы работы приводов с основными динамическими характеристиками. Полученные зависимости позволяют быстро получать численные оценки, необходимые для инженерного проектирования и выбора оптимальных параметров системы.

Ключевые слова: робот, динамика, прыгающий, колесный.

This work presents an energy analysis of the dynamics of a jumping wheeled robot, taking into account the specifics of its motion at different phases of the jump. The processes of energy accumulation and transformation are examined, as well as issues of stabilizing the robot's position during flight and landing. A mathematical model is developed that links structural parameters and actuator operating modes with the main dynamic characteristics. The derived relationships enable rapid estimation of numerical values required for engineering design and for selecting optimal system parameters.

Key words: robot, dynamics, jumping, wheeled.

Введение

Разработка мобильных роботов, способных не только перемещаться по поверхности, но и преодолевать препятствия за счёт прыжков, является актуальной задачей современной робототехники [1]. Прыгающие колесные роботы сочетают преимущества колесной мобильности (простота конструкции, энергоэффективность и высокая скорость движения) с возможностью кратковременного отрыва от опорной поверхности, что существенно расширяет область их применения — от инспекционных систем до поисково-спасательных платформ.

Ключевым элементом такой системы является привод, который должен обеспечить накопление и высвобождение достаточного количества энергии для выполнения прыжка. При этом выбор двигателя и редуктора требует строгого инженерного расчёта, учитывающего массу робота, геометрию механизма, распределение инерции и динамику разгона. Недостаточная мощность приведёт к невозможности реализации прыжка, тогда как избыточные характеристики увеличивают массу и энергопотребление системы.

Целью данной работы является расчёт требуемых энергетических и динамических параметров привода прыгающего колесного робота, а также определение минимальных характеристик двигателя, обеспечивающих выполнение заданного прыжка. В статье последовательно рассматриваются оценка необходимой энергии, вычисление момента инерции системы, определение требуемого крутящего момента, угловой скорости и мощности двигателя, а также формулируются требования к его типу и параметрам.

Базовый подход

Исследованию колёсных прыгающих роботов посвящено не очень много работ, из которых выделяются [1-5]. Эти работы посвящены в основном исследованию кинематики и компьютерному моделированию движения в различных ситуациях. В противоположность этим работам здесь представлена базовая энергетическая концепция.

Как правило, прыгающий робот представляет собой перевёрнутый маятник, катящийся внутри колеса. Величина перемещения центра масс составляет около диаметра колеса, а высоты прыжка может быть и более. Сделаем несколько упрощений, чтобы получить базовые представления о перемещении.

Шестерня массой M катится без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижного колеса радиусом R . Её начальное положение соответствует углу θ . Обычно это шина на колесе робота (в соответствии с рисунком 1), шестерня соединена с двигателем.

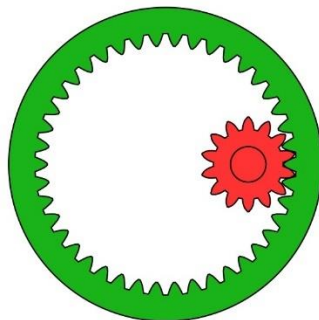


Рисунок 1 – Упрощенно основной механизм

Пусть θ это угол между вертикалью и радиус-вектором, проведённым от центра колеса к центру шестерни, причём $\theta = 0$ соответствует нижнему положению (положению устойчивого равновесия) $\angle NOA$. Тогда начальное условие: $\theta(0) = \theta_0$, и начальная угловая скорость $\dot{\theta}(0) = 0$ в соответствии с рисунком 2.

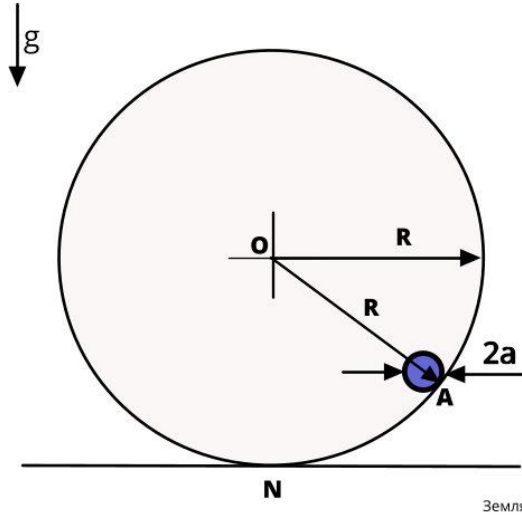


Рисунок 2 – Физическая модель основного механизма

Пусть радиус самой шестерни a . Тогда центр её движется по окружности радиусом $r = R - a$. Пусть в точке N колесо приклеено к земле. Если шестерня скользит, то это просто маятник на нити длиной R , и его уравнение:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin\theta = 0 \quad (1)$$

и это нам понадобится для сравнения. Так как шестерня катится без проскальзывания, то кинетическая энергия включает как поступательное, так и вращательное движение.

Допустим, шестерня приблизительно однородный сплошной цилиндр радиуса a , массой M . Его момент инерции относительно центра:

$$I = \frac{1}{2} M a^2 \quad (2)$$

Лагранжиан системы колесо-шестерня:

$$L = \frac{7}{10} M (R - a)^2 \dot{\theta}^2 - M g (R - a) (1 - \cos\theta) \quad (3)$$

Из уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

получаем уравнение движения:

$$\ddot{\theta} + \frac{5}{7(R-a)} g \sin\theta = 0 \quad (5)$$

Откуда вывод; движение ничем не отличается от простого маятника, но длина стала иной: $5/7R$. Решение аналогичных уравнений имеется в [6], [7].

Учет качения по земле

Колесо не закреплено, а может катиться по горизонтальной поверхности под действием движения шестерни [8-10].

Пусть: $x(t)$ — горизонтальная координата центра колеса шариком. Тогда положение шестерни:

$$\begin{cases} X = x + R \sin\theta \\ Y = R - R \cos\theta = R(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (6)$$

Связь между её углом поворота (тут не учитываем радиус шестерни).

$$x = R\varphi \quad (7)$$

$$\dot{x} = R\dot{\varphi} \quad (8)$$

Момент инерции колеса возьмём как:

$$I_{ж} = MR^2 \quad (9)$$

Лагранжиан

$$L = T - U = \left(M + \frac{m}{2}\right)\dot{x}^2 + m\dot{x}R\dot{\theta}\cos\theta + \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 - mgR(1 - \cos\theta) \quad (10)$$

Уравнения Лагранжа

(а) Для координаты x :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

L не зависит явно от x , это значит:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (2M + m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta \quad (13)$$

Тогда:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left((2M + m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0 \quad (14)$$

Это закон сохранения горизонтального импульса (в системе нет внешних горизонтальных сил, т. к. качение без проскальзывания — сила трения не совершает работу и не вводит диссипацию, а нормальная реакция вертикальна).

Итак, первый интеграл:

$$(2M + m)\dot{x} + mR\dot{\theta}\cos\theta = const = P_x \quad (15)$$

Если изначально система покоится: $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, то $P_x = 0$

Откуда

$$\dot{x} = -\frac{m}{2M+m}R\dot{\theta}\cos\theta \quad (16)$$

Это позволяет исключить \dot{x} из уравнения для θ

(б) Из уравнение для θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (17)$$

Получаем путем не сложных преобразований уравнение движения в виде:

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{m}{2M+m}\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\sin\theta}{1 - \frac{m}{2M+m}\cos^2\theta} \quad (18)$$

Это нелинейное уравнение второго порядка для $\theta(t)$. Оно описывает динамику шестерни в подвижном колесе. Способ решений таких уравнений [11-13].

Если учесть вращение шестерни, то нужно добавить его вращательную кинетическую энергию. Эффективная масса шестерни увеличится: как в предыдущей задаче, $T_{ш}^{пост} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2$, но полная кинетическая энергия — $\frac{1}{2}mv^2(1+k)$, где $k = \frac{I}{ma^2}$.

Это эквивалентно замене $m \rightarrow m_{eff} = m(1+k)$ в поступательной части энергии, но не совсем — потому что скорость центра масс та же, просто добавляется вращение.

Тогда в лагранжиане кинетическая энергия шестерни станет такой:

$$T_{ш} = \frac{1}{2}mv^2(1+k) = \frac{1}{2}m(1+k)(\dot{x}^2 + 2\dot{x}R\dot{\theta}\cos\theta + R^2\dot{\theta}^2)$$

И всё остальное повторяется с заменой $m \rightarrow m(1+k)$ в соответствующих местах.

Это уравнение, вообще говоря, не интегрируется в элементарных функциях, но его можно исследовать численно или линеаризовать для малых θ .

Конечно, в реальном механизме нужно добавить трение или демпфирование. Для этого можно добавить диссипативную функцию Рэлея:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\gamma_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\gamma_x \dot{x}^2$$

Тогда уравнения Лагранжа изменятся так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}}$$

Система будет терять энергию — колебания затухнут.

Учет платформы с исполнительными механизмами

Физическая модель механизма с возможностью прыжков показана в соответствии с рисунком 3.

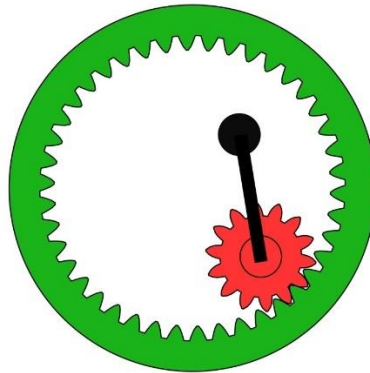


Рисунок 3 – Физическая модель механизма с возможностью прыжков

Добавляем платформу, на которой управление двигателем, аккумуляторы или бензобак, навесные рабочие элементы и прочая, и прочая в виде груза массы m на штанге (маятнике) длиной L . К шестерне жёстко прикреплен невесомый (для простоты, потом можно учесть) стержень длины L , на конце стержня — точечная масса m («груз»).

Теперь движение шестерён связано кинематически. Обозначим: $x(t)$ — координата центра колеса, $\theta(t)$ — угол между вертикалью и линией, соединяющей центр колеса с центром малой шестерни, $\varphi(t)$ — угол поворота шестерни вокруг её собственной оси (относительно инерциальной системы), $\psi(t)$ — угол отклонения стержня с грузом от некоторой оси. Но так как стержень жёстко закреплён на шестерне, то $\psi(t) = \varphi(t) + const$. Примем, что стержень направлен радиально наружу в начальный момент, или просто: стержень вращается вместе с шестернёй, поэтому его ориентация задаётся тем же углом $\varphi(t)$. Таким образом, положение груза определяется через $x(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$. Положение центра малой шестерни (\hat{i} единичный вектор по оси x):

$$\vec{r}_c = x\hat{i} + (R - r) \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (19)$$

(выбрано так, что нижнее положение при $\theta = 0$)

Его скорость:

$$\vec{v}_c = \dot{x}\hat{i} + (R - r)\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad (20)$$

Поскольку колесо катится без проскальзывания по земле, его угловая скорость:

$$\omega_{\text{ж}} = \frac{\dot{x}}{R} \quad (21)$$

Тогда скорость точки контакта на колесе

$$\vec{v}_{\text{конт, ж}} = \dot{x}\hat{i} + \vec{\omega}_{\text{ж}} \times \vec{r}_{\text{конт/центру}} \quad (22)$$

где

$$\vec{r}_{\text{конт/центру}} = -R\hat{n} \quad (23)$$

$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$ — вектор от центра колеса к точке контакта.

Тогда:

$$\vec{v}_{\text{конт, ж}} = \dot{x}\hat{i} + \left(-\frac{\dot{x}}{R}\hat{k}\right) \times (-R\hat{n}) = \dot{x}\hat{i} + \dot{x}(\hat{k} \times \hat{n}) \quad (24)$$

С другой стороны, скорость точки контакта на малой шестерне:

$$\vec{v}_{\text{конт, ш}} = \vec{v}_c + \vec{\omega}_{\text{ш}} \times (-r\hat{n}) = \vec{v}_c + \dot{\varphi}\hat{k} \times (-r\hat{n}) \quad (25)$$

Приравниваем $\vec{v}_{\text{конт, ш}}$ и $\vec{v}_{\text{конт, ж}} = \dot{x}$ и после упрощений получаем скалярное условие (ключевая кинематическая связь):

$$(R - r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = \dot{x} \quad (26)$$

Тогда положение груза:

$$\vec{r}_m = \vec{r}_c + L \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (27)$$

где

$$\vec{r}_c = \dot{x}\hat{i} + (R - r)(\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j}) \quad (28)$$

(Знак минус у $\cos\theta$ — чтобы при $\theta = 0$ центр был внизу.)

Кинетическая энергия колеса

$$T_{\text{ж}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{ж}}\omega_{\text{ж}}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\beta MR^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + \beta)M\dot{x}^2 \quad (29)$$

Кинетической энергии колеса груза находим скорость груза:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_c + L\dot{\varphi}(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}) \quad (30)$$

$$\vec{v}_m = [\dot{x} + (R - r)\dot{\theta} \cos\theta - L\dot{\varphi} \sin\varphi]\hat{i} + [(R - r)\dot{\theta} \sin\theta + L\dot{\varphi} \cos\varphi]\hat{j} \quad (31)$$

Здесь возникает сильная нелинейность: углы θ и φ связаны. Это заранее делает систему неинтегрируемой аналитически.

Можно использовать связь (26), чтобы исключить одну переменную:

$$\dot{\varphi} = \frac{(R-r)\dot{\theta} - \dot{x}}{r} \quad (32)$$

Таким образом, $\varphi(t) = \int \dot{\varphi} dt$, но в лагранжиане появится φ , причем не только через производную, а через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, а это возможно означает, что связь (26) не голономна. Проверим это: если проинтегрировать (26), то:

$$(R - r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = \dot{x} + \text{const} \quad (33)$$

Если выбрать начальные условия: при $t=0, x=0, \theta = 0, \varphi = 0$, то $\text{const} = 0$.

Тогда:

$$(R - r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = \dot{x} \quad (34)$$

Это указывает на голономность связи. Теперь можно выразить все переменные через, например, θ и φ , или выбрать одну обобщенную координату.

Потенциальная энергия груза $U = mgy_m$, где

$$y_m = -(R - r) \cos\theta + L\sin\varphi \quad (35)$$

Из связи (26): достаточно двух координат: θ и φ , находим лагранжиан. После подстановки $x = (R - r)\theta - r\varphi$ получаем:

$$\dot{x} = (R - r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi} \quad (36)$$

$$\vec{r}_c = \dot{x}\hat{i} + (R - r)(\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j}) \quad (37)$$

$$\vec{r}_m = \vec{r}_c + L(\cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}) \quad (38)$$

Скорость груза:

$$\vec{v}_m = \frac{d}{dt}\vec{r}_m = \dot{x}\hat{i} + (R - r)\dot{\theta}(\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}) + L\dot{\varphi}(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}) \quad (39)$$

Тогда кинетическая энергия груза:

$$T_m = \frac{1}{2}M(v_{mx}^2 + v_{my}^2) \quad (40)$$

Итоговое уравнение движения (в виде системы) в общем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (42)$$

$$\text{где } L = \frac{1}{2}(1 + \beta)M[(R - r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2}M(v_{mx}^2 + v_{my}^2) + mg(R - r)\cos\theta - mgL\sin\varphi \quad (43)$$

Получим уравнения движения в матричной форме (в виде системы второго порядка). Для практического моделирования сделаем следующие разумные упрощения, чтобы уравнения стали реализуемыми, но сохранили физическую суть: Принятые допущения: колесо — тонкостенный обруч $I_{ж} = MR^2$, масса шестерни пренебрежимо мала — учитываем только груз массой m . Введем обобщённые координаты:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Для систем с лагранжианом квадратичным по скоростям можно записать:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (46)$$

где:

- \mathbf{M} — матрица инерции,
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ — вектор центробежных и кориолисовых сил,
- \mathbf{G} — градиент потенциальной энергии.

Вычислим T в виде $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$

После раскрытия $T = T_{ж} + T_m$, получим (после упрощения):

$$T = \frac{1}{2}A_{11}\dot{\theta}^2 + A_{12}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}A_{22}\dot{\varphi}^2 + \dots \quad (47)$$

где члены с $\cos\theta$, $\sin\varphi$ входят в A_{ij} .

На самом деле, коэффициенты зависят от θ , φ , потому что \dot{X} , \dot{Y} содержат $\cos\theta$ и $\sin\varphi$.

Для ясности запишем матрицу инерции подробно:

$$\mathbf{M}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} M_{\theta\theta} & M_{\theta\varphi} \\ M_{\varphi\theta} & M_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (48)$$

где:

$$M_{\theta\theta} = 2M(R - r)^2 + m(R - r)^2[(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2M(R - r)^2[M + m(1 + \cos\theta)] \quad (49)$$

$$M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} = -2Mr(R - r) - m(R - r)[r(1 + \cos\theta) + L\sin\varphi(1 + \cos\theta) - L\cos\varphi\sin\theta] \quad (50)$$

$$M_{\varphi\varphi} = 2Mr^2 + m[r^2 + L^2 + 2rL\sin\varphi] \quad (51)$$

Эти выражения получены после раскрытия $\dot{X}^2 + \dot{Y}^2$ и группировки по $\dot{\theta}^2$, $\dot{\theta}\dot{\varphi}$, $\dot{\varphi}^2$

Вектор гравитации

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} U \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg(R - r)\sin\theta \\ mgL\cos\varphi \end{bmatrix} \quad (52)$$

Вектор кориолиса/центробежных сил можно вычислить как:

$$C_i = \sum_{j,k} \Gamma_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (53)$$

где
$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (54)$$

Но в численном коде проще использовать:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (55)$$

Одна из возможных траекторий движения после интегрирования представлена в соответствии с рисунком 4 и рисунком 5

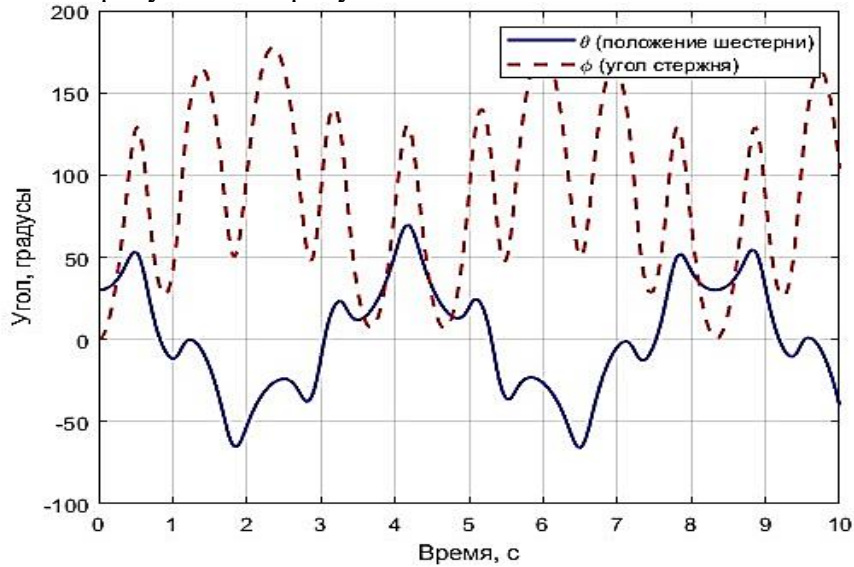


Рисунок 4 – Углы

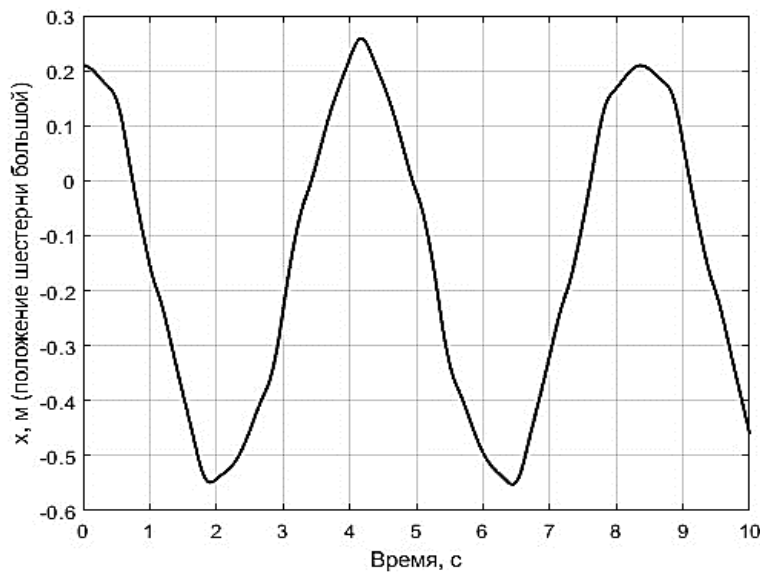


Рисунок 5 – Перемещение колеса по земле

Даже в отсутствие потерь энергии, система, имеющая две нелинейно связанные степени свободы, в общем случае демонстрирует непериодическое (квазипериодическое) движение.

Стабилизация вертикального положения двигателем

Добавляем двигатель, которой держит вертикально L . Стержень теперь не приварен к шестерне. В самой шестерне есть двигатель и на его оси стержень, который надо держать вертикально: стержень и шестерня соединены через управляемый привод (мотор). Тогда: φ — угол поворота малой шестерни, ψ — угол отклонения стержня с грузом (относительно инерциальной системы), между ними — двигатель, который может создавать управляющий момент $\tau(t)$.

Это задача стабилизации неустойчивого равновесия (перевёрнутого маятника), и покажем, что она разрешима, если: есть двигатель, способный прикладывать нужный момент, есть датчики (измерение $(\theta \ \varphi \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi})$ и т. д.), реализован закон управления (например, ПД-регулятор). Система без управления нестабильна [15-19].

Фактически, двигатель даёт внутреннюю степень свободы управления, которой достаточно для стабилизации.

Управление может иметь разные варианты. Опишем вариант с ПИД регулятором.

Если считать, что двигатель прикладывает момент $\tau(t)$ к стержню, то уравнение для ψ будет:

$$I_{eff}\ddot{\psi} - mgL\cos\psi = \tau \quad (56)$$

где I_{eff} — эффективный момент инерции (включая связь с движением желоба).

Для малых отклонений от вертикали вверх: $\psi = \frac{\pi}{2} + \delta$, $\cos\psi \approx -\delta$, тогда:

$$I_{eff}\ddot{\delta} + mgL\delta = \tau \quad (57)$$

Это неустойчивая система (знак «+»), но с управлением $\tau = -k_p\delta - k_d\dot{\delta}$ получаем:

$$I_{eff}\ddot{\delta} + k_d\dot{\delta} + (k_p - mgL)\delta = \tau \quad (58)$$

Если выбрать $k_p > mgL$, система становится асимптотически устойчивой.

Положение груза:

$$\begin{cases} X = x + (R - r)\sin\theta + L\cos\psi \\ Y = -(R - r)\cos\theta + L\sin\psi \end{cases} \quad (59)$$

Скорость груза:

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} + (R - r)\dot{\theta}\cos\theta - L\dot{\psi}\sin\psi \\ \dot{Y} = (R - r)\dot{\theta}\sin\theta + L\dot{\psi}\cos\psi \end{cases} \quad (60)$$

Колесо $T_{ж} = M\dot{x}^2$, где $\dot{x} = (R - r)\dot{\theta} - r\dot{\varphi}$.

Пусть масса и инерция шестерни пренебрежимо малы. Тогда уравнение для φ исчезает, связь $x = (R - r)\theta - r\varphi$ позволяет выразить φ , но если шестерня невесома, то момент τ напрямую управляет стержнем, а реакция передаётся через зубчатое зацепление на колесо. В этом приближении система имеет две обобщённые координаты: θ и ψ , и один управляющий вход τ . Это корректно, если двигатель установлен на оси шестерни, и шестерня — просто передаточный элемент.

После вывода (аналогично предыдущему, но теперь ψ вместо φ

Лагранжиан:

$$L = M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - U \quad (61)$$

Уравнения Лагранжа с обобщённой силой: для θ $Q_\theta = 0$ (нет активного управления), для ψ $Q_\psi = \tau$ (управляющий момент). После вычислений получаем систему:

$$\mathbf{M}(\theta, \psi) \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{h}(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} + \mathbf{G}(\theta, \psi) \quad (62)$$

где

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -mg(R-r)\sin\theta \\ mgL\cos\psi \end{bmatrix} \quad (63)$$

Линеаризация около точки $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 0$. Пусть: $\psi = \frac{\pi}{2} + \delta$, $\delta \ll 1$ — отклонение от вертикали вверх, $\theta \ll 1$, $\dot{\theta} \ll 1$, $\dot{\delta} \ll 1$. Тогда: $\cos\psi \approx -\delta$, $\sin\psi \approx 1$, $\sin\theta \approx 0$, $\cos\theta \approx 1$

После линеаризации (подробности опускаем для краткости) получаем [15-19]:

$$A_{11}\ddot{\theta} + A_{12}\ddot{\delta} = -mg(R-r)\theta \quad (64)$$

$$A_{21}\ddot{\theta} + A_{22}\ddot{\delta} = -mgL\delta + \tau \quad (65)$$

где коэффициенты A_{ij} — константы (зависят от M , m , R , r , L).

Это линейная система вида: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{B}\tau$ из которой получаем ПИД-регулятор для: $\delta \rightarrow 0$, $\dot{\delta} \rightarrow 0$ с законом управления:

$$\tau = k_p \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + k_d \cdot (0 - \dot{\psi}) = k_p \cdot \delta + k_d \cdot \dot{\delta} \quad (66)$$

Заключение

Проведённый в работе теоретический анализ позволил построить согласованную математическую модель прыгающего колёсного робота, основанную на методах классической механики и лагранжевого формализма. Сформулированные уравнения движения учитывают внутреннюю динамику механизма, включающую взаимодействие колеса, шестерни и платформы с полезной нагрузкой, а также влияние кинематических связей и возможных диссипативных факторов. Это обеспечивает целостное описание динамики системы и позволяет исследовать её поведение в широком диапазоне параметров.

Показано, что даже при введении разумных упрощающих предположений динамическая система сохраняет выраженную нелинейность. Наличие нескольких взаимосвязанных степеней свободы приводит к возникновению сложных режимов движения, включая квазипериодические траектории и чувствительность к начальным условиям. Данный результат подтверждает ограниченность чисто аналитических методов и обосновывает необходимость применения численного моделирования для анализа динамики, оценки устойчивости и подбора параметров конструкции.

Отдельное внимание уделено задаче стабилизации вертикального положения платформы с использованием управляемого привода. Проведённая линеаризация уравнений движения в окрестности неустойчивого равновесия показала принципиальную реализуемость стабилизации с помощью стандартных законов управления, в частности ПИД-регулятора. Это свидетельствует о том, что предложенная модель пригодна не только для анализа свободной динамики, но и для синтеза систем управления, ориентированных на практическую реализацию робота.

С инженерной точки зрения полученные зависимости позволяют сформировать базу для проектирования прыгающих колёсных роботов. Они могут быть использованы при выборе параметров привода, определении геометрических характеристик механизма, оценке энергетических затрат и разработке алгоритмов управления

движением и прыжками. Важно, что структура модели допускает дальнейшее усложнение без изменения её методологической основы, что делает её удобным инструментом для поэтапного уточнения.

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением модели и её экспериментальной проверкой. В частности, целесообразно учесть более реалистичные физические факторы, такие как трение в узлах, ударные взаимодействия при контакте с поверхностью, упругие деформации элементов конструкции и ограничения приводов. Кроме того, актуальной задачей является разработка оптимальных стратегий управления, обеспечивающих энергоэффективные и устойчивые режимы движения, а также исследование возможностей адаптивного и робастного управления.

Таким образом, разработанная математическая модель и полученные теоретические результаты формируют основу для дальнейших исследований и инженерной реализации прыгающих колёсных робототехнических систем, объединяя задачи динамического анализа, численного моделирования и синтеза управления в единую методическую схему.

Список литературы

1. Го Т., Лю Дж., Лян Х., Чжан Ю., Чен В., Ся С., Ван М., Ван З. Design and dynamic analysis of jumping wheel legged robot in complex terrain environment. *Front. Neurobot.* 2022. V.16. Article 1066714. doi:10.3389/fnbot.2022.1066714.
2. Ву К. Research on motion control method of biped wheeled robot on complex terrain environment: диссертация магистра. Цзинань, Шаньдунский ун-т, 2020. doi:10.27272/d.cnki.gshdu.2020.005315.
3. Синь Ю. Х., Ли Ю. В., Чай Х., Жунг Х. W., Ли Б. Research on jumping method of two wheeled leg robot based on whole body torque control // *Acta Autom. Sinica.* 2020. Т.46. С.1–9. doi:10.16383/j.aas.c200486.
4. Чжуан Ю., Сюй Ю., Хуан Б., Чао М., Ши Г., Ян Х. Height control and optimal torque planning for jumping with wheeled bipedal robots // *Proc. of 6th IEEE Int. Conf. on Adv. Robotics and Mechatronics (ICARM).* 2021. P.477–482. doi:10.1109/ICARM52023.2021.9536196.
5. Гао З. W., Дай Х. W., Чжэн З. Д. Optimal energy consumption trajectory planning for mobile robot based on motion control and frequency domain analysis // *Acta Autom. Sinica.* 2020. Т.46. С.934–945. doi:10.16383/j.aas.c180399.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. 2-е изд. Москва: ГИ ФМЛ, 1959. 915 с.
7. Adlaj S. An Eloquent Formula for the Perimeter of an Ellipse // *Notices of the AMS.* 2012. №9. P.1094–1099.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.1: Механика. Учеб. пособие. М.: Физматлит, 1988. 216 с.
9. Голдштейн Г. Классическая механика. Москва: Наука, Физматлит, 1975.
10. Иродов И. Е. Механика. Основные законы [электронный ресурс]. 12-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 309 с.
11. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2014.
12. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969.
13. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: ГИ Физ мат лит, 1961. 222 с.
14. Зейферт Г., Трефаль В. Вариационное исчисление в целом. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2000. 160 с.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1–3. Москва: Наука, 1969.
16. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1970.
17. Никулин Е. А. Основы теории автоматического управления: частотные методы анализа и синтеза систем. СПб.: БХВ Петербург, 2004. С.573–574.
18. Ang K. H., Chong G., Li Y. PID control system analysis, design, and technology // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* 2005. V.13, No.4. P.559–576. (journal.omega.su)
19. Quevedo J., Escobet T. Digital control: past present and future of PID control // *Proceedings of the IFAC Workshop*, Eds., Terrassa, Spain, 5_7 Apr. 2000.

References

1. Guo T., Liu J., Liang H., Zhang Y., Chen W., Xia X., Wang M., Wang Z. Design and dynamic analysis of jumping wheel legged robot in complex terrain environment. *Front. Neurorobot.* 2022. Vol. 16. Article 1066714. doi:10.3389/fnbot.2022.1066714.
2. Wu K. Research on motion control method of biped wheeled robot on complex terrain environment: Master's thesis. Jinan, Shandong Univ., 2020. doi:10.27272/d.cnki.gshdu.2020.005315.
3. Xin Y. X., Li Y. B., Chai H., Rong X. W., Li B. Research on jumping method of two wheeled leg robot based on whole body torque control // *Acta Autom. Sinica.* 2020. Vol. 46. P. 1–9. doi:10.16383/j.aas.c200486.
4. Zhuang Y., Xu Y., Huang B., Chao M., Shi G., Yang X. Height control and optimal torque planning for jumping with wheeled bipedal robots // *Proc. of the 6th IEEE Int. Conf. on Adv. Robotics and Mechatronics (ICARM).* 2021. P. 477–482. doi:10.1109/ICARM52023.2021.9536196.
5. Gao Z. W., Dai X. W., Zheng Z. D. Optimal energy consumption trajectory planning for mobile robot based on motion control and frequency domain analysis // *Acta Autom. Sinica.* 2020. Vol. 46. P. 934–945. doi:10.16383/j.aas.c180399.
6. Andronov A. A., Witt A. A., Khaykin S. E. *Theory of Oscillations.* 2nd ed. Moscow: GI FML, 1959. 915 p.
7. Adlaj S. An Eloquent Formula for the Perimeter of an Ellipse // *Notices of the AMS.* 2012. No. 9. P. 1094–1099.
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Theoretical Physics. Vol. 1: Mechanics.* Textbook. Moscow: Fizmatlit, 1988. 216 p.
9. Goldstein G. *Classical Mechanics.* Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1975.
10. Irodov I. E. *Mechanics. Fundamental Laws [electronic resource].* 12th ed. Moscow: BINOM. Knowledge Lab, 2014. 309 p.
11. Arnold V. I. *Ordinary Differential Equations.* Moscow: MCNMO, 2014.
12. Elsgoltz L. E. *Differential Equations and Variational Calculus.* Moscow: Nauka, 1969.
13. Gelfand I. M., Fomin S. V. *Calculus of Variations.* Moscow: GI Phys mat lit, 1961. 222 p.
14. Seifert G., Trefall V. *Calculus of Variations as a Whole.* Izhevsk: Udmurt Univ. Publ. House, 2000. 160 p.
15. Fikhtengoltz G. M. *Course of Differential and Integral Calculus. Vols. 1–3.* Moscow: Nauka, 1969.
16. Pontryagin L. S. *Ordinary Differential Equations.* Moscow: Nauka, 1970.
17. Nikulin E. A. *Fundamentals of Automatic Control Theory: Frequency Methods of System Analysis and Synthesis.* St. Petersburg: BHV Peterburg, 2004. P. 573–574.
18. Ang K. H., Chong G., Li Y. PID control system analysis, design, and technology // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* 2005. Vol. 13, No. 4. P. 559–576. (vestnikggtu.ru)

RESUME

V.M. Zuev D.A. Pervenko

The dynamics of a jumping wheeled robot

The development of mobile robotic systems capable of efficient locomotion over complex terrain and overcoming obstacles by jumping is an important area of modern robotics. Increasing requirements for energy efficiency, stability, and controllability of such systems necessitate the creation of adequate dynamic models that consider the features of their mechanical structure and motion modes.

This paper presents a theoretical analysis of the dynamics of a jumping wheeled robot based on classical mechanics and Lagrangian formalism. The initial model considers a system consisting of a wheel, an internal energy-storage mechanism, and a platform with a payload. The equations of motion are derived considering rolling without slipping, inertial properties of the elements, gravitational forces, and possible dissipative effects. The influence of design parameters on the dynamic characteristics of the system is investigated. In addition, the problem of stabilizing the vertical position of the platform using a controlled actuator is considered, and the feasibility of stabilizing using standard control laws is demonstrated.

The obtained results show that robot dynamics are essentially nonlinear and may include complex motion regimes requiring numerical analysis. The developed mathematical model makes it possible to estimate energy consumption, determine actuator requirements, and apply it to control system synthesis problems.

The proposed approach can serve as a theoretical basis for the design of jumping wheeled robots and for further research aimed at refining the model by incorporating real physical factors and experimental validation of the results obtained.

РЕЗЮМЕ

З. В. Зуев Д. А. Первенко

Динамика прыгающего колесного робота

Разработка мобильных робототехнических систем, способных эффективно перемещаться по сложной местности и преодолевать препятствия за счёт прыжков, является актуальным направлением современной робототехники. Повышенные требования к энергоэффективности, устойчивости и управляемости таких систем обуславливают необходимость построения адекватных динамических моделей, учитывающих особенности их механической структуры и режимов движения.

В работе выполнен теоретический анализ динамики прыгающего колесного робота на основе методов классической механики и лагранжевого формализма. В качестве исходной модели рассматривается система, включающая колесо, внутренний механизм накопления энергии и платформу с полезной нагрузкой. Получены уравнения движения, учитывающие качение без проскальзывания, инерционные свойства элементов, гравитационные силы и возможные диссипативные эффекты. Проведено исследование влияния параметров конструкции на динамические характеристики системы. Дополнительно рассмотрена задача стабилизации вертикального положения платформы с использованием управляемого привода; показана возможность реализации стабилизации с применением стандартных законов управления.

Полученные результаты подтверждают, что динамика робота носит существенно нелинейный характер и может включать сложные режимы движения, требующие численного анализа. Разработанная математическая модель позволяет проводить оценку энергетических затрат, определять требования к параметрам привода и использовать её в задачах синтеза систем управления.

Предложенный подход может быть использован как теоретическая основа для проектирования прыгающих колесных роботов и дальнейших исследований, направленных на уточнение модели с учётом реальных физических факторов и экспериментальную проверку полученных зависимостей.

Зуев Владимир Михайлович - научный сотрудник, ФГБНУ «Институт проблем искусственного интеллекта», 283048, г. Донецк, ул. Артема, д. 118 б, телефон +7 (856) 311-34-24, pda.ipai@mail.ru.

Область научных интересов: динамика и управление мобильными роботами; математическое моделирование; системы автоматического управления; робототехника; искусственный интеллект.

Первенко Дмитрий Александрович – лаборант исследователь, ФГБНУ «Институт проблем искусственного интеллекта», 283048, г. Донецк, ул. Артема, д. 118 б, телефон +7(949) 378-9229, pda.ipai@mail.ru.

Область научных интересов: динамика и управление мобильными роботами; математическое моделирование; системы автоматического управления; робототехника.

Zuev Vladimir Mikhailovich - Researcher, Institute of Artificial Intelligence Problems, Artema St. 118b, Donetsk, 283048, phone +7 (856) 311-34-24, zvm.ipai@mail.ru

Research interests: dynamics and control of mobile robots; mathematical modeling; automatic control systems; robotics, AI.

Dmitry Aleksandrovich Pervenko — Research Laboratory Assistant, Institute of Artificial Intelligence Problems, Artema St. 118b, Donetsk, 283048, phone +7 (949) 378-9229, pda.ipai@mail.ru

Research interests: dynamics and control of mobile robots; mathematical modeling; automatic control systems; robotics.

Статья поступила в редакцию 18.02.2026.