Б

Проблемы искусственного интеллекта. 2026. N 3 (42). С. 71-83
Problems of Artificial Intelligence. 2026;3(42):71-83.
Системный анализ, управление и обработка информации, статистика
Научная статья

УДК 621; 534.014.4 **DOI** 10.24412/2413-7383-2026-3-42-71-83

В. Н. Беловодский[1], С. Л. Букин[2]
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Донецкий национальный технический университет»
283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Артёма, 58
[1]v.belovodskiy@gmail.com; ORCID 0000-0001-8345-7492;
[2]s.bukin08@gmail.com; ORCID 0000-0002-2814-7026.

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ, ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО И СУХОГО ТРЕНИЯ

V. N. Belovodskiy, S. L. Bukin
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Donetsk National Technical University"
283001, Donetsk People's Republic, Donetsk, st. Artyoma, 58
[1]v.belovodskiy@gmail.com; ORCID 0000-0001-8345-7492;
[2]s.bukin08@gmail.com; ORCID 0000-0002-2814-7026.

STATIONARY REGIMES OF MOTION OF A MATERIAL PARTICLE ON A HORIZONTAL PLANE THAT PERFORMS POLYHARMONIC OSCILLATIONS IN THE PRESENCE OF VISCOUS AND DRY FRICTION

В статье выполнен анализ работ, посвящённых изучению перемещений материальной частицы на вибрирующей поверхности, сформулирована цель исследования и рассмотрена математическая модель, описывающая движение частицы на горизонтальной плоскости, совершающей однонаправленные колебания при наличии вязкого сопротивления и сухого трения. Предложен численный алгоритм определения средней скорости перемещения материальной частицы на такой плоскости, осуществляющей произвольные полигармонические колебания. Выполнено моделирование процесса транспортирования, проведена серия вычислительных экспериментов, вскрыта роль каждого из типов сопротивления.
Ключевые слова: вибрационная транспортирующая машина; полигармонические колебания; материальная частица; сухое и вязкое трение.

The article analyzes the papers of the motion of a material particle on a vibrating surface, formulates the research goal, and studies a mathematical model describing the motion of a particle on a horizontal plane that perform unidirectional oscillations in the presence of viscous resistance and dry friction. A numerical algorithm is proposed for determining the average velocity of a material particle on such a plane that performs arbitrary polyharmonic oscillations. The transportation process was simulated, a series of computational experiments was conducted, and the role of each type of resistance was revealed.
Key words: vibrating conveying machine; polyharmonic oscillations; material particle; dry and viscous friction

Введение

Вибрационные транспортно-технологические машины (ВТТМ) широко используются в различных отраслях промышленности, в частности, целый ряд процессов переработки полезных ископаемых базируется на вибрационных технологиях. В последние годы получены положительные результаты по интенсификации процессов разделения по плотности, крупности и другим физико-механическим свойствам в вибрационном поле полигармонических колебаний [1].

Важнейшим количественным показателем работы вибромашины является её производительность, значение которой во многом определяет скорость движения материала по рабочему органу (РО) ВТТМ. По этой причине уже с самого начала активного применения ВТТМ в промышленности изучению движения материала по рабочему органу машины уделялось большое внимание, как в нашей стране, так и за рубежом. Это особенно важно, учитывая, что вибрационное воздействие призвано обеспечить такое динамическое состояние обрабатываемой среды, которое способствует интенсификации и качественному протеканию технологического процесса при одновременном снижении энергосиловых параметров [2].

Начиная с середины прошлого века распространение получили направления представления технологической нагрузки в виде детерминистских, стохастических, феноменологических и иных моделей.

Детерминистские модели, рассматривающие условия перемещения отдельных зёрен (частиц) материала по РО ВТТМ, позволяют исследовать влияние отдельных факторов (например, оценить влияние сил, вызывающих движение отдельных зёрен), на результат процесса виброперемещения. Эти цели достигаются достаточно простыми и доступными методами. Необходимо отметить, что и в настоящее время модель движения материала в виде отдельной материальной частицы активно применяется при описании вибрационных процессов, т.к. позволяет выявить физический механизм вибрационного перемещения даже слоя материала при определённых условиях движения [2].

Теория вибрационного транспортирования применительно к материальной частице материала, получившей название классической, была создана трудом многих исследователей [3-22], в частности: Левенсона Л. Б., Берга В. А., Терскова Г. Д., Блехмана И. И., Франчука В. П., Крюкова Б. И., Лавендела Э. Э, Повидайло В. А., Пановко Я. Г., Потураева В. Н., Червоненко А. Г., Преснякова В. К., Гончаревича И. Ф., Пановко Г. Я., Василенко П. М., Заики П. М., Федоренко И. Я. и других. В 1964 году решение многих задач процесса вибротранспортирования получили своё обобщение в фундаментальной работе Блехмана И. И. и Джанелидзе Г. Ю. [3]. Большинство работ отечественных и зарубежных учёных рассматривали процесс вибрационного перемещения материальной частицы при гармонических колебаниях опорной поверхности. Установлено [3], что в случае симметрии движущих сил и сил сопротивления относительному движению отсутствует направленное в среднем перемещение частицы и в этом случае частица совершает симметричные колебания относительно поверхности. А безотрывное движение частицы материала по горизонтальному РО ВТТМ может осуществляться за счёт различных абсолютных величин положительных и отрицательных значений ускорения, т.е. асимметричных законов колебаний РО [3], в частности бигармоническому. Рассмотрению различных аспектов вибрационного транспортирования материальной частицы в поле бигармонических колебаний, посвящены работы ряда советских, российских и зарубежных учёных [2-16]. Следует отметить,

что описания движения материальной частицы в поличастотном поле колебаний, несмотря на формальное сходство со случаем с моногармоническими колебаниями РО ВТТМ, имеют существенные особенности [6]: характерные этапы движения не имеют постоянных, чётких границ, существенно возрастают трудности отыскания условий существования и устойчивости этих режимов.

Негармонический закон движения РО ВТТМ обеспечивается выбором соответствующего способа возбуждения, конструкцией привода и характеристиками упругих связей [1-20].

Скорость вибрационной транспортировки – один из основных технологических параметров, который необходимо определить при проектировании и расчёте вибрационных транспортных и технологических машин [3]. Теория вибрационного перемещения обычно позволяет удовлетворительно описать скорость перемещения отдельных тел или слоя сыпучего материала на вибрирующей поверхности. Выполненный обзор научно-технической литературы по рассматриваемой теме позволяет сделать вывод, что основным методом исследований был и в настоящее время остаётся метод поэтапного интегрирования при использовании аналитического и графического вариантов [3-9], [11-13]. К сожалению, этот метод имеет ряд недостатков, основным из которых является высокая трудоёмкость выполнения всех этапов процесса исследования. Относительно недавно (в 2020 году) И.И. Блехман рекомендовал исследователям рассматривать простые «приблизительные» модели и использовать аппроксимирующие формулы для оценки скорости вибрационной транспортировки в режимах, характерных для большинства традиционных транспортных и технологических машин, а также для ряда новых машин с более интенсивными вибрационными воздействиями [21].

Таким образом, задача поиска новых методов оценки скорости вибротранспортирования для упрощения моделирования динамических систем остаётся достаточно актуальной.

Существует ещё одна важная, на наш взгляд, задача теории виброперемещения материальных тел – изучение влияния физико-механических свойств транспортируемого материала и технологических особенностей работы ВТТМ на результаты процесса транспортирования. Важное место в исследовании таких задач занимают методы учёта сил сопротивления движению материала по колеблющейся горизонтальной поверхности на скорость движения материала по РО ВТТМ.

Внешнее трение обычно представляют в виде двух основных составляющих – вязкого и сухого трения. Вязкое трение характеризуется монотонным увеличением силы трения по мере увеличения скорости скольжения, причём эта зависимость может иметь линейный или нелинейный характер. При вязком трении относительное движение может возникать при сколь угодно малой величине внешних сил. В системах с сухим трением относительное движение может возникать только тогда, когда равнодействующая внешних сил достигает некоторого конечного значения, равного предельной силе трения покоя. В противном случае система будет находиться в состоянии относительного покоя. Для описания сил сухого трения обычно используют гипотезу Амонтона-Кулона, согласно которой сила трения пропорциональна давлению одного тела на другое.

В большинстве работ авторы изучают процесс виброперемещения частицы при наличии сопротивления типа сухого трения. Исследованиям динамики материальной частицы при наличии вязкого или комбинированного (сухого и вязкого) трения, посвящено, к сожалению, не так много работ, в частности, [14-16]. Однако и эти работы выявили возможность использования вибрации во многих технологических

процессах с эффективным и, зачастую, неожиданным результатом. Теория и методы расчёта ВТТМ и процессов при некулоновом трении, а также исследование эффективных коэффициентов трения при вибрации, развитые Г.Я. Пановко [10], представляют существенный интерес для дальнейшего развития и уточнения теории вибросепараторов и других вибрационных машин.

Настоящая работа является продолжением работ, выполняемых авторами в течение нескольких лет, направленных на изучение новых перспективных динамических схем ВТТМ с полигармоническими колебаниями РО и перемещению материала в вибрационном поле таких вибромашин [22], [23].

Цель исследования − описание процесса виброперемещения материальной частицы в поле полигармонических колебаний ВТТМ с учётом комбинированного (сухого и вязкого) сопротивления среды и изучение особенностей её движения без подбрасывания на РО горизонтальной вибромашины.

Расчётная схема. Математическая модель

Рассмотрим движение груза произвольной формы в виде материальной точки (частицы) по вибрирующему горизонтальному плоскому РО ВТТМ (в соответствии с рисунком 1) вдоль неподвижной горизонтальной оси *Ox* как сумму переносного (совместно с рабочей поверхностью) и относительного (относительно поверхности РО). Считаем, что движение частицы 1 по рабочей поверхности вибромашины происходит без подбрасывания, а РО 2 совершает горизонтальные полигармонические колебания по закону

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin\left(k\omega t + \varphi_k\right).$$

В соответствии с рисунком 1 показана расчётная схема модели.

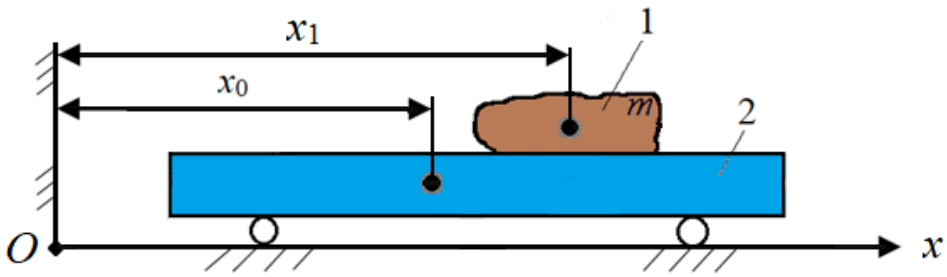


Рисунок 1 − Расчётная схема транспортирования груза 1 по РО 2

Абсолютные перемещения частицы при наличии вязкого сопротивления и сухого трения описывается одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{x} = -bres\left(\dot{x} - \dot{x}_0\right) - fres \cdot mg \cdot sign\left(\dot{x} - \dot{x}_0\right)$$

или системой двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -br \cdot \left(x_2 - \dot{x}_0\right) - fr \cdot sign\left(x_2 - \dot{x}_0\right), \end{cases} \quad (1)$$

где $x_1=x$ − перемещение частицы вдоль неподвижной горизонтальной оси; $br=bres/m$; $fr=fres \cdot g$.

Алгоритм определения средней скорости частицы

Подход к определению средней скорости заключается в следующем.

Рассматриваем второе из уравнений системы (1). Для установившегося режима, интегрируя обе его части на промежутке равном периоду колебаний T вибрирующей поверхности, получим

$$\int_0^T \dot{x}_2 dt = -\int_0^T \left[br \cdot \left(x_2 - \dot{x}_0 \right) + fr \cdot sign\left(x_2 - \dot{x}_0 \right) \right] dt,$$

$$x_2(T) - x_2(0) = -\int_0^T \left[br \cdot \left(x_2 - \dot{x}_0 \right) + fr \cdot sign\left(x_2 - \dot{x}_0 \right) \right] dt,$$

или

$$F(x_2) = \int_0^T \left[br \cdot \left(x_2 - \dot{x}_0 \right) + fr \cdot sign\left(x_2 - \dot{x}_0 \right) \right] dt = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) используем для нахождения начального приближения $x_{2,st}$=const средней скорости установившегося режима перемещений материальной частицы $x_{2,av}$. А именно, рассмотрим уравнение

$$F\left(x_{2,st} \right) = \int_0^T \left[br \cdot \left(x_{2,st} - \dot{x}_0 \right) + fr \cdot sign\left(x_{2,st} - \dot{x}_0 \right) \right] dt = 0, \quad (3)$$

и решим его одним из известных методов. После этого, уточним полученное значение, численно решив второе из уравнений (1) с начальным условием $x_2(0)=x_{2,st}$ и найдём среднее интегральное значение

$$x_{2,av} = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} x_2(t)\, dt. \quad (4)$$

Выражение (4) и даёт искомое приближенное значение средней скорости транспортирования. Его точность будет определяться точностью нахождения $x_{2,st}$, шагом численного интегрирования второго уравнения (1) и числом периодов n, используемых при нахождении среднего.

Значение параметра n устанавливается экспериментально, так как из-за неточного установления начальной фазы, возможен краткий переходной процесс. Однако опыт показывает, что хватает нескольких периодов интегрирования для определения средней скорости с достаточной для практики точности. В приводимых ниже расчётах было принято значение n=20.

Остановимся на порядке решения уравнения (3). В работе использован метод половинного деления − один из простейших методов решения нелинейных уравнений [24]. Этот метод основан на теореме Больцано-Коши [25], которая утверждает, что непрерывная функция, принимающая на концах замкнутого промежутка значения различных знаков, обращается в ноль на этом отрезке. Данный факт и определяет сущность изложенного ниже алгоритма. Концептуально он заключается в следующем.

Пусть задан закон движения $x_0(t)$ периода T вибрирующей поверхности. Тогда:

1. Находим a=min $\dot{x}_0(t)$, b=max $\dot{x}_0(t)$, предполагая, что $t\in[0,T]$. Учтём, что средняя скорость перемещения частицы находится в промежутке $x_{2,st}\in[a,b]$. Действительно, если $x_2(t)<a$, то $x_2-\dot{x}_0(t)<0$ и, в силу уравнения (1), скорость частицы монотонно увеличивается. В противном случае, при $x_2(t)>b$ и, следовательно, $x_2-\dot{x}_0(t)>0$ − монотонно уменьшается. Поэтому корень уравнения (3) расположен в промежутке $[a,b]$.

2. Определяем значения функции $F(x_{2,st})$ на концах промежутка $[a,b]$. И, далее, реализуем метода половинного деления. А именно,

− берём значение $c=(a+b)/2$ − середину рассматриваемого интервала;

− определяем $F(c)$;

− если $F(a)\cdot F(c)<0$, то полагаем $b=c$, если же $F(c)\cdot F(b)<0$, то принимаем $a=c$.

В результате выполнения этого шага зона поиска корня уравнения (3) уменьшается в два раза.

Далее, на следующем шаге берём середину $c=(a+b)/2$ нового полученного интервала, определяем $F(c)$, повторяем указанные выше действия и выбираем из двух очередных интервальных половинок ту, на концах которой функция F принимает значения различных знаков. Так поступаем до тех пор, пока величина очередного промежутка $[a,b]$ не превысит удвоенную заданную погрешность решения уравнения (3), т.е. $|b-a|\le 2\varepsilon$. Взяв, теперь, в качестве $x_{2,st}=c=(a+b)/2$, мы получим определённую с точностью ε скорость частицы, начиная с которой, по нашим представлениям, и происходит её стабилизация.

3. Проинтегрировав, теперь, на промежутке $[0, nT]$ решение уравнения (1) с начальным условием $x_2(0)=x_{2,st}$, используя (4), мы находим среднюю интегральную скорость движения частицы по горизонтальной поверхности.

В соответствии с рисунком 2, приводится иллюстрация функционирования описанного алгоритма для произвольно выбранного закона изменения скорости вибрирующей поверхности

$$\dot{x}_0(t) = 8\sin t + 4\sin(2t-\pi/6) + 2\sin(4t-\pi/3) + \sin(8t-\pi/2),$$

для определённости, значения коэффициентов сопротивлений были приняты br=0.05, fr=0.30. На нем показан график скорости рабочей поверхности $\dot{x}_0(t)$ (чёрная линия), стабилизационная скорость частицы $x_{2,st}$ (синяя линия), фактическая её скорость $x_2(t)$ (красная линия) и, наконец, установившаяся средняя скорость $x_{2,av}$ (зелёная линия).

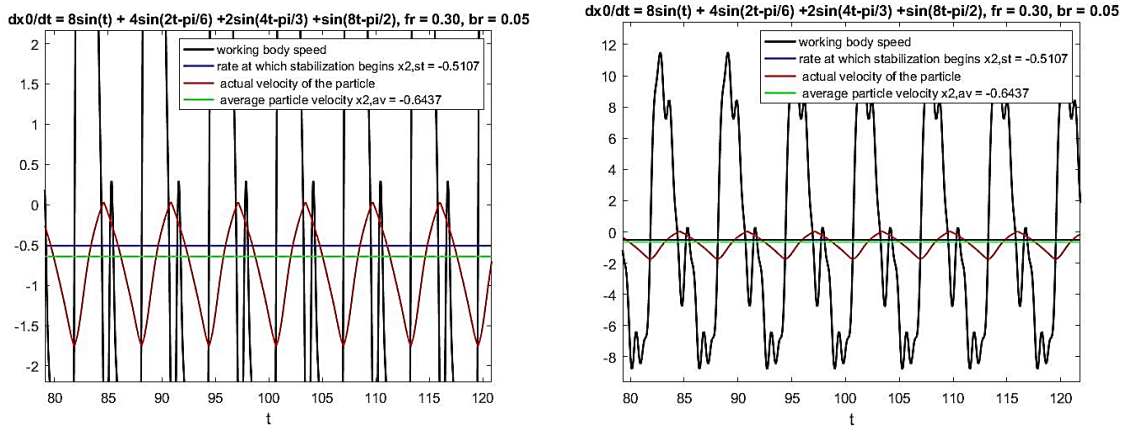


Рисунок 2 − Иллюстрация к алгоритму расчёта, представленная в различных масштабах

При реализации алгоритма здесь и ниже для вычисления интегралов использовался метод прямоугольников, а для решения дифференциального уравнения (1) − явный метод Эйлера. В обоих случаях шаг интегрирования принимался равным h=0.01. Точность определения $x_{2,st}$, т.е. решения уравнения (3), также задавалась равной εps=0.01. При этих параметрах алгоритма значение скорости частицы, по достижении которой и происходит стабилизация её движения, в данном случае составила $x_{2,st}$=−0.5107, а её средняя скорость $x_{2,av}$=−0.6437.

Представленные результаты, на наш взгляд, демонстрируют справедливость принятых в алгоритме положений и его работоспособность.

Влияние сопротивлений на скорость транспортирования

Опишем влияние рассматриваемых типов сопротивления и их комбинации на перемещение частицы. Для проведения расчётов примем закон изменения скорости рабочей поверхности

$$\dot{x}_0(t) = \sin t - 0.5\lambda \sin(2t + \varepsilon),$$

где λ=1, ε= -π/3.

Согласно [9], данный закон является оптимальным с точки зрения максимальной скорости транспортирования при наличии в системе только сухого трения.

Эксперимент 1. Влияние силы сухого трения на среднюю скорость перемещения частицы при отсутствии вязкого сопротивления, *br*=0.0, в соответствии с рисунком 3.

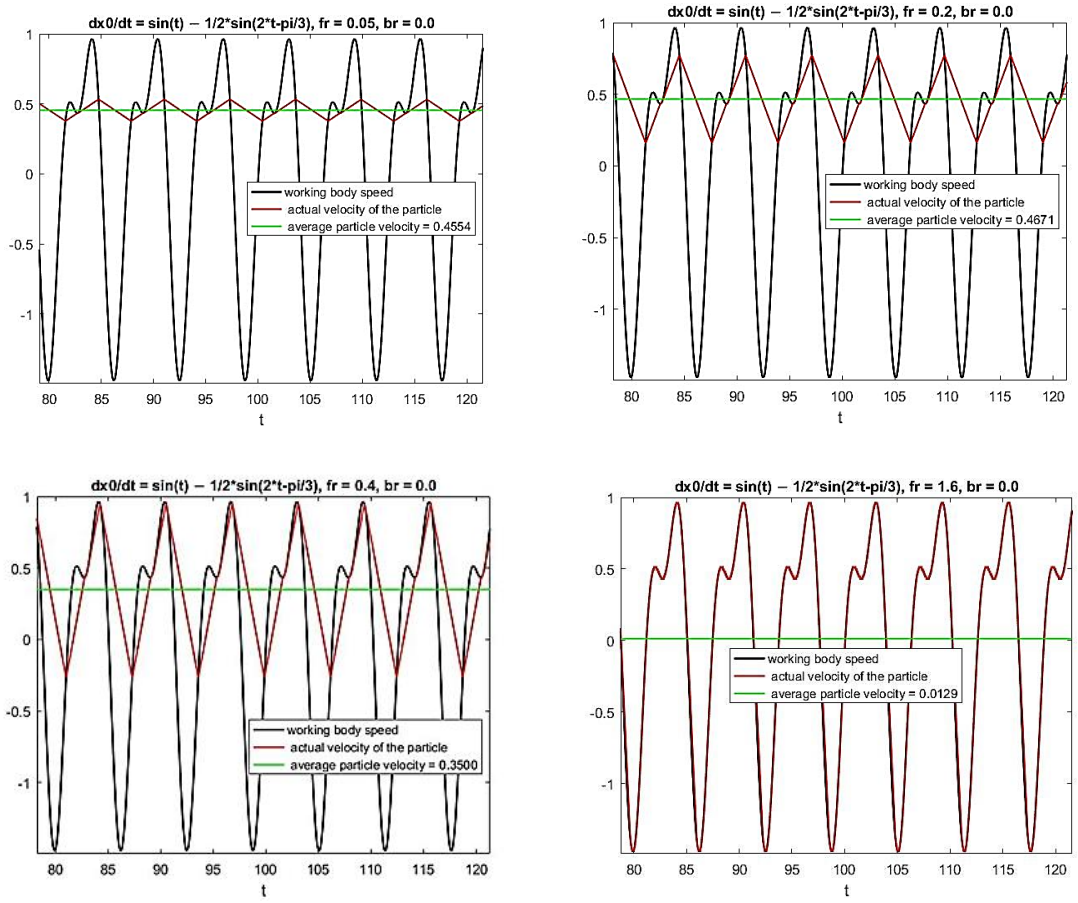


Рисунок 3 − Иллюстрации к изменению средней скорости частицы при увеличении силы сухого трения

Представленные диаграммы иллюстрируют немонотонную зависимость средней скорости перемещения частицы от величины сухого трения. Так, с увеличением коэффициента *fr* средняя скорость перемещения частицы первоначально возрастает, достигает некоторого экстремума, а затем, при дальнейшем его увеличении, убывает. И при значении *fr*=1.6 абсолютная скорость частицы, практически, совпадает со скоростью вибраций основания, что сопровождается увеличением размахов стационарных колебаний частицы и её направленные перемещения прекращаются. Эти заключения совпадают с выводами, содержащимися в монографии [3].

Эксперимент 2. Влияние вязкого сопротивления на среднюю скорость, в соответствии с рисунком 4.

Возьмём значение коэффициента сухого трения *fr*=0.2, ему соответствует близкая к максимальной скорость транспортирования, и начнём постепенно повышать уровень вязкого сопротивления. Отмеченные тенденции: с увеличением вязкого сопротивления средняя скорость перемещения частицы уменьшается, а размахи колебаний увеличиваются. Диаграммы иллюстрируют, что вязкое сопротивление является фактором, снижающим скорость транспортирования и, в конечном счёте, может его остановить (*br*=1.6).

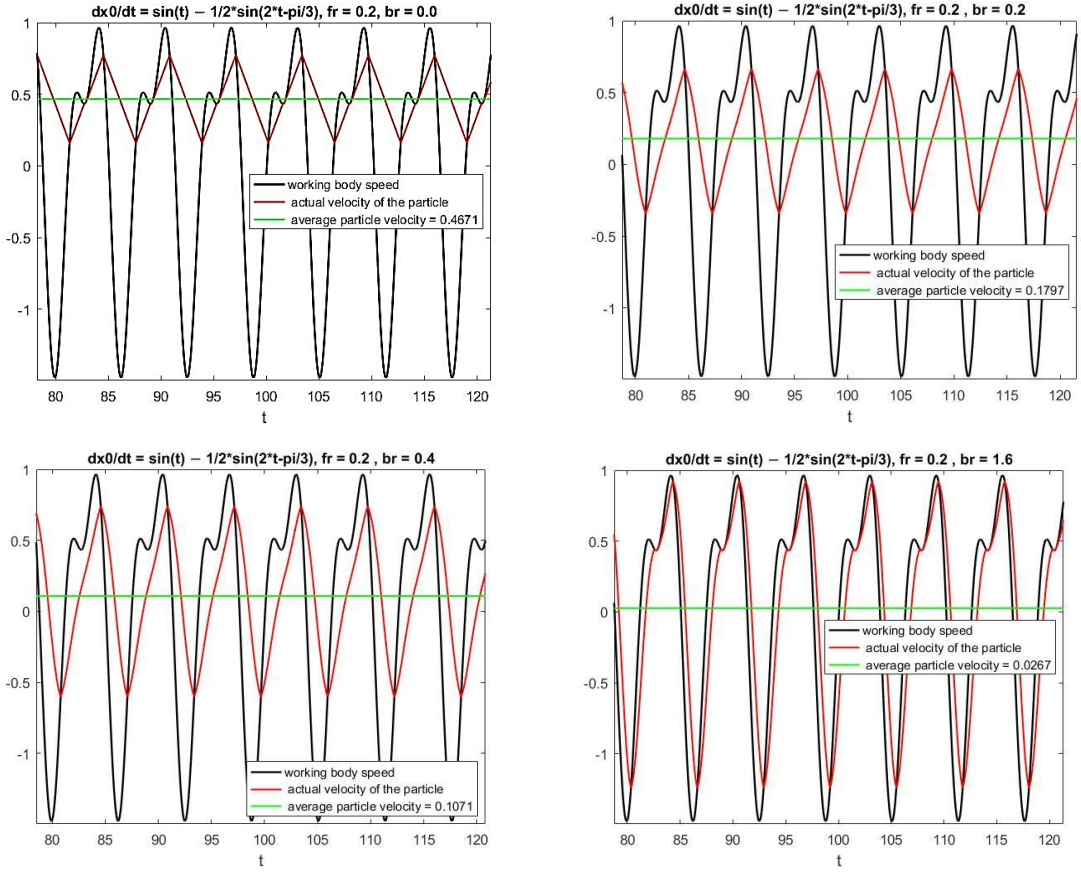


Рисунок 4 − Влияние вязкого сопротивления на скорость перемещения

Эксперимент 3. В модели присутствует только вязкое сопротивление, сухое трение отсутствует, т.е. *fr*=0.0, в соответствии с рисунком 5. Отмеченные тенденции: средняя скорость равна нулю и направленные перемещения частицы отсутствуют.

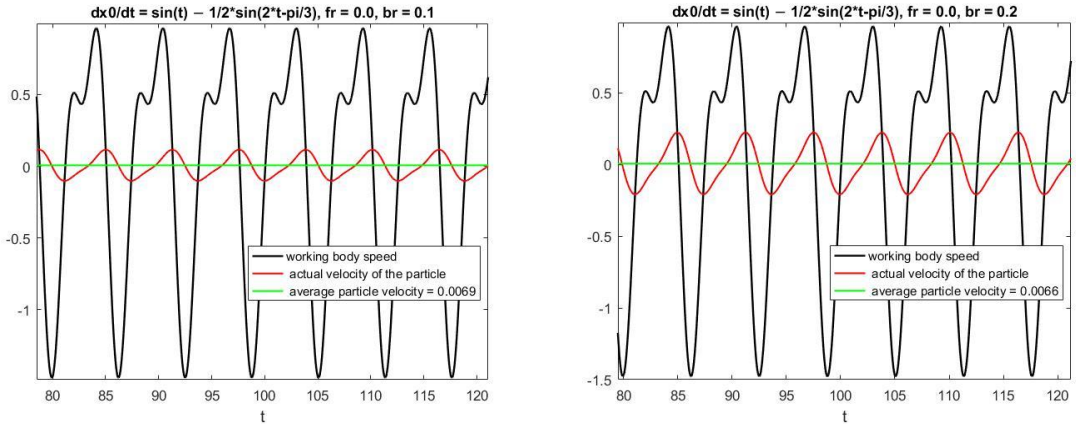


Рисунок 5 − Движение частицы при отсутствии сухого трения

Данное явление объяснимо и аналитически, так как в этом случае рассматриваемое уравнение становится линейным дифференциальным уравнением с периодической правой частью, его решение имеет периодический характер и среднее интегральное его значение равно нулю. Действительно, в этом случае второе из уравнений (1) принимает вид

$$\dot{x}_2 + br \cdot x_2 = br \cdot \dot{x}_0$$

или

$$\dot{x}_2 + br \cdot x_2 = br \cdot \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin\left(2t - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

и, согласно методу неопределённых коэффициентов, его решение является периодическим.

Таким образом, эксперименты подтверждают известный факт, что за абсолютные перемещения частицы ответственна сила сухого трения. При его отсутствии направленное перемещение частицы на горизонтальной плоскости невозможно.

Заключение

Основные закономерности вибрационного перемещения были изучены на простых моделях динамического поведения единичной материальной частицы на вибрирующей шероховатой горизонтальной поверхности. Данная статья является продолжением работ авторов [22], [23] по изучению динамики вибрационных машин с возбуждением полигармонических колебаний РО и его взаимодействию с обрабатываемым материалом.

В работе описан численный алгоритм определения средней скорости перемещения частицы по горизонтальной плоскости, совершающей полигармонические колебания при наличии вязкого сопротивления и сухого трения, и представлены иллюстрации, поясняющие его функционирование. Данный алгоритм позволяет, по существу, устранить из рассмотрения переходную составляющую закона движения и, практически, непосредственно переходить к анализу стационарного режима перемещений материальной частицы. С использованием этого алгоритма изучено влияние на среднюю скорость перемещения частицы сухого и вязкого трения, отмечены некоторые особенности. В частности, обращено внимание, что за перемещение частицы ответственна сила сухого трения. Без него направленное движение невозможно.

Список источников

1. Интенсификация технологических процессов вибромашин путём реализации бигармонических режимов работы / С.Л. Букин, С.Г. Маслов, А.П. Лютый, Г.Л. Резниченко // Обогащение полезных ископаемых: Науч.-техн. сб. 2009. №. 36 (77)-37(78). С. 81-89.
2. Федоренко И.Я. Вибрационные процессы и устройства в АПК: монография. Барнаул: РИО Алтайского ГАУ, 2016. 289 с.
3. Блехман И.И. Вибрационное перемещение: монография / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. М.: Наука, 1964. 412 с.
4. Крюков Б.И. Динамика вибрационных машин резонансного типа: монография. Киев: Наукова думка, 1967. 211 с.
5 Лавендел Э.Э. Синтез оптимальных вибромашин: монография. Рига: Зинатне, 1970. 252 с.
6. Червоненко А.Г. Аналитическое исследование виброперемещения сыпучего материала по рабочим поверхностям, совершающим полигармонические прямолинейные колебания // Проблемы вибрационной техники: мат. науч. семинара. Киев: Наукова думка. 1970. С. 116-125.
7. Гончаревич И.Ф. Динамика вибрационного транспортирования: монография. М.: Наука, 1972. 244 с.

8. Анахин В.Д. Вибрационное перемещение при продольных бигармонических колебаниях / В.Д. Анахин, В.Н. Монахов // Известия вузов: Машиностроение. 1974. № 8. С. 74-78.
9. Вибрации в технике: Справочник. Т.4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э. Лавендела. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.
10. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов: монография. Москва, Ижевск: НИЦ РХД, ИКИ, 2006. 176 с.
11. Движение частицы по негармонически колеблющейся плоскости / А.М. Васильев, С.А. Мачихин, А.И. Стрелюхина, А.Б. Оспанов // Хранение и переработка сельхозсырья. 2017. № 8. С. 39-46.
12. Клепиков С.И. Качество вибрационных транспортно-технологических устройств: монография. Хабаровск: Изд-во Тихоокеанск. гос. ун-та. 2017. 106 с.
13. Kinematics and dynamics of a particle on a non-simple harmonic vibrating screen / Lijun Wang, Zhenjun Ding, Shuang Meng, Huijun Zhao, Huiqiang Song // Particuology. 2017. V. 32. P. 167-177.
14. Fleishman D., Asscher Y., Urbakh M. Directed transport induced by asymmetric surface vibrations: Making use of friction // Journal of Physics: Condensed Matter. 2007. No. 19 (9). DOI: 10.1088/0953-8984/19/9/096004
15. Maza-Cuello M., Maza D. Efficient Transport Controlled by Biharmonic Frictional Driving // Physical Review Letters. 2024. No. 133 (15). DOI: 10.1103/PhysRevLett.133.158201
16. Nath J., Das S., Vishwakarma A., DasGupta A. Directed transport of a particle on a horizontal surface under asymmetric vibrations / // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2022. No. 440 (11). DOI: 10.1016/j.physd.2022.133452
17. Беловодский В. Н. Субгармонические колебания одномассовой инерционной вибромашины с асимметричной упругой опорой / В.Н. Беловодский, С.Л. Букин // Проблемы искусственного интеллекта. 2022. № 2 (25). С. 4-15.
18. Букин С.Л. Супергармонический инерционный вибропривод на базе одношарнирной карданной передачи / С.Л. Букин, В.Н. Беловодский // Машиностроение: сетевой электронный журнал. 2023. Т. 10. № 2. С. 3-10.
19. Беловодский В.Н. Аналитический анализ динамики одномассовой инерционной вибромашины с изломом валов в трансмиссии привода / В.Н. Беловодский, С.Л. Букин // Проблемы искусственного интеллекта. 2025. № 2 (29). С. 4-15.
20. Филимонихин Г.Б. Способ возбуждения двухчастотных вибраций пассивными автобалансирами / Г.Б. Филимонихин, В.В. Яцун // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 4. № 7 (76). С. 9-14.
21. Блехман И.И. К оценке скорости вибрационного транспортирования / И.И. Блехман, Л.И. Блехман, В.Б. Васильков // Обогащение руд. 2020. № 4. С. 21-26.
22. Беловодский В.Н. О формировании идеальных законов движения рабочих органов вибрационных транспортирующих машин путём реализации супергармонических резонансов / В.Н. Беловодский, С.Л. Букин // Информатика и кибернетика. 2024. № 4 (38). С. 27-31.
23. Беловодский В.Н. О перемещениях материальной частицы на горизонтальной транспортирующей машине нелинейного типа, совершающей суб- и супергармонические колебания / В.Н. Беловодский, С.Л. Букин // Проблемы искусственного интеллекта. 2025. № 3 (38). С. 52-64.
24. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. М.: Наука, 1966. 664 с.
25. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Наука, 1966. 608 с.

References

1. Intensification of technological processes of vibrating machines by implementing biharmonic modes of operation / S.L. Bukin, S.G. Maslov, A.P. Lyutyi, G.L. Reznichenko // Mineral enrichment: Scientific and Technical Collection. – 2009. – No. 36 (77)-37 (78). – Pp. 81-89.
2. Fedorenko I.Ya. Vibration processes and devices in the agro-industrial complex: Monograph. – Barnaul: RIO Altai State Agrarian University, 2016. – 289 p.
3. Blekhman I.I. Vibrational movement: Monograph / I.I. Blekhman, G.Yu. Dzhanelidze. – Moscow: Nauka, 1964. – 412 p.
4. Kryukov B.I. Dynamics of Resonance-Type Vibratory Machines: Monograph. – Kyiv: Naukova Dumka, 1967. – 211 p.
5. Lavendel E.E. Synthesis of Optimal Vibratory Machines: Monograph. – Riga: Zinatne, 1970. – 252 p.
6. Chervonenko A.G. Analytical Study of Vibratory Movement of Bulk Material along Working Surfaces Executing Polyharmonic Rectilinear Oscillations / Problems of Vibration Engineering: Proc. of the Scientific Seminar. – Kyiv: Naukova Dumka. 1970. – Pp. 116-125.

7. Goncharevich I.F. Dynamics of vibration transportation: Monograph. – M.: Nauka, 1972. – 244 p.
8. Anakhin V.D. Vibrational Displacement with Longitudinal Biharmonic Oscillations / V.D. Anakhin, V.N. Monakhov // News of Universities: Mechanical Engineering. – 1974. – No. 8. – Pp. 74-78.
9. Vibrations in Engineering: Handbook. Vol. 4. Vibrational Processes and Machines / Ed. by E.E. Lavendel. – Moscow: Mechanical Engineering, 1981. – 509 p.
10. Panovko G.Ya. Dynamics of vibration technological processes: Monograph. – Moscow, Izhevsk: NITs RKhD, IKI, 2006. – 176 p.
11. Motion of a Particle on a Non-Harmonically Vibrating Plane / A.M. Vasiliev, S.A. Machikhin, A.I. Strelyukhina, A.B. Ospanov // Storage and Processing of Agricultural Raw Materials. – 2017. – No. 8. – Pp. 39-46.
12. Klepikov S.I. Quality of Vibratory Transport and Technological Devices: Monograph. – Khabarovsk: Publishing House of Pacific Ocean State University. – 2017. – 106 p.
13. Kinematics and Dynamics of a Particle on a Non-Simple Harmonic Vibrating Screen / Lijun Wang, Zhenjun Ding, Shuang Meng, Huijun Zhao, Huiqiang Song // Particuology. – 2017. – Vol. 32. – Pp. 167-177.
14. Fleishman D., Asscher Y., Urbakh M. Directed transport induced by asymmetric surface vibrations: Making use of friction // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2007. – No 19 (9). – DOI: 10.1088/0953-8984/19/9/096004
15. Maza-Cuello M., Maza D. Efficient Transport Controlled by Biharmonic Frictional Driving // Physical Review Letters. – 2024. – No 133 (15). – DOI: 10.1103/PhysRevLett.133.158201
16. Nath J., Das S., Vishwakarma A., DasGupta A. Directed transport of a particle on a horizontal surface under asymmetric vibrations // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2022. – No 440 (11). – DOI: 10.1016/j.physd.2022.133452
17. Belovodskiy V. N. Subharmonic oscillations of a single-mass inertial vibration machine with an asymmetric elastic support / V. N. Belovodskiy, S. L. Bukin // Problems of Artificial Intelligence. – 2022. – No. 2 (25). – Pp. 4-15.
18. Bukin S. L. Superharmonic inertial vibration drive based on a single-joint cardan transmission / S. L. Bukin, V. N. Belovodskiy // Mechanical Engineering: online electronic journal. – 2023. – Vol. 10, No. 2. – Pp. 3-10.
19. Belovodskiy V.N. Analytical Analysis of the Dynamics of a Single-Mass Inertial Vibration Machine with a Fractured Shaft in the Drive Transmission / V.N. Belovodskiy, S.L. Bukin // Problems of Artificial Intelligence. – 2025. – No 2 (29). – Pp. 4-15.
20. Filimonikhin G.B. Method for Exciting Dual-Frequency Vibrations with Passive Autobalancers / G.B. Filimonikhin, V.V. Yatsun // East European Journal of Advanced Technologies. – 2015. – Vol. 4, No 7 (76). – Pp. 9-14.
21. Blekhman I.I. On the assessment of the speed of vibration transportation / I.I. Blekhman, L.I. Blekhman, V.B. Vasilkov // Ore dressing. – 2020. – No. 4. – Pp. 21-26.
22. Belovodskiy V.N. On the formation of ideal laws of motion of working parts of vibrating transport machines by implementing superharmonic resonances / V.N. Belovodskiy, S.L. Bukin // Informatics and Cybernetics. – 2024. – No 4 (38). – Pp. 27-31.
23. Belovodskiy V.N. On the Movements of a Material Particle on a Horizontal Nonlinear Transport Machine Executing Sub- and Superharmonic Oscillations / V.N. Belovodskiy, S.L. Bukin // Problems of Artificial Intelligence. – 2025. – No 3 (38). – Pp. 52-64.
24. Demidovich B.P. Fundamentals of Computational Mathematics / B.P. Demidovich, I.A. Maron. – Moscow: Nauka, 1966. – 664 p.
25. Fichtenholz G.M. Course of Differential and Integral Calculus. – Vol. 1. – Moscow: Nauka, 1966. – 608 p.

RESUME

V. N. Belovodskiy, S. L. Bukin

Stationary Regimes of Motion of a Material Particle on a Horizontal Plane that Performs Polyharmonic Oscillations in the Presence of Viscous and Dry Friction

The model of material motion in the form of a separate material particle is actively used in the description of vibration processes and even allows us to identify, under certain conditions, the physical mechanism of vibration movement of a layer of material. The article analyzes the works devoted to studying the peculiarities of the movement of material particles. In particular, it is noted that the continuous motion of a particle along a horizontal working organ is carried out under asymmetric laws of its oscillations.

It is emphasized that one of the main methods for studying the movement of a particle is step-by-step integration, but when the particle moves in a polyfrequency field, the difficulty in finding the conditions for the existence and stability of stationary modes increases. Therefore, the search for new approaches to assessing the average transportation speed is relevant.

The paper considers a model of a material particle moving on a horizontal vibrating plane, in which external friction is represented as two components: viscous and dry friction. And a new approach to determining its average speed is proposed, which is as follows.

The equation for the velocity of a material particle in a fixed coordinate system is considered. After integrating this equation over a period equal to the vibration period T of the vibrating surface, the following equation is obtained:

$$F\left(x_2\right)=\int_0^T\left[br\cdot\left(x_2-\dot{x}_0\right)+fr\cdot sign\left(x_2-\dot{x}_0\right)\right]dt=0.$$

This relationship is used to find the initial approximation $x_{2,st}$=const of the average velocity of the steady-state solution of the material particle $x_{2,av}$, and then, after numerically solving the differential equation with the initial condition $x_2(0)=x_{2,st}$, its average integral value is determined

$$x_{2,av}=\frac{1}{nT}\int_0^{nT}x_2\left(t\right)dt.$$

Using this approach, computational experiments are conducted with different levels of both types of resistance. A non-monotonic dependence of the average particle velocity on the value of dry friction is observed. It is demonstrated that viscous resistance is a factor that reduces the transport speed and can ultimately stop it, and in the absence of dry friction, the directed movement of a particle on a horizontal surface becomes impossible.

РЕЗЮМЕ

В. Н. Беловодский, С. Л. Букин

Стационарные режимы движения материальной частицы на горизонтальной плоскости, совершающей полигармонические колебания, при наличии вязкого и сухого трения

Модель движения материала в виде отдельной материальной частицы активно применяется при описании вибрационных процессов, позволяет выявить, при определённых условиях, физический механизм вибрационного перемещения слоя материала. В статье выполнен анализ работ, посвящённых изучению особенностей перемещения материальных частиц. В частности, отмечается, что их безотрывное движение по горизонтальному рабочему органу осуществляется при асимметричных законах его колебаний.

Подчёркнуто, что одним из основных методов исследования перемещения частицы является поэтапное интегрирование, однако при её движении в поличастотном поле возрастают трудности в отыскании условий существования и устойчивости стационарных режимов. Поэтому, поиск новых подходов к оценке средней скорости транспортирования является актуальным.

В работе рассматривается модель движения материальной частицы по горизонтальной вибрирующей плоскости, в которой внешнее трение представлено в виде двух составляющих – вязкого и сухого трения. И предлагается подход к определению её средней скорости, который заключается в следующем.

Рассматривается уравнение для скорости перемещения материальной частицы в неподвижной системе координат, которое после его интегрирования на промежутке равном периоду колебаний T вибрирующей поверхности, приводит к соотношению

$$F\left(x_2\right)=\int_0^T\left[br\cdot\left(x_2-\dot{x}_0\right)+fr\cdot sign\left(x_2-\dot{x}_0\right)\right]dt=0.$$

Это соотношение используется для нахождения начального приближения $x_{2,st}$=const средней скорости установившегося решения материальной частицы $x_{2,av}$, а затем, после численного решения дифференциального уравнения с начальным условием $x_2(0)=x_{2,st}$, определяется и её среднее интегральное значение

$$x_{2,av}=\frac{1}{nT}\int_0^{nT}x_2\left(t\right)dt.$$

С использованием этого подхода проводятся вычислительные эксперименты с различным уровнем сопротивлений обоих типов. Отмечается немонотонная зависимость средней скорости перемещения частицы от величины сухого трения. Демонстрируется, что вязкое сопротивление является фактором, снижающим скорость транспортирования и, в конечном счёте, может его остановить, а при отсутствии сухого трения направленное перемещение частицы на горизонтальной плоскости невозможно.

Беловодский Валерий Николаевич - к.т.н., доцент, кафедра компьютерного моделирования и дизайна, ФГБОУ ВО ДонНТУ, 283001, Донецк, ул. Артёма, 58, тел +7(949) 334-9150, v.belovodskiy@gmail.com ORCID 0000-0001-8345-7492. *Область научных интересов*: моделирование технических систем, нелинейная динамика, нейронные сети, математический дизайн

Букин Сергей Леонидович - к.т.н., доцент, кафедра компьютерного моделирования и дизайна, ФГБОУ ВО ДонНТУ 283001, Донецк, ул. Артёма, 58, тел. +7(949) 333-4224, s.bukin08@gmail.com ORCID 0000-0002-2814-7026. *Область научных интересов*: моделирование технических систем, линейная и нелинейная динамика, разработка и проектирование вибрационных машин различного технологического назначения

Belovodskiy Valeriy Nikolaevich - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Modeling and Design, FSBEI HE DonNTU, 283001, Donetsk, st. Artyom, 58, tel. +7 (949) 334-9150, v.belovodskiy@gmail.com ORCID 0000-0001-8345-7492. Research interests: modelling of technical systems, nonlinear dynamics, neural networks, mathematical design

Bukin Sergey Leonidovich - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, FSBEI HE DonNTU, 283001, Donetsk, st. Artyom, 58, tel. +7 (949) 333-4224, s.bukin08@gmail.com. ORCID 0000-0002-2814-7026. Research interests: modelling of technical systems, linear and nonlinear dynamics, development and design of vibration machines for various technological purposes

Статья поступила в редакцию 03.04.2026;
одобрена после рецензирования 07.05.2026; принята к публикации 02.09.2026
The article was submitted 03.04.2026; approved after reviewing 07.05.2026;
accepted for publication 02.09.2026.