Д

Проблемы искусственного интеллекта. 2026. N 3 (42). С. 269-282
Problems of Artificial Intelligence. 2026;3(42):269-282.
История науки
Научная статья

УДК 004.932.2 **DOI** 10.24412/2413-7383-2026-3-42-269-282

Ю. Н. Добровольский
Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Донецкий национальный технический университет», г. Донецк
283048, г. Донецк, ул. Артема, 131
dyn_don_20.14@mail.ru, ORCID 0000-0002-2399-6096

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК ОДИН ИЗ ВАЖНЕЙШИХ ОБЪЕКТОВ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Yu. N. Dobrovolsky
Federal State Budgetary Scientific Institution
Donetsk National Technical University, Donetsk
283048, Donetsk, 131 Artem Street
dyn_don_20.14@mail.ru

INTEGRAL EQUATIONS AS ONE OF THE MOST IMPORTANT OBJECTS OF MODERN MATHEMATICS

Рассмотрена история развития интегральных уравнений. Введены линейные интегральные уравнения Фредгольма, Вольтерры. Доказано достаточное условие, при котором интегральный оператор является сжимающим. Показан пример решения интегрального уравнения, рассмотрена задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.
Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерры, ядро, вырожденность, сжимающий оператор, сходимость.

The history of the development of integral equations is considered. Linear Fredholm and Volterra integral equations are introduced. A sufficient condition is proved under which the integral operator is contractive. An example of solving an integral equation is shown, and the Cauchy problem for a linear first-order differential equation is considered
Keywords: Fredholm and Volterra integral equations, kernel, degeneracy, contraction operator, convergence.

Введение

Интегральные уравнения представляют собой мощный математический инструмент, который находит широкое применение в различных областях науки и техники. Их изучение позволяет глубже понять многие физические и математические процессы, а также разработать эффективные методы решения сложных задач.

В основе интегральных уравнений лежит идея представления неизвестных функций через интегралы, что открывает новые возможности для моделирования и анализа различных явлений. Эти уравнения широко используются в физике, инженерии, экономике и других дисциплинах, где требуется исследование функциональных зависимостей и их свойств.

Актуальность данной темы заключается в том, что интегральные уравнения позволяют описывать сложные системы и процессы, которые трудно или невозможно исследовать с помощью традиционных дифференциальных уравнений. Они позволяют учитывать влияние различных факторов и находить оптимальные решения в условиях неопределённости.

Цель исследования – дать общее представление об интегральных уравнениях, их типах и основных методах решения.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть основные понятия и определения интегральных уравнений.
2. Привести примеры решения интегральных уравнений и анализ их решения в функциональном анализе.

Для решения поставленных задач использовался комплекс методов исследования:

– обобщение изученных ранее данных;
– анализ научно-методической литературы;
– систематизация информации.

Методология

В данной работе был использован метод сжимающих отображений. Принцип сжимающих отображений — классический результат в теории метрических пространств, который утверждает существование и единственность неподвижной точки у сжимающего отображения полного метрического пространства.

Пусть X, У – метрические пространства [3], [4]. Оператор A: X → У, называется непрерывным, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и любого элемента $x \in X$ верно следующее: $x_n \to x \Rightarrow A[x_n] \to A[x]$.

Пусть X – метрическое пространство. Оператор A: X → X, называется сжимающим, если существует такое число $0 \le \alpha < 1$, что $\rho(A[x], A[y]) \le \alpha\rho(x, y)$ для любых $x,y \in X$. Число α называется коэффициентом сжатия.

При решении интегральных уравнений был применён метод последовательных приближений или простых итераций. Для организации итерационного процесса используют специальные оценки точности [5].

– априорная оценка

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1);$$

– апостериорная оценка

$$\rho(x_n, x) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}).$$

С помощью априорной оценки (a priori – до опыта) можно заранее определить достаточное число итераций для нахождения приближенного решения с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Для этого нужно решить относительно n неравенство

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \le \varepsilon \Rightarrow n \ge \log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)}.$$

Отсюда априорная оценка N_{apr} числа итераций находится по формуле

$$N_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)} \right] + 1.$$

Здесь квадратные скобки означает целую часть заключённого в них числа.

Таким образом, априори известно, что для вычисления приближенного решения с требуемой точностью ε понадобится не более, чем N_{apr} итераций.

Апостериорную оценку (*a posteriori* – после опыта) удобно использовать в процессе вычисления итераций, если есть такая технологическая возможность. При этом на каждом шаге итерационного процесса необходимо сравнивать значения x_n и x_{n-1}:

$$\text{если } \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}) \le \varepsilon, \text{ то завершить вычислений;}$$

$$\text{если } \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_n, x_{n-1}) > \varepsilon, \text{ то продолжить вычисления.}$$

Апостериорная оценка ближе к фактическому числу итераций, которое требуется для достижения заданной точности ε, и она всегда не превышает прогноз, полученный с помощью априорной оценки.

На опыте можно убедиться, что требуемое число итераций незначительно зависит от начального приближения x_0 и существенно зависит от коэффициента сжатия α. Чем меньше α, тем выше скорость сходимости метода простых итераций.

1 История развития теории интегральных уравнений

Интегральные уравнения в своём развитии прошли следующие этапы:

1. XVIII век. Идея представления решений дифференциальных уравнений в виде определённых интегралов принадлежит швейцарскому математику Л. Эйлеру (1707-1783). Используя идеи Эйлера, французский математик П.С. Лаплас (1749-1827) создал метод решения дифференциальных уравнений с частными производными.

Первое (линейное) интегральное уравнение получил французский математик А. Клеро (1713-1765) в работе по теории фигуры Земли.

2. XIX век. К интегральным уравнениям привели некоторые задачи.

Например, французский математик Ж. Фурье (1768-1830) решил задачу об обращении интеграла, которая носит его имя.

Норвежский математик Н. Абель (1802-1829), занимаясь обобщением задачи о таутохроне, пришёл к интегральному уравнению. Таутохрон – это кривая, обладающая определёнными свойствами.

3. XX век. Систематическое исследование интегральных уравнений началось в конце XIX – начало XX века. Прорыв в теории линейных интегральных уравнений связан с классическими работами итальянского математика В. Вольтерры (1860-1940), шведским математиком Э.И. Фредгольма (1866-1927), немецким математиком Д. Гильберта (1862-1943), немецким математиком Э. Шмидта (1876-1959).

Э.И. Фредгольм ввёл и анализировал целый класс интегральных уравнений, которые теперь называются уравнениями Фредгольма.

Французский математик Ж.А. Пуанкаре (1854-1912) в работе по теории потенциала ввёл в интегральное уравнение параметр λ, что стало важным шагом для исследования нелинейных уравнений.

Нелинейные интегральные уравнения стали самостоятельным объектом исследований. Их появление было связано с развитием математики XVIII–XIX веков и ростом интереса к нелинейным задачам в конце XIX – начале XX века.

Работы русского математика А.М. Ляпунова (1857-1918), по фигурам равновесия вращающихся жидкостей, впервые привели к появлению нелинейных интегральных уравнений, и зародились качественные методы их решения. В этих работах также возникло понятие бифуркации – ключевое для нелинейной динамики.

Э. Шмидт, Т. Лалеску, Г. Брату и другие математики развивали теорию нелинейных интегральных уравнений.

Значительный вклад в развитие теории интегральных уравнений внесли советские математики М.А. Красносельский, М.М. Вайнберг, П.П. Забрейко.

2 Интегральные уравнения Фредгольма

Определение 1. Интегральным уравнением называется уравнение, которое содержит неизвестную функцию под знаком интеграла [6-9].

Определение 2. Интегральным уравнением Фредгольма называется уравнение вида:

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + \psi(t). \tag{1}$$

Это уравнение названо в честь шведского математика начала XX века Эрика Ивара Фредгольма.

Здесь данными являются непрерывные функции $K(t,s)$, $\psi(t)$, а $x(t)$ – искомая непрерывная функция. Функция $K(t,s)$ называется ядром интегрального уравнения.

Ядро называется *вырожденным*, если в нем можно разделить переменные следующим образом: $K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)v_k(s)$.

Для уравнения (1) с вырожденным ядром нетрудно найти точное решение. Сначала надо получить общий вид решения с неизвестными числовыми коэффициентами c_k:

$$x(t) = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(t)v_k(s)\cdot x(s)ds + \psi(t);$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t) + \psi(t), \quad c_k = \int_a^b v_k(s)x(s)ds.$$

Подставляя выражение для x(t) в формулу коэффициентов c_k, получаем систему n линейных алгебраических уравнений с неизвестными $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Некоторые виды уравнения (1) с невырожденным ядром также поддаются точному разрешению, но чаще требуют приближенного решения.

Сформулируем достаточное условие, при котором к уравнению (1) применим принцип сжимающих операторов, а значит и метод простых итераций.

Теорема 1. Пусть функция $\psi(t)$ непрерывна на отрезке [a;b], функция $K(t,s)$ непрерывна в квадрате [a;b]×[a;b].

Рассмотрим интегральный оператор

$$A: C[a;b] \to C[a;b], \quad A[x] = \int_a^b K(t,s)x(s)ds + \psi(t).$$

При условии

$$\max_{t\in[a;b]}\int_a^b |K(t,s)|\,ds = \alpha < 1 \qquad (2)$$

Оператор А является сжимающим с коэффициентом сжатия α [5], [11-13].

Доказательство. В ходе доказательства нам понадобятся два хорошо известных соотношения для определённого интеграла:

$$\left|\int_a^b \varphi(s)ds\right| \le \int_a^b |\varphi(s)|\,ds; \qquad (3)$$

$$\int_a^b |\varphi(s)\cdot\eta(s)|\,ds \le \max_{s\in[a;b]}|\varphi(s)|\cdot\int_a^b |\eta(s)|\,ds. \qquad (4)$$

Для любых функций $x, y \in C[a;b]$ и оператора А имеем

$$\rho_{C[a;b]}(A[x],A[y]) = \max_{t\in[a;b]}|A[x]-A[y]| =$$

$$= \max_{t\in[a;b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)ds+\psi(t)-\int_a^b K(t,s)y(s)ds-\psi(t)\right| =$$

$$= \max_{t\in[a;b]}\left|\int_a^b K(t,s)(x(s)-y(s))ds\right| \le$$

(воспользуемся сначала оценкой (3), затем (4))

$$\le \max_{t\in[a;b]}\int_a^b |K(t,s)(x(s)-y(s))|\,ds \le$$

$$\le \max_{t\in[a;b]}\int_a^b |K(t,s)|\,ds\cdot\max_{s\in[a;b]}|x(s)-y(s)| =$$

$$= \max_{t\in[a;b]}\int_a^b |K(t,s)|\,ds\cdot\rho_{C[a;b]}(x,y).$$

Итак, если выполнено условие $\max_{t\in[a;b]}\int_a^b |K(t,s)|\,ds = \alpha < 1,$ то А – сжимающий оператор.

Теорема доказана.

3 Интегральные уравнения Вольтерры

Интегральные уравнения Вольтерры (Вито Вольтерра – итальянский математик конца XIX – начала XX века). Их отличие от уравнений Фредгольма заключается лишь в том, что в них участвует интеграл с переменным верхним пределом t:

$$x(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds + \psi(t). \qquad (5)$$

Теорема 1 утверждает, что к уравнению Фредгольма (1) применим принцип сжимающих операторов, если ядро оператора достаточно мало – в смысле условия (2). Уравнение Вольтерры свободно от этого требования [16-19].

Ссылаясь на источники [20], [21], доказано, что к уравнению Вольтерры с любыми непрерывными данными применим обобщённый принцип сжимающих операторов, из которого вытекает существование и единственность решения уравнения (5), а также возможность получить приближенное решение методом простых итераций.

Из приложений уравнения Вольтерры отметим, что к нему сводится задача Коши для линейного дифференциального уравнения любого порядка. Покажем это на примере уравнения 1-го порядка:

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t); \\ x(a) = x_a. \end{cases} \quad (6)$$

Преобразование этой задачи к интегральному уравнению основано на очевидной связи между функцией и её производной.

$$x(t) = x_a + \int_a^t x'(s)ds.$$

Тогда задача (6) равносильна уравнению

$$x(t) = x_a + \int_0^t (p(s)x(s) + q(s))ds.$$

Обозначим $\psi(t) = \int_0^t q(s)ds + x_a$ и получаем канонический вид уравнения Вольтерры:

$$x(t) = \int_0^t p(s)x(s)ds + \psi(t)$$

с ядром $K(t,s)=p(s)$.

4 Решение интегральных уравнений

Пример №1.

В пространстве C[0;1] дано интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, содержащее числовой параметр $\lambda > 0$.

1. Определить, при каких значениях параметра λ к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов.

2. Взять любое подходящее значение λ и методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с указанной точностью ε, используя априорную оценку числа итераций.

3. Найти точное решение этого уравнения и сравнить с приближенным.

$$x(t) = \lambda \int_0^1 (t - s^2)x(s)ds + t^3 + 1, \ \varepsilon = 10^{-3} \quad (7)$$

1. Найдём значения параметра λ, при которых к уравнению (7) применим принцип сжимающих операторов.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$A: C[0;1] \to C[0;1], \quad A[x] = \lambda \int_0^1 (t - s^2)x(s)ds + t^3 + 1.$$

Функция $K(t,s) = \lambda(t - s^2)$ – ядро интегрального оператора. Уравнение (7) имеет вид

$$A[x] = x,$$

его решение – неподвижная точка оператора A. Обратимся к достаточному признаку сжимающего оператора. При условии

$$\alpha = \lambda \max_{t \in [0;1]} \int_0^1 \left| t - s^2 \right| ds < 1 \quad (8)$$

Оператор A сжимающий с коэффициентом сжатия α.

Необходимо вычислить $\int_0^1 \left|t-s^2\right| ds$. Выражение $t-s^2$ при $t, s \in [0;1]$ принимает как положительные, так и отрицательные значения:

$$-1 \le t-s^2 \le 1,$$
$$t-s^2 \ge 0 \quad при \quad 0 \le s \le \sqrt{t},$$
$$t-s^2 < 0 \quad при \quad \sqrt{t} < s \le 1.$$

Тогда

$$\int_0^1 \left|t-s^2\right| ds = \int_0^{\sqrt{t}} (t-s^2) ds + \int_{\sqrt{t}}^1 (s^2-t) ds = \frac{4}{3} t\sqrt{t} - t + \frac{1}{3}.$$

Находим максимум

$$\max_{t\in[0;1]} \left(\frac{4}{3} t\sqrt{t} - t + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

Осталось выразить параметр λ из условия (8):

$$\alpha = \lambda \frac{2}{3} < 1.$$

Таким образом, при $\lambda < \frac{3}{2}$ к уравнению (7) применим принцип сжимающих операторов: уравнение имеет единственное решение и можно использовать метод простых итераций для поиска приближенного решения.

2. Возьмём $\lambda = \frac{1}{2}$ и методом простых итераций найдём приближенное решение уравнения (1) с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, используя априорную оценку числа итераций.

Схема действия метода простых итераций, использование априорной оценки ссылаемся на источники [4-6]. При $\lambda = \frac{1}{2}$ перед нами уравнение

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (t-s^2) x(s) ds + t^3 + 1 \qquad (9)$$

Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задаётся рекуррентной формулой $x_n = A[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (t-s^2) x_{n-1}(s) ds + t^3 + 1.$$

Выбираем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t) \equiv 1$, и вычисляем первую итерацию $x_1(t) = t^3 + \frac{1}{2} t + \frac{5}{6}$. Априорную оценку N_{apr} числа итераций находим по формуле

$$N_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho_{C[0;1]}(x_0, x_1)} \right] + 1.$$

В данном случае

$$\varepsilon = 10^{-3}, \alpha = \lambda \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$
$$\rho_{C[0;1]}(x_0, x_1) = \max_{t\in[0;1]} \left| x_0(t) - x_1(t) \right| = \max_{t\in[0;1]} \left| t^3 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{6} \right| = \frac{4}{3}.$$

Отсюда $N_{apr}=7$. Следовательно, для вычисления приближенного решения уравнения (9) с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ достаточно провести 7 итераций:

$$x_1(t)=t^3+\frac{1}{2}t+\frac{5}{6},$$
$$x_2(t)=t^3+\frac{2}{3}t+\frac{103}{144},$$
$$x_3(t)=t^3+\frac{187}{288}t+\frac{617}{864},$$
$$\dots$$
$$x_7(t)=t^3+\frac{3848611}{5971968}t+\frac{25679455}{35831808}.$$

3. Найдём точное решение уравнения (9) и сравним его с приближенным.

Как отмечено ранее, для интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром есть возможность найти точное решение. Уравнение (9) представим в форме

$$x(t)=t^3+\frac{t}{2}\int_0^1 x(s)ds+1-\frac{1}{2}\int_0^1 s^2x(s)ds.$$

Отсюда ясно, что решение имеет вид

$$x(t)=t^3+c_1t+c_2,\ c_1,c_2\in R \qquad (10)$$

$$c_1=\frac{1}{2}\int_0^1 x(s)ds,\ c_2=1-\frac{1}{2}\int_0^1 s^2x(s)ds \qquad (11)$$

Чтобы найти значения коэффициентов c_1 и c_2 подставим представление (10) в формулы для коэффициентов (11):

$$c_1=\frac{1}{2}\int_0^1 (s^3+c_1s+c_2)ds,\ c_2=1-\frac{1}{2}\int_0^1 s^2(s^3+c_1s+c_2)ds.$$

После вычисления интегралов необходимо решить систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} c_1=\frac{1}{8}+\frac{c_1}{4}+\frac{c_2}{2}, \\ c_2=\frac{11}{12}-\frac{c_1}{8}-\frac{c_2}{6}, \end{cases} \Rightarrow c_1=\frac{29}{45},\ c_2=\frac{43}{60}.$$

Итак, получили точное решение уравнения (9):

$$x(t)=t^3+\frac{29}{45}t+\frac{43}{60}.$$

Сравним его с приближенным решением $x_7(t)$ в метрике пространства C[0;1]:

$$\rho_{C[0;1]}(x,x_7)=\max_{t\in[0;1]}\left|x(t)-x_7(t)\right|=\frac{49}{35\,831\,808}\approx 0,0000014<10^{-3}.$$

Таким образом, приближенное решение обладает требуемой точностью.

Пример №2.

Дана задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

1. Найти точное решение задачи Коши.

2. Преобразовать задачу Коши к интегральному уравнению Вольтерры и методом простых итераций найти несколько первых приближений к точному решению. Проиллюстрировать графически сходимость приближенных решений к точному решению.

Для вычислений и построения графиков удобно использовать математические пакеты.

$$x'=x\cos t+\sin 2t,\ x(0)=-1 \qquad (12)$$

1. Найдём точное решение задачи Коши (12).

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка может быть решено методом Бернулли или методом вариации произвольной постоянной:

$$x(t) = e^{\sin t} - 2 - 2\sin t\,.$$

2. Преобразуем задачу Коши (12) к интегральному уравнению Вольтерры и применим к нему метод простых итераций для нахождения приближенных решений.

Задача Коши (12) равносильна интегральному уравнению Вольтерры

$$x(t) = -1 + \int_0^t (x(s)\cos s + \sin 2s)ds\,.$$

После упрощения получаем уравнение следующего вида:

$$x(t) = \underbrace{\int_0^t \cos s \cdot x(s)ds - \frac{1}{2}(1+\cos 2t)}_{A(x)} \Leftrightarrow A[x] = x\,.$$

К интегральному уравнению Вольтерры может быть применён метод простых итераций, ссылаемся на источники [4-6]. Для произвольного начального приближения x_0 последовательность итераций задаётся рекуррентной формулой $x_n = A[x_{n-1}]$. В данном случае

$$x_n(t) = \int_0^t \cos s \cdot x_{n-1}(s)ds - \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,.$$

Выбираем произвольным образом начальное приближение, например $x_0(t) = t$. Тогда

$$x_1(t) = -\frac{3}{2} + \cos t + t\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t\,,$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{7}{4}\sin t + \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{12}\sin 3t$$

$$x_3(t) = -\frac{311}{288} - \frac{3}{4}\sin t + \frac{3}{8}t\sin t + \frac{3}{16}\cos t - \frac{1}{24}\cos 2t - \frac{11}{144}\cos 3t - \frac{1}{24}t\sin 3t - \frac{1}{12}\sin 3t + \frac{1}{96}\cos 4t$$

и т. д.

В виду того, что формулы следующих приближений очень громоздки, ограничимся первыми тремя итерациями. Для наглядности проиллюстрируем это графически. Построим графики точного решения и первых трёх итераций. В соответствии с рисунком 1 уже наглядно видно сходимость приближенных решений к точному решению.

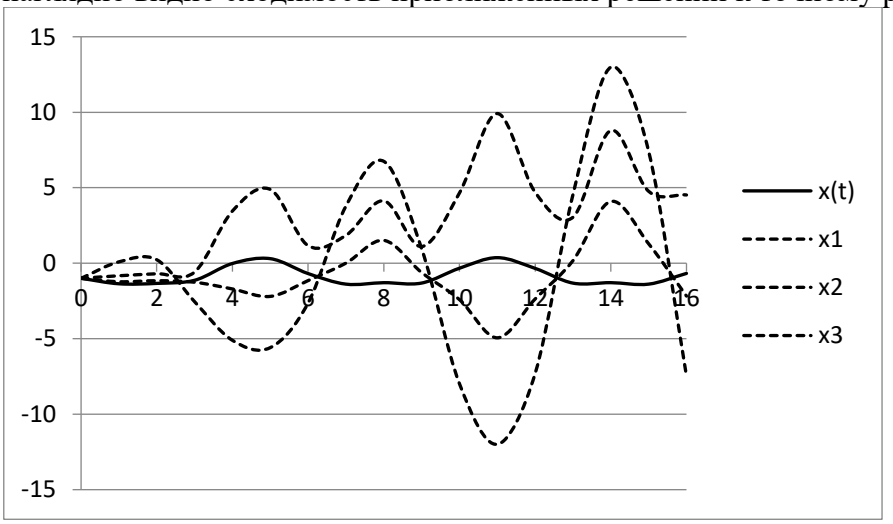


Рисунок 1 - Сходимость приближенных решений к точному решению

Научная новизна. В отличие от ранее рассмотренного ядра, рассмотрим ядро с сильной особенностью: экспоненциальное с гиперболическим аргументом.

$$K(t,s)=\exp\left(\frac{1}{|t-s|}\right)$$

Особенность заключается в том, что на диагонали $t=s$ оно является разрывным.

Для оператора $(A\varphi)(t)=\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|}\right)\varphi(s)ds$ норма в $C[0,1]$ оценивается как

$$\|A\|\le \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|}\right)ds.$$

Таким образом, в пространстве $C[a,b]$ это ядро непригодно для метода сжимающих отображений и норма соответствующего интегрального оператора бесконечна. Чтобы получить корректное ядро, необходима регуляризация. Введём малый параметр $\varepsilon>0$ и рассмотрим ядро $K_\varepsilon(t,s)=\exp\left(\frac{1}{|t-s|+\varepsilon}\right)$. Теперь при $\varepsilon>0$ знаменатель отделен от нуля.

$|t-s|+\varepsilon\ge\varepsilon$, поэтому $K_\varepsilon(t,s)\le e^{1/\varepsilon}$, и ядро ограничено и непрерывно на квадрате $[0,1]^2$. Значит, оператор A_ε действует из $C[0,1]$ в $C[0,1]$, и при достаточно малом λ оператор $T\varphi=f+\lambda A_\varepsilon\varphi$ будет сжимающим.

Конкретный пример.

Рассмотрим уравнение $\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|+\varepsilon}\right)\varphi(s)ds,\quad t\in[0,1]$. Возьмём $\varepsilon=0,2,\ f(t)=t,\ \lambda=0,005$.

Оценим норму оператора A_ε. $\|A_\varepsilon\|\le\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|+0,2}\right)ds$.

Поскольку $|t-s|+0,2\ge 0,2$, то $\exp\left(\frac{1}{|t-s|+0,2}\right)\le e^5\approx 148,4$.

Тогда $\|A_\varepsilon\|\le\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|+0,2}\right)ds\le 148,4\cdot 1=148,4$, $\|A_\varepsilon\|\le 148,4$, следовательно, $\|\lambda A_\varepsilon\|\le 0,005\cdot 148,4=0,742<1$. Таким образом, оператор $T\varphi=f+\lambda A_\varepsilon\varphi$ - сжимающий в C[0,1] с коэффициентом сжатия $q\le 0,742$.

Для реализации метода последовательных приближений, строим итерации:

$$\varphi_0(t)=f(t)=t,\ \varphi_{n+1}(t)=t+0,005\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|+0,2}\right)\varphi_n(s)ds.$$

Вычислим первую итерацию: $\varphi_1(t)=t+0,005\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|+0,2}\right)sds$.

Раскрывая модуль, интеграл разбивается на два:

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|+0,2}\right)sds=\int_0^t \exp\left(\frac{1}{t-s+0,2}\right)sds+\int_t^1 \exp\left(\frac{1}{s-t+0,2}\right)sds.$$

Аналогично вычисляем вторую итерацию: $\varphi_2(t) = t + 0,005\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{|t-s|+0,2}\right)\varphi_1(s)ds$.

Оба интеграла не берутся в элементарных функциях, поэтому надо применить численные методы: выполняя дискредитирование квадрата $[0,1]^2$, можно применить метод трапеций или какой ни будь другой, но это совсем другой вопрос.

Процесс итерации продолжаем до тех пор, пока разность $\max_i \left|\varphi_i^{(n+1)} - \varphi_i^{(n)}\right|$ не станет меньше заданной точности ε. Из-за сжимаемости с $q \le 0,74$ сходимость будет геометрической, то есть ошибка на *n*-ой итерации будет уменьшаться на порядок q^n.

Заключение

Теория интегральных уравнений сыграла решающую роль в формировании функционального анализа.

В последующие годы развивались различные направления: изучение уравнений с ядрами, имеющими «слабые особенности», теория регуляризации некорректных уравнений, теория сингулярных (особых) интегральных уравнений.

Интегральные уравнения находят применение в физике, механике, геофизике, акустике, кристаллографии и других областях науки.

Таким образом, данная статья станет полезным ресурсом для студентов, исследователей и специалистов, интересующихся интегральными уравнениями и их применением в научных и практических задачах.

Список источников

1. Добровольский Ю.Н. Теория обобщённых функций – как инструмент решения уравнений современной математики. Материалы XIX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Инженер настоящего и будущего» ППРП – 2024. Том 2. Таганрог, 20 – 21 мая 2024 г. С.290-296
2. Добровольский Ю.Н. Теорема Хана-Банаха – как одна из основных теорем функционального анализа и ее практическое применение / Ю.Н. Добровольский // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: «Информатика и кибернетика». №1(39), 2025, Донецк, Дон НТУ. – С. 62-70.
3. Добровольский Ю.Н. Метрика – как одна из важнейших структур абстрактной математики / Ю.Н. Добровольский // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: «Информатика и кибернетика». №3(41), 2025, Донецк, Дон НТУ. – С. 52-60.
4. Добровольский Ю.Н. Сходимость в метрическом пространстве / Ю.Н. Добровольский // Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях (СИТОНИ-2025) Сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции с международным участием. 20 ноября 2025 г. Донецк, Дон НТУ. – С. 13-20.
5. Добровольский Ю.Н. Применение принципа сжимающих отображений в решении уравнений и систем различных типов. XVII Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием. «Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование». (ИУСМКМ – 2026). 22 – 23 апреля 2026 г. Донецк, Дон НТУ.
6. Лебедев, В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика: учеб. пособие. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2005. – 296с.
7. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
8. Треногин, В. А. Функциональный анализ: учебник. – 4-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2007. – 488 с.
9. Фёдоров, В. М. Курс функционального анализа. – СПб.: Лань, 2005. – 352 с.
10. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа: учебник: в 3 т. Т. 1-2. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2005. – 424 с.
11. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики: в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск: Вышэйшая школа, 1972. – 584 с.

12. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения (введение в теорию). – М.: Ком-Книга, 2010. – 304 с.
13. Волков, В. Т. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: курс лекций: учеб. пособие / В. Т. Волков, А. Г. Ягола. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во КДУ, 2009. – 140 с.
14. Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 344 с.
15. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 248 с.
16. Васильева А. Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 432 с.
17. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004. 160 с.
18. Дифференциальные и интегральные уравнения : учебное пособие в 3-х частях. Ч. 1 / сост. Кручек М. М., Светова Н. Ю., Семенова Е. Е. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. 100 с.
19. Дифференциальные и интегральные уравнения : учебное пособие в 3-х частях. Ч. 2 / сост. Светова Н. Ю., Семенова Е. Е. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. 75 с.
20. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2003. 120 с.
21. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями : Учебное пособие. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 192 с.

References

1. Dobrovolsky Yu.N. The theory of generalized functions as a tool for solving equations in modern mathematics. Proceedings of the XIX All-Russian Scientific and Practical Conference with International Participation "Engineer of the Present and Future" PPPRP – 2024. Volume 2. Taganrog, May 20-21, 2024. Pp. 290-296.
2. Dobrovolsky Yu.N. The Hahn-Banach Theorem as One of the Fundamental Theorems of Functional Analysis and Its Practical Application / Yu.N. Dobrovolsky // Scientific Works of Donetsk National Technical University. Series: Computer Science and Cybernetics. No. 1(39), 2025, Donetsk, DonNTU. – Pp. 62-70.
3. Dobrovolsky, Yu.N. Metric as one of the most important structures of abstract mathematics / Yu.N. Dobrovolsky // Scientific Works of Donetsk National Technical University. Series: Computer Science and Cybernetics. No. 3(41), 2025, Donetsk, Don NTU. – Pp. 52-60.
4. Dobrovolsky Yu.N. Convergence in metric space / Yu.N. Dobrovolsky // Modern information technologies in education and scientific research (SITONI-2025) Proceedings of the IX All-Russian Scientific and Technical Conference with international participation. November 20, 2025 Donetsk, Don NTU. – pp. 13-20.
5. Dobrovolsky Yu.N. Application of the principle of compressive mappings in solving equations and systems of various types. XVII All-Russian Scientific and Technical Conference with International Participation. "Computer Science, Control Systems, Mathematical and Computer Modeling." (IUSMKM – 2026). 22 – 23 April 2026. Donetsk, DonNTU.
6. Lebedev, V. I. Functional analysis and computational mathematics: textbook. stipend. – 4th ed., revised and add. – M.: Fizmatlit, 2005. – 296 p.
7. Kolmogorov, A. N. Elements of the theory of functions and functional analysis / A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. – 7th ed. - M.: Fizmatlit, 2004. – 572 p.
8. Trenogin, V. A. Functional Analysis: Textbook. – 4th ed., revised. – Moscow: Fizmatlit, 2007. – 488 p.
9. Fedorov, V. M. Course of Functional Analysis. – St. Petersburg: Lan, 2005. – 352 p.
10. Kudryavtsev, L. D. A Short Course of Mathematical Analysis: Textbook: in 3 vol. Vol. 1-2. – 3rd ed. – Moscow: Fizmatlit, 2005. – 424 p.
11. Krylov, V. I. Computational Methods of Higher Mathematics: in 2 vol. / V. I. Krylov, V. V. Bobkov, P. I. Monastyrny. – Minsk: Vysheyshaya shkola, 1972. – 584 p.
12. Krasnov, M. L. Integral Equations (Introduction to the Theory). – M.: Kom-Kniga, 2010. – 304 p.
13. Volkov, V. T. Integral equations. Calculus of variations: a course of lectures: textbook. manual / V. T. Volkov, A. G. Yagola. – 2nd ed., ispr. – M.: Publishing house of KDU, 2009. – 140 p.
14. Romanko, V. K. Course of Differential Equations and Calculus of Variations. – 2nd ed. – M: Laboratory of Basic Knowledge, 2001. – 344 p.
15. Aleksandrova N. V. History of Mathematical Terms, Concepts, and Notations: A Reference Dictionary. M.: LKI Publishing House, 2008. 248 p.
16. Vasilyeva, A. B. Differential and Integral Equations, Variational Calculus in Examples and Problems / A. B. Vasilyeva, G. N. Medvedev, N. A. Tikhonov, and T. A. Urazgildina. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 432 p.

17. Vasilyeva A. B., Tikhonov N. A. Integral Equations. M.: FIZMATLIT, 2004. 160 p.
18. Differential and Integral Equations: A Textbook in 3 Parts. Part 1 / Comp. Kruchek M. M., Svetova N. Yu., Semenova E. E. – Petrozavodsk: PetrSU Publishing House, 2014. 100 p.
19. Differential and Integral Equations: A Textbook in 3 Parts. Part 2 / Compiled by N. Yu. Svetova and E. E. Semenova. Petrozavodsk: PetrSU Publishing House, 2014. 75 p.
20. Petrovsky, I. G. Lectures on the Theory of Integral Equations. Moscow: Editorial URSS, 2003. 120 p.
21. Krasnov, M. L., Kiselev, A. I., and Makarenko, G. I. Integral Equations: Problems and Examples with Detailed Solutions. Moscow: LIBROKOM Book House, 2012. 192 p.

РЕЗЮМЕ

Ю.Н. Добровольский

Интегральные уравнения как один из важнейших объектов современной математики

Интегральные уравнения – это уравнения, в которых неизвестная функция содержится под знаком интеграла. Они широко применяются в математической физике, механике, теории управления, прикладной математике и других областях. К ним часто сводятся задачи, которые изначально формулируются для дифференциальных уравнений.

Цель исследования – изучить свойства интегральных уравнений, рассмотреть метод сжимающих отображений и показать его применения в функциональном анализе.

Изложены основные понятия: Уравнения Фредгольма и Вольтерры, ядро и свободный член интегрального уравнения.

Интегральные уравнения могут использоваться для доказательства теорем существования и единственности решений краевых задач для дифференциальных уравнений, а также для понижения размерности некоторых задач.

Несмотря на развитую теорию интегральных уравнений, их практическое применение ограничено из-за сложностей, связанных с формированием плотных матриц при дискретизации. Развитие вычислительной техники и методов вычислительной математики позволило начать использовать интегральные уравнения для численного решения конкретных задач.

Перспективность исследований по этой теме можно определить, как разработка новых аппроксимативных методов решения или расширение круга задач, решаемых с помощью современных подходов. Например, методом на основе случайных кубатур или параметрической регуляризации ядра.

RESUME

Yu.N. Dobrovolsky

Integral Equations As One Of The Most Important Objects Of Modern Mathematics

Integral equations are equations in which the unknown function is contained under the sign of an integral. They are widely used in mathematical physics, mechanics, control theory, applied mathematics, and other fields. They are often used to solve problems that are initially formulated for differential equations.

The purpose of the study is to explore the properties of integral equations, examine the method of compressive mappings, and demonstrate its applications in functional analysis.

The article introduces the fundamental concepts of Fredholm and Volterra equations, the kernel, and the free term of an integral equation.

Integral equations can be used to prove existence and uniqueness theorems for solutions of boundary value problems for differential equations, as well as to reduce the dimensionality of certain problems.

Despite the developed theory of integral equations, their practical application is limited due to the difficulties associated with the formation of dense matrices during discretization. However, the development of computational techniques and computational mathematics methods has made it possible to use integral equations for the numerical solution of specific problems.

The prospects for research on this topic can be defined as the development of new approximate solution methods or the expansion of the range of problems that can be solved using modern approaches. For example, the method based on random cubatures or parametric kernel regularization.

Добровольский Юрий Николаевич, старший преподаватель кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта ДонНТУ. Донецк, ул. Артёма 131, телефон +7(949)4779556, dyn_don_20.14@mail.ru, ORCID 0000-0002-2399-6096

Область научных интересов: Теория линейных операторов в функциональных пространствах, теория обобщённых функций. Поиск аналитических методов решений уравнений математической физики в технике.

Dobrovolsky Yuri Nikolaevich, Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, DonNTU. Donetsk, 131 Artem Street, phone +7(949)4779556, dyn_don_20.14@mail.ru, ORCID 0000-0002-2399-6096

Research interests: Theory of linear operators in functional spaces, theory of generalized functions. Search for analytical methods of solving equations of mathematical physics in engineering.

Статья поступила в редакцию: 25.03.2026
одобрена после рецензирования 29.04.2026; принята к публикации 02.09.2026
The article was submitted 25.03.2026; approved after reviewing 29.04.2026;
accepted for publication 02.09.2026.